Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 4. С. 439–445.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.93
MSC 2010: 34A34, 58E10

О рациональных интегралах геодезических потоков

В. В. Козлов

Рассматривается задача о первых интегралах уравнений геодезических на двумерных поверхностях, рациональных по скоростям (или импульсам). С помощью теоремы Коши–Ковалевской доказано существование нетривиальных рациональных интегралов с заданными значениями степеней числителя и знаменателя.

Ключевые слова: конформные координаты, рациональный интеграл, неприводимые интегралы, теорема Коши–Ковалевской

1. Введение

В подходящих локальных конформных координатах q_1, q_2 метрика гладкой двумерной поверхности имеет вид

$$(dq_1^2 + dq_2^2)/2\lambda, \tag{1.1}$$

где λ — некоторая положительная гладкая функция от q_1 и q_2 (для краткости мы будем называть λ конформным множителем, хотя в римановой геометрии конформным множителем обычно называется величина λ^{-1}). Геодезические линии на поверхности с метрикой (1.1) определяются решениями гамильтоновой системы

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{1.2}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right)\lambda. \tag{1.3}$$

Точно такими же уравнениями в механике описывается динамика частицы, движущейся по инерции по гладкой двумерной поверхности. Функция Гамильтона (1.3) — это ее кинетическая энергия.

Получено 29 сентября 2014 года
После доработки 17 октября 2014 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (14-50-00005).

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Для точного интегрирования системы (1.2) недостает только одного первого интеграла F, функционально независимого от интеграла (1.3). Структуре дополнительного интеграла и условиям его существования посвящено большое число работ (упомянем классические результаты Дарбу, Уиттекера, Биркгофа [1, 2]; глобальные аспекты задачи о дополнительном интеграле обсуждаются, например, в [3]). Особое внимание уделялось полиномиальным по импульсам p_1 и p_2 первым интегралам; в нашем случае это однородные многочлены степени m. Наличие линейного интеграла ($m = 1$) связано с существованием скрытой циклической координаты, от которой не зависит конформный множитель λ, а наличие нетривиального дополнительного квадратичного интеграла ($m = 2$) влечет возможность разделения переменных (или, другими словами, метрика (1.1) будет лиувиллевой). Биркгоф распространил эти результаты на случай условных полиномиальных интегралов степени $m = 1$ и $m = 2$ (которые являются интегралами при фиксированных положительных значениях гамильтониана, например, когда $H = 1$) [2]. Геометрический смысл существования полиномиальных интегралов высших степеней остается неясным.

С другой стороны, как показано в [4], имеются римановы метрики (1.1), которые допускают (локально) *неприводимые* полиномиальные интегралы сколь угодно высоких степеней. Интеграл степени m называется неприводимым, если он не зависит от интеграла (1.3) и при этом рассматриваемый геодезический поток не допускает не зависящих от H полиномиальных интегралов, степень которых меньше m. Подробное доказательство этого результата изложено в работе [5].

Несколько преувеличенное внимание к полиномиальным по импульсам интегралам связано со следующим простым наблюдением. Пусть нам известен *аналитический* (или даже формально аналитический) по импульсам первый интеграл F дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом (1.3). Разложим F в (формальный) ряд по однородным формам относительно импульсов p_1 и p_2:

$$F = \sum F_m, \quad \deg F_m = m.$$

Легко проверить, что каждая однородная форма F_m будет полиномиальным интегралом. Конечно, может оказаться, что все они зависимы с гамильтонианом (1.3). Но в этом случае функции F и H также будут зависимыми. Таким образом, широкий класс первых интегралов, аналитических по импульсам, совпадает с классом полиномиальных первых интегралов. Автором настоящей заметки в связи с этим высказывалась точка зрения, что *все* первые интегралы задачи о геодезических (и даже более общих обратимых систем из механики) являются либо полиномами, либо функциями от полиномов. Во всяком случае все известные нам *конкретные* примеры интегрируемых обратимых систем укладываются в эту схему.

С другой стороны, первые интегралы обратимых гамильтоновых систем можно разыскивать не только в виде аналитических функций. Например, можно рассматривать интегралы, мероморфные относительно импульсов. Применительно к гамильтоновым системам с гамильтонианом (1.3) естественно рассмотреть задачу о наличии рациональных первых интегралов

$$F = \frac{P_r}{Q_s}, \tag{1.4}$$

где P_r и Q_s — однородные по импульсам p_1 и p_2 многочлены степени r и s соответственно. Будем предполагать, что $r \geqslant 1$ и $s \geqslant 1$, а также что многочлены P и Q *несократимы* для почти всех значений q_1 и q_2. Без ограничения для общности можно считать $r \geqslant s$ (иначе в качестве интеграла следует взять Q/P).

На самом деле различные аспекты задачи о рациональных интегралах уравнений динамики уже рассматривались классиками. Например, при доказательстве теоремы об отсутствии новых алгебраических первых интегралов задачи трех гравитирующих тел Брунс сначала сводит вопрос к существованию рациональных интегралов. А затем доказывает, что если имеется рациональный первый интеграл уравнений движения трех тел, то тогда найдется интеграл в виде полинома от импульсов частиц (см., например, [1]). Наиболее трудная часть теоремы Брунса состоит в доказательстве отсутствия нетривиальных полиномиальных интегралов задачи трех тел. Однако, как заметил Пуанкаре, при переходе от рациональных интегралов к полиномиальным Брунс оставил ряд пробелов, восполнить которые оказалось «весьма деликатным делом» [6].

Современный анализ возможности сведения задачи о рациональных интегралах общих систем взаимодействующих частиц к задаче о полиномиальных интегралах содержится в работе Албуи [7].

Точки фазового пространства, где $Q = 0$ (или $P = 0$), будут сингулярными для рационального интеграла F (или $1/F$).

Предложение 1. *Если F — первый интеграл с несократимыми (почти всюду) многочленами P_r и Q_s $(r,\ s \geqslant 1)$, то множества $\{P = 0\}$ и $\{Q = 0\}$ инвариантны относительно фазового потока гамильтоновой системы с гамильтонианом* (1.3).

Действительно, поскольку $Q \not\equiv 0$, то условие $\dot{F} = 0$ эквивалентно равенству

$$\dot{P}Q = P\dot{Q}. \tag{1.5}$$

По предположению, многочлены P и Q не имеют общих полиномиальных множителей для почти всех значений q_1 и q_2. С другой стороны, $\dot{P}$ и $\dot{Q}$ — это, очевидно, однородные полиномы по импульсам степени $r+1$ и $s+1$ соответственно. Следовательно (по известной теореме об однозначности разложения многочленов на неприводимые множители), многочлены $\dot{P}$ и $\dot{Q}$ делятся нацело на P и Q соответственно при почти всех q. Таким образом, при этих значениях q многочлен $\dot{P}(\dot{Q})$ обращается в нуль всюду, где $P = 0$ $(Q = 0)$. По непрерывности это свойство имеет место при всех $q = (q_1, q_2)$. Но это, очевидно, означает инвариантность множеств сингулярности $\{P = 0\}$ и $\{Q = 0\}$. Что и требовалось.

Сделаем еще одно замечание. Имея рациональный интеграл (1.4), мы можем получить целую серию рациональных интегралов, последовательно умножая числитель (или знаменатель) дроби (1.4) на гамильтониан H. При этом никаких новых рациональных интегралов по сути мы не получаем, хотя эти «новые» интегралы остаются независимыми от интеграла энергии. В связи с этим обстоятельством полезно ввести *неприводимые* рациональные интегралы вида (1.4), числитель и знаменатель которых не делятся нацело на квадратичный полином H. Отметим еще, что однородный многочлен от p_1 и p_2 делится нацело на H тогда и только тогда, когда он обращается в нуль при подстановке $p_1 = 1$, $p_2 = i$ $(i^2 = -1)$. Следовательно, условие приводимости многочлена сводится к выполнению *двух* линейных соотношений на его коэффициенты.

2. Основная теорема

Итак, рассмотрим задачу о наличии рациональных по импульсам первых интегралов вида (1.4) для гамильтоновых систем с гамильтонианом (1.3). Пусть $q = (q_1, q_2)$ — точка на рассматриваемой поверхности, а U — некоторая малая окрестность точки $q = 0$.

Теорема. *Для любых целых $r \geqslant 1$ и $s \geqslant 1$ ($r \geqslant s$) найдется конформный множитель в виде вещественно-аналитической функции $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$, такой, что*

1. *гамильтонова система с гамильтонианом (1.3) допускает неприводимый рациональный первый интеграл вида (1.4) с аналитическими в U коэффициентами, независимый от интеграла H,*
2. *многочлены P_r и Q_s несократимы для почти всех значений $q \in U$,*
3. *гамильтонова система с гамильтонианом (1.3) не допускает рациональных интегралов вида*
$$P_{r'}/Q_{s'}, \quad r' + s' < r + s,$$
независимых от интеграла H.

В частности, эта гамильтонова система заведомо не допускает нетривиальных полиномиальных по импульсам интегралов, степень которых не превосходит $r+s-1$. По-видимому, при подходящем выборе аналитического конформного множителя λ мы получим систему, вообще не допускающую никаких полиномиальных интегралов, независимых от функции H.

В действительности гамильтоновы системы, удовлетворяющие перечисленным в теореме свойствам, образуют целые семейства, зависящие от $r + s + 2$ вещественно-аналитических функций одного переменного. Таким образом, «число» гамильтоновых систем с дополнительным рациональным интегралом определенной структуры возрастает с увеличением $r + s$.

Может показаться, что задача о рациональных по импульсам интегралах мало чем отличается от задачи о полиномиальных первых интегралах. Действительно, полагая отношение (1.4) равным произвольной константе f, получаем «полиномиальный по импульсам интеграл» $\Phi = P - fQ$ гамильтоновой системы. Однако этот интеграл частный ($\dot{\Phi} = 0$, если $\Phi = 0$), и к тому же он содержит произвольный вещественный параметр.

Конструктивное предъявление конформного множителя λ (в виде конечной формулы) с требуемыми свойствами представляет содержательную задачу. Ее решение нам неизвестно даже в простейшем случае, когда $r = s = 1$.

3. Схема доказательства

Укажем основные моменты доказательства теоремы в самом простом (но важном) случае, когда $r = s = 1$. Если гамильтонова система с гамильтонианом (1.3) допускает рациональный первый интеграл
$$F = \frac{a_1p_1 + b_1p_2}{a_2p_1 + b_2p_2}, \tag{3.1}$$
то коэффициенты a_j, b_j ($j = 1, 2$) и конформный множитель λ удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных первого порядка:
$$\begin{gathered}
\frac{\Delta}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} - b_2\frac{\partial a_2}{\partial q_2} + a_2\frac{\partial b_2}{\partial q_2} = 0,\\
\frac{\Delta}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} + b_1\frac{\partial a_1}{\partial q_1} - a_1\frac{\partial b_1}{\partial q_1} = 0,\\
\frac{\Delta}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} - b_1\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + a_1\frac{\partial b_1}{\partial q_2} - b_2\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + a_1\frac{\partial b_2}{\partial q_1} - b_1\frac{\partial a_2}{\partial q_1} + a_2\frac{\partial b_1}{\partial q_1} = 0,\\
\frac{\Delta}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} + b_1\frac{\partial a_2}{\partial q_2} - a_2\frac{\partial b_1}{\partial q_2} + b_2\frac{\partial a_1}{\partial q_2} - a_1\frac{\partial b_2}{\partial q_2} + b_2\frac{\partial a_1}{\partial q_2} - a_2\frac{\partial b_2}{\partial q_1} = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$
Здесь $\Lambda = \ln\lambda$ ($\lambda > 0$), $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Мы считаем, что $\Delta \neq 0$. В противном случае функция F вообще не зависит от импульсов.

Обратное тоже верно: если коэффициенты в (3.1) и конформный множитель удовлетворяют системе (3.2), то F — первый интеграл геодезического потока. Отметим также, что

$$\frac{\partial(H,F)}{\partial(p_1,p_2)} = -\frac{\Delta H}{(a_2p_1+b_2p_2)^2}.$$

Следовательно, этот якобиан отличен от нуля, если выполнены следующие естественные условия: $\Delta \neq 0$ и $H > 0$. Таким образом, если дробно-линейный интеграл (3.1) не сводится только к функции от q_1 и q_2, то функции H и F почти всюду независимы.

Система дифференциальных уравнений (3.2) незамкнута: мы имеем четыре уравнения относительно пяти функций a_1, b_1, a_2, b_2 и Λ (или λ). Однако не все они независимы, поскольку коэффициенты в (3.1) определены с точностью до множителя — ненулевой функции от q_1 и q_2. Эту неопределенность можно устранить разными способами. Например, можно положить $\Delta = 1$ или можно зафиксировать ненулевое значение одного из коэффициентов (например, положить $b_2 = 1$). В результате получаем замкнутую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций.

Положим $b_2 = 1$ и разрешим систему (3.2) относительно производных

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1},\quad \frac{\partial a_1}{\partial q_1},\quad \frac{\partial b_1}{\partial q_1}\quad \text{и}\quad \frac{\partial a_2}{\partial q_1}.$$

Это заведомо можно сделать при условии, что $\Delta \neq 0$ (а это условие мы предполагаем выполненным). В результате получаем систему уравнений Коши – Ковалевской (поскольку в правую часть входят неизвестные функции и только их первые производные по переменной q_2). Как известно, для однозначной разрешимости этой системы в классе аналитических функций достаточно задать Λ, a_1, b_1 и a_2 на прямой $q_1 = 0$ как произвольные аналитические функции одного вещественного переменного q_2. В результате получим семейство римановых метрик на плоскости (точнее, в некоторой малой окрестности нуля $q_1 = q_2 = 0$), которые зависят от четырех аналитических функций одного переменного и которые допускают первый интеграл (3.1) в виде отношения двух линейных по импульсам форм. В общем случае эти формы не пропорциональны друг другу. Чтобы этого добиться, достаточно предположить, что $\Delta = a_1 - a_2b_1 \neq 0$ при $q = 0$. Наконец, надо показать, что типичные метрики, получающиеся по теореме Коши – Ковалевской из системы (3.2), не допускают линейных по импульсам первых интегралов. Действительно, в этих случаях конформный множитель λ вместе с *двумя* коэффициентами линейного интеграла также удовлетворяет замкнутой системе трех дифференциальных уравнений Коши – Ковалевской, схожей с системой (3.2) [7]. Общее аналитическое решение такой системы зависит только от *трех* аналитических функций одного вещественного переменного, что никак не может совпадать с общим решением системы (3.2).

Доказательство теоремы в общем случае следует этой схеме, но только более громоздко в техническом отношении.

4. Заключительные замечания

1. Упомянем работы [8, 9], в которых также рассматривается задача о рациональных интегралах вида (3.1) геодезических потоков на римановых и псевдоримановых многообразиях (в общем случае многомерных). Автор записывает условия существования таких интегралов (уравнения (3.2) и их многомерные аналоги) в тензорном виде и ставит задачу их геометрической интерпретации в духе обобщений векторных полей Киллинга. Напомним, что поля Киллинга порождают однопараметрические группы симметрий соответствующих римановых метрик, что в свою очередь влечет наличие линейных по импульсам первых интегралов. Эта концепция естественным образом вкладывается в более общую теорию Э. Нётер.

На наш взгляд, естественным аналогом линейных полиномиальных интегралов являются рациональные интегралы (1.4), где $r = 2$, $s = 1$. Кстати сказать, согласно теореме из п. 2, в этом случае риманова метрика, вообще говоря, не допускает линейных и квадратичных первых интегралов.

2. Основная теорема п. 2 распространяется на многомерные римановы пространства, конформно эквивалентные евклидову пространству. Геодезические линии таких пространств находятся из гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \ldots + p_n^2\right)\lambda,$$

где λ — некоторая гладкая положительная функция от переменных $q_1, \ldots, q_n$. Для отыскания полиномиальных и более общих рациональных интегралов здесь также применим прием из п. 3, сводящий эту задачу к исследованию соответствующей системы дифференциальных уравнений в частных производных Коши – Ковалевской. Было бы интересным исследовать вопрос о существовании одновременно нескольких рациональных интегралов заранее заданной структуры. Этот вопрос упирается в исследование совместности нескольких систем уравнений Коши – Ковалевской.

3. Представляет интерес задача о рациональных по импульсам первых интегралов «натуральных» гамильтоновых систем. Простейшая из них описывает динамику частицы по евклидовой плоскости в потенциальном силовом поле. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + V(q_1, q_2). \tag{4.1}$$

Только теперь рациональные интегралы следует искать в более общей форме:

$$F = \frac{P_r + P_{r-1} + P_{r-2} + \ldots}{Q_s + Q_{s-1} + Q_{s-2} + \ldots}. \tag{4.2}$$

Равенство $\dot{F} = 0$ эквивалентно переопределенной системе дифференциальных соотношений для определения коэффициентов однородных многочленов P_j и Q_k ($j \leqslant r$, $k \leqslant s$) и потенциальной энергии V. Однако анализ этих условий представляет трудности уже для самого простого случая, когда $r = s = 1$.

Для обратимых систем с гамильтонианом (4.1) можно уточнить возможный вид рационального интеграла (4.2).

Пусть Φ_2 (и, соответственно, Φ_1) — совокупность слагаемых в числителе дроби (4.2), четной (или, соответственно, нечетной) степени по импульсам p_1 и p_2, а Ψ_2 (Ψ_1) — совокупность аналогичных слагаемых в знаменателе этой дроби.

Предложение 2. *Рациональная функция (4.2) — первый интеграл обратимой гамильтоновой системы тогда и только тогда, когда обе функции*

$$F_1 = \frac{\Phi_2\Psi_2 - \Phi_1\Psi_1}{\Psi_2^2 - \Psi_1^2} \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{\Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1}{\Psi_2^2 - \Psi_1^2}$$

являются первыми интегралами этой гамильтоновой системы. Если рациональная функция (4.2) функционально независима с гамильтонианом (4.1), то хотя бы одна из функций F_1 или F_2 также независима с функцией H.

Ясно, что сумма F_1 и F_2 равна F. Отсюда сразу же вытекает вторая часть заключения предложения 2. Рациональная функция F_1 — отношение двух многочленов, состоящих из слагаемых *четной* степени. Наоборот, числитель дроби F_2 состоит из слагаемых *нечетной* степени по импульсам.

Доказательство предложения 2 основано на следующем наблюдении: если многочлен по импульсам Φ состоит из четных (нечетных) слагаемых, то, наоборот, полная производная от Φ в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.1) состоит из нечетных (четных) слагаемых. Следовательно, условие $\dot{F} = 0$ равносильно *двум* соотношениям

$$\dot{\Phi}_2\Psi_2 + \dot{\Phi}_1\Psi_1 - \Phi_2\dot{\Psi}_2 - \Phi_1\dot{\Psi}_1 = 0, \quad \dot{\Phi}_2\Psi_1 + \dot{\Phi}_1\Psi_2 - \Phi_1\dot{\Psi}_2 - \Phi_2\dot{\Psi}_1 = 0.$$

С их помощью легко доказываются искомые равенства $\dot{F}_1 = \dot{F}_2 = 0$.

Список литературы

[1] Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies; with an introduction to the problem of three bodies. 3rd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 456 pp.

[2] Birkhoff G. D. Dynamical systems. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 9.) Providence, R.I.: AMS, 1966. 305 pp.

[3] Kozlov V. V. Integrable and nonintegrable Hamiltonian systems // Soviet Sci. Rev. Sect. C. Math. Phys. Rev., 1989, vol. 8, pp. 1–81.

[4] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1995. 432 с.

[5] Тен В. В. Локальные интегралы геодезических потоков // Regul. Chaotic Dyn., 1997, vol. 2, no. 2, pp. 87–89.

[6] Poincaré H. Sur le méthode de Bruns // C. R. Acad. Sci. Paris, 1896, vol. 123, pp. 1224–1228.

[7] Albouy A. Projective dynamics and first integrals. arXiv:1401.1509 (2006).

[8] Collinson C. D. A note on the integrability conditions for the existence of rational first integrals of the geodesic equations in a Riemannian space // Gen. Relativity Gravitation, 1986, vol. 18, no. 2, pp. 207–214.

[9] Collinson C. D., O'Donnell P. J. A class of empty spacetimes admitting a rational first integral of the geodesic equation // Gen. Relativity Gravitation, 1992, vol. 24, no. 4, pp. 451–455.

On rational integrals of geodesic flows

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

This paper is concerned with the problem of first integrals of the equations of geodesics on two-dimensional surfaces that are rational in the velocities (or momenta). The existence of nontrivial rational integrals with given values of the degrees of the numerator and the denominator is proved using the Cauchy – Kovalevskaya theorem.

MSC 2010: 34A34, 58E10
Keywords: conformal coordinates, rational integral, irreducible integrals, Cauchy – Kovalevskaya theorem

Received September 29, 2014, accepted October 17, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 4, pp. 439–445 (Russian)