Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 179–185.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 517.9
MSC 2010: 37K35, 53D22, 70H06

Разделение переменных для одного обобщения системы Чаплыгина на сфере

А. В. Цыганов

Найдены переменные разделения для интегрируемого возмущения системы Чаплыгина на сфере с потенциалом, зависящим от скоростей. Установлена связь между данной системой и системой с потенциалом четвертой степени, допускающей разделение переменных в сфероконической системе координат.

Ключевые слова: интегрируемые системы, разделение переменных, зависящий от скоростей потенциал

1. Введение

В работах Соколова [1, 2] рассмотрено интегрируемое возмущение системы Ковалевской с гамильтонианом

$$\widetilde{H} = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + c_1(x_1J_3 - x_3J_1) + c_2J_3 + c_3x_2. \tag{1.1}$$

Исходная функция Гамильтона для волчка Ковалевской получается при $c_{1,2} = 0$ [3].

Аналогичное возмущение системы Горячева – Чаплыгина

$$\widetilde{H} = J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + c_1(2x_1J_3 - x_3J_1) + c_2J_3 + c_3x_2 \tag{1.2}$$

рассмотрено в работах [4, 5]. Функция Гамильтона для системы Горячева – Чаплыгина на сфере получается при $c_{1,2} = 0$ [3].

В работе [6] С. А. Чаплыгин нашел родственную системе Ковалевской систему с гамильтонианом

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + c_3(x_1^2 - x_2^2). \tag{1.3}$$

Получено 25 ноября 2014 года
После доработки 23 декабря 2014 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 13-01-00061, и гранта СПбГУ 11.38.664.2013.

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

Известно, что к этой функции Гамильтона можно добавить гиростатическое слагаемое $c_2 J_3$ [3], а вот явного выражения для потенциала, зависящего от скоростей, в существующей литературе нам найти не удалось.

В данной работе мы рассмотрим интегрируемое возмущение гамильтониана Чаплыгина (1.3) вида

$$\widetilde{H} = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + c_1(x_2x_3J_1 + x_1x_3J_2 - 2x_1x_2J_3) + c_3(x_1^2 - x_2^2).$$

При этом мы не только добавим к исходному гамильтониану потенциал, зависящий от скоростей, аналогично случаю Ковалевской (1.1) и случаю Горячева – Чаплыгина (1.2), но и построим соответствующие переменные разделения и разделенные уравнения.

2. Интегрируемые системы на сфере

Если x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, в котором расположена двухмерная сфера $\mathbb{S}^2$, то сфероконические или эллиптические координаты на сфере u_1, u_2 определяются следующим стандартным образом:

$$\frac{(\lambda - u_1)(\lambda - u_2)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)} = \frac{x_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - a_3}, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где a_i — параметры, задающие область определения координат

$$a_1 < u_1 < a_2 < u_2 < a_3.$$

Сопряженные моменты $p_{u_{1,2}}$ являются значениями функции

$$h(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1x_1}{\lambda - a_1} + \frac{p_2x_2}{\lambda - a_2} + \frac{p_3x_3}{\lambda - a_3}\right) \tag{2.2}$$

при $\lambda = u_{1,2}$. Как обычно, на входящие в эти определения избыточные координаты налагаются связи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \qquad p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0,$$

определяющие вложение сферы и ее кокасательного расслоения в евклидово пространство и его кокасательное расслоение.

Наряду с этими координатами нам также будет удобно использовать компоненты J_k вектора углового момента

$$J = x \times p$$

и связи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \qquad x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3 = 0,$$

которые позволяют нам отождествить движение по сфере с движением при нулевой константе площадей для уравнения Эйлера – Пуассона или при нулевом значении импульсивного момента для уравнений Кирхгофа [3].

Уравнение Гамильтона – Якоби $H = \alpha_1$, определяемое гамильтонианом натурального вида

$$H = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + V(q),$$

допускает разделение переменных в эллиптических координатах на сфере, если его полный интеграл имеет вид

$$S(u_1, u_2; \alpha_1, \alpha_2) = S_1(u_1; \alpha_1, \alpha_2) + S_2(u_2; \alpha_1, \alpha_2).$$

В этом случае вторые уравнения Якоби

$$p_{u_i} = \frac{\partial S_i(u_i; \alpha_1, \alpha_2)}{\partial u_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

или *разделенные уравнения* можно переписать в виде

$$(u_i + a_1)(u_i + a_2)p_{u_i}^2 + U_i(u_i) = H_1 + \frac{H_2}{u_i - a_3}, \qquad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

где $H = H_1$ и H_2 — это два функционально независимых интеграла движения в инволюции.

Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим новую интегрируемую систему с интегралами движения

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1 &= \frac{1}{2}\Big((u_1 + a_1)(u_1 + a_2)p_{u_1}^2 + U_1(u_1)\Big) + \frac{1}{2}\Big((u_2 + a_1)(u_2 + a_2)p_{u_2}^2 + U_2(u_2)\Big),\\ \widetilde{H}_2 &= \frac{1}{2}\Big((u_1 + a_1)(u_1 + a_2)p_{u_1}^2 + U_1(u_1)\Big) - \frac{1}{2}\Big((u_2 + a_1)(u_2 + a_2)p_{u_2}^2 + U_2(u_2)\Big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Эти интегралы

$$\widetilde{H}_1 = H_1 + \frac{H_2}{2}\left(\frac{1}{u_1 - a_3} + \frac{1}{u_2 - a_3}\right), \qquad \widetilde{H}_2 = \frac{H_2}{2}\left(\frac{1}{u_1 - a_3} - \frac{1}{u_2 - a_3}\right)$$

можно рассматривать как аддитивное и мультипликативное возмущение исходных интегралов движения $H_{1,2}$, которое не имеет физического смысла. Однако после этого мы можем постараться найти такое каноническое преобразование

$$(u, p_u) \to (v, p_v),$$

сохраняющее исходные интегралы движения $H_{1,2}$, которое придаст новым гамильтонианам

$$\widetilde{H} = H + \frac{H_2}{2}\left(\frac{1}{v_1 - a_3} + \frac{1}{v_2 - a_3}\right), \qquad \widetilde{H}_2 = \frac{H_2}{2}\left(\frac{1}{v_1 - a_3} - \frac{1}{v_2 - a_3}\right) \tag{2.6}$$

физический смысл в исходных физических переменных (см. [7]).

2.1. Система Чаплыгина и ее обобщения

Если входящие в разделенные уравнения (2.4) потенциалы $U(u_1)$ и $U_2(u_2)$ являются одинаковыми частями ряда Лорана

$$U_{1,2}(u) = c_k u^k + \ldots + c_{-m}u^{-m},$$

то для таких систем мы можем построить 2×2 матрицы Лакса [8, 9], которые нам затем будет удобно использовать для построения преобразования Бэклунда [7].

В качестве примера мы возьмем матрицу Лакса для движения по геодезическим на сфере

$$L_0(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{x_kp_k}{\lambda-a_k} & \sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{x_k^2}{\lambda-a_k} \\ -\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{p_k^2}{\lambda-a_k} & -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{x_kp_k}{\lambda-a_k}\end{pmatrix}$$

и добавим к ней слагаемые, отвечающие полиному второй степени $U_{1,2}=c_1u^2+c_2u+c_3$,

$$\Delta L_1=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a\lambda-a(a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2)-b & 0\end{pmatrix}.$$

Кроме этого, мы добавим в матрицу Лакса сингулярные слагаемые, приводящие к появлению потенциала Росохатиуса [3]:

$$\Delta L_2=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\mathrm{i}b_k}{\lambda-a_k} & 0 \\ -\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{b_k^2}{x_k^2(\lambda-a_k)} & \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3}\dfrac{\mathrm{i}b_k}{\lambda-a_k}\end{pmatrix},\qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1}.$$

Итак, рассмотрим матрицу Лакса

$$L=L_0+\Delta L_1+\Delta L_2. \tag{2.7}$$

В уравнение, определяющее спектральную кривую данной матрицы,

$$4(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\mu^2+4\mathrm{i}\big(b_1(a_1-\lambda)+(a_2-\lambda)b_2\big)\mu-\lambda\big(a\lambda-a(a_1+a_2)-b\big)=H_1+\frac{H_2}{\lambda-a_3}, \tag{2.8}$$

входит функция Гамильтона

$$\begin{gathered}-H_1=J_1^2+J_2^2+J_3^2-a(a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2)^2+a(a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2+a_3^2x_3^2)-\\ -b(a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2)+\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k^2}{x_k^2}+b(a_1+a_2)+\sum_{i,j=1}^{3}b_ib_j.\end{gathered} \tag{2.9}$$

При $a=0$ мы получаем систему Неймана – Росохатиуса на сфере. При $a\neq 0$ мы добавляем к этой системе известный потенциал четвертой степени.

Согласно [7], мы можем без ограничения общности положить $b_3=0$ и рассмотреть преобразование подобия

$$\widehat{L}=VLV^{-1}$$

с матрицей V (2.10)

$$V=\begin{pmatrix} L_{12} & 0 \\ 4\big(L_{11}-\widehat{L}_{11}\big) & 4L_{12}\end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где L_{ij} являются элементами исходной матрицы Лакса (2.7) и

$$\widehat{L}_{11} = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{x_1^2(a_1-a_3)\sqrt{a} + (x_3p_1 - x_1p_3)x_1/x_3 + \mathrm{i}b_1}{2(\lambda - a_1)} + \\ + \frac{x_2^2(a_2-a_3)\sqrt{a} + (x_3p_2 - x_2p_3)x_2/x_3 + \mathrm{i}b_2}{2(\lambda - a_2)},$$

что позволяет получить одновременно два семейства переменных разделения с помощью двух внедиагональных элементов матрицы $\widehat{L}$.

Первое семейство — это эллиптические координаты на сфере $u_{1,2}$, которые являются нулями верхнего внедиагонального элемента

$$\widehat{L}_{12} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{x_k^2}{\lambda - a_k} = \frac{(\lambda - u_1)(\lambda - u_2)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)}.$$

Второе семейство состоит из координат $v_{1,2}$, являющихся нулями второго внедиагонального элемента

$$\widehat{L}_{21} = \frac{2\sqrt{a}p_3}{x_3} - 2a\big(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3(x_1^2 + x_2^2)\big) - b - \frac{\delta_1}{\lambda - a_1} - \frac{\delta_2}{\lambda - a_2},$$

где

$$\delta_i = a(a_i - a_3)^2x_i^2 + \frac{2\sqrt{a}x_i(x_3p_i - x_ip_3)(a_i - a_3)}{x_3} + \frac{(x_3p_i - x_ip_3)^2}{x_3^2} - \frac{b_i^2}{x_i^2}, \qquad i = 1, 2.$$

Сопряженные моменты и для координат $u_{1,2}$, и для координат $v_{1,2}$ являются значениями диагонального элемента матрицы Лакса

$$p_{u_i} = \widehat{L}_{11}(\lambda = u_i), \qquad p_{v_i} = \widehat{L}_{11}(\lambda = v_i), \qquad i = 1, 2.$$

В силу этого переменные (u, p_u) и (v, p_v) удовлетворяют разделенным уравнениям, получаемым из уравнения для спектральной кривой матрицы Лакса (2.8)

$$4(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)\mu^2 + 4\mathrm{i}\big(b_1(a_1 - \lambda) + (a_2 - \lambda)b_2\big)\mu - \lambda\big(a\lambda - a(a_1 + a_2) - b\big) = H_1 + \frac{H_2}{\lambda - a_3},$$

где $\lambda = u_{1,2}$, $v_{1,2}$ и $\mu = p_{u_{1,2}}$, $p_{v_{1,2}}$ соответственно. Решая эти разделенные уравнения относительно $H_{1,2}$, мы получим одинаковые выражения для интегралов движения в u- и v-переменных. Это означает, что каноническое преобразование

$$(u_1, u_2, p_{u_1}, p_{u_2}) \to (v_1, v_2, p_{v_1}, p_{v_2})$$

сохраняет и скобку Пуассона, и алгебраическую форму интегралов движения, то есть является автопреобразованием Бэклунда [7].

С другой стороны, складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим новую интегрируемую систему с интегралами движения $\widetilde{H}_{1,2}$ (2.5). Действительно, подставив переменные $v_{1,2}$ в определение (2.6), мы получим следующий интегрируемый гамильтониан с потенциалом, зависящим от скоростей:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_1 &= J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\sqrt{a}x_3\left((a_1-a_3)x_2J_1 - (a_2-a_3)x_1J_2\right) +\\ &+ a(a_1-a_3)(a_1-2a_2+a_3)x_1^4 - a(a_1^2 - 2a_1a_3 + a_2^2 - 2a_2a_3 + 2a_3^2)x_1^2x_2^2 -\\ &- a(a_2-a_3)(2a_1-a_2-a_3)x_2^4 - a(a_1-a_3)(a_1-2a_2+a_3)x_1^2 +\\ &+ a(a_2-a_3)(2a_1-a_2-a_3)x_2^2 + (a_1-a_2)b(x_1^2-x_2^2-1) - 4b_1b_2 - 2aa_1a_2 +\\ &+ \frac{(2x_2^2+x_3^2)b_1^2}{x_1^2} + \frac{(2x_1^2+x_3^3)b_2^2}{x_2^2}.\end{aligned}$$

Отбрасывая постоянные слагаемые и используя сохраняющие скобку Пуассона канонические преобразования

$$J_1 = J_1 + \sqrt{a}(a_2-a_3)x_2x_3, \quad J_2 = J_2 - \sqrt{a}(a_1-a_3)x_1x_3, \quad J_3 = J_3 + \sqrt{a}(a_1-a_2)x_1x_2$$

и

$$x_k = \frac{x_k}{\sqrt{a_1-a_2}}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

можно значительно упростить выражение для функции Гамильтона:

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_1 &= J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2\sqrt{a}(x_2x_3J_1 + x_1x_3J_2 - 2x_1x_2J_1) + b(x_1^2 - x_2^2) +\\ &+ \frac{b_1^2(2x_2^2+x_3^2)}{x_1^2} + \frac{b_2^2(2x_1^2+x_3^2)}{x_2^2}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Второй интеграл движения

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_2^2 &= \left(J_1^2 - J_2^2 - 2\sqrt{a}x_3(x_2J_1 + x_1J_2) + bx_3^2\right)^2 + 4J_1^2J_2^2 + 2x_3^2\left(\frac{b_1^2}{x_1^2} + \frac{b_2^2}{x_2^2}\right)(J_1^2 + J_2^2) +\\ &+ 4\sqrt{a}x_3^3\left(\frac{b_1^2}{x_1^2} - \frac{b_2^2}{x_2^2}\right)(x_2J_1 - x_1J_2) - 2bx_3^4\left(\frac{b_1^2}{x_1^2} - \frac{b_2^2}{x_2^2}\right) + x_3^4\left(\frac{b_1^2}{x_1^2} + \frac{b_2^2}{x_2^2}\right)^2\end{aligned}$$

в этом случае также является полиномом четвертой степени по моментам, как и для системы Чаплыгина.

Полученные интегралы движения $\widetilde{H}_{1,2} = \alpha_{1,2}$ удовлетворяют разделенным уравнениям

$$\Phi_\pm(\lambda,\mu) = 4(a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\mu^2 + 4\mathrm{i}\big(b_1(a_1-\lambda) + (a_2-\lambda)b_2\big)\mu - \lambda\big(a\lambda - a(a_1+a_2) - b\big) + \alpha_1 \pm \alpha_2 = 0$$

при $\lambda = v_{1,2}$ и $\mu = p_{u_{1,2}}$. Эти разделенные уравнения очевидным образом получаются из определения интегралов движения $\widetilde{H}_{1,2}$ (2.5) и выражения для спектральной кривой матрицы Лакса (2.8).

Перемножая эти уравнения $\Phi_\pm$ и добавляя к ним два дополнительных слагаемых

$$\widetilde{\Phi}(\lambda,\mu) = \Phi_+\Phi_- - 4b_4\lambda - 16b_5(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\mu + 8\mathrm{i}b_5(b_1(\lambda-a_2) + b_2(\lambda-a_1)) = 0,$$

мы получим новые разделенные уравнения при $\lambda = v_{1,2}$ и $\mu = p_{v_{1,2}}$. Решая эти уравнения относительно $\alpha_{1,2}$, мы получим еще одно интегрируемое обобщение гамильтониана Чаплыгина

$$\widehat{H}_1 = \widetilde{H}_1 + \frac{b_4}{x_3^2} + b_5^2\left(\frac{1}{x_3^6} - \frac{1}{x_3^4}\right),$$

для которого переменные $v_{1,2}$ являются переменными разделения.

Конечно, все эти интегралы движения можно найти, используя и другие методы, например метод прямого поиска [10]. Предлагаемый нами метод позволяет получить и интегралы движения, и переменные разделения, и разделенные уравнения, и квадратуры одновременно.

Кроме этого, мы устанавливаем некоторое отношение между парой совершенно различных с виду систем. В нашем случае это система на сфере с потенциалом четвертой степени и обобщенная система Чаплыгина с потенциалом, зависящим от скоростей. Обе эти системы допускают одновременное аддитивное разделение переменных в уравнениях Гамильтона–Якоби с помощью v-переменных, которые являются образами сфероконических координат на сфере после автопреобразования Бэклунда.

Список литературы

[1] Соколов В. В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // ТМФ, 2001, т. 129, № 1, с. 31–37.

[2] Sokolov V. V. Generalized Kowalevski top: New integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // The Kowalevski property: Proceedings of the Kowalevski Workshop on Mathematical Methods of Regular Dynamics (MMRD), dedicated to the 150th anniversary of Sophie Kowalevski's birth, held at the University of Leeds (Leeds, April 12–15, 2000) / V. B. Kuznetsov (Ed.). (CRM Proc. Lecture Notes, vol. 32.) Providence, R.I.: AMS, 2002. P. 307–313.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[4] Соколов В. В., Цыганов А. В. Коммутативные пуассоновы подалгебры для скобок Склянина и деформации известных интегрируемых моделей // ТМФ, 2002, т. 133, № 3, с. 485–500.

[5] Соколов В. В., Цыганов А. В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина // ТМФ, 2002, т. 131, № 1, с. 118–125.

[6] Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Тр. отд. физ. наук, 1903, т. 11, № 2, с. 7–10.

[7] Tsiganov A. V. Simultaneous separation for the Neumann and Chaplygin systems // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 1, pp. 74–93.

[8] Tsiganov A. V. The Stäckel systems and algebraic curves // J. Math. Phys., 1999, vol. 40, no. 1, pp. 279–298.

[9] Цыганов А. В. Цепочки Тоды в методе Якоби // ТМФ, 2004, т. 139, № 2, с. 225–244.

[10] Valent G. On a class of integrable systems with a quartic first integral // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 4, pp. 394–424.

Separation of variables for some generalization of the Chaplygin system on a sphere

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

We show how to to get variables of separation for the Chaplygin system on the sphere with velocity dependent potential using relations of this system with other integrable system separable in sphero-conical coordinates on the sphere.

MSC 2010: 37K35, 53D22, 70H06
Keywords: integrable systems, separation of variables, velocity dependent potentials

Received November 25, 2014, accepted December 23, 2014
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 179–185 (Russian)