



УДК: 521.1, 521.2, 521.3
MSC 2010: 70F07, 34D20

Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке

В. О. Калас, П. С. Красильников

Исследуется устойчивость тривиального равновесия в задаче Ситникова с учетом нелинейных членов в уравнениях движения. Для гамильтоновых уравнений задачи построено, с точностью до членов третьего порядка малости включительно, отображение фазового пространства на себя в момент времени $t = 2\pi$; на основе метода точечных отображений сделаны выводы об устойчивости равновесия. Показано, что всюду в области значений эксцентриситета e из интервала $[0, 1)$ имеет место устойчивость по Ляпунову, если исключить из рассмотрения дискретную последовательность значений $\{e_j\}$, для которых след матрицы монодромии равен ± 2 .

Исследованы первое и второе значения эксцентриситета из указанной последовательности. Равновесие устойчиво для первого значения $e = e_1$. Второе значение эксцентриситета $e = e_2$ отвечает вырождению теорем устойчивости, поэтому требует привлечения членов порядка выше третьего. Оставшиеся значения дискретной последовательности значений эксцентриситета в работе не рассматривались.

Ключевые слова: задача Ситникова, устойчивость, точечные отображения

Получено 11 октября 2014 года
После доработки 26 декабря 2014 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте.

Калас Вячеслав Олегович
kalasv@yandex.ru
Красильников Павел Сергеевич
krasil06@rambler.ru
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4



Постановка задачи. Построение точечного отображения \widehat{T}

Рассматривается задача об устойчивости тривиального равновесия пассивно гравитирующей точки, находящейся в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы. Предполагается, что точка массы m движется вдоль оси Oz , проходящей через центр масс притягивающих тел перпендикулярно плоскости их движения. Считаем, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь. Исследуем случай, когда относительная траектория движения основных тел — кеплеровский эллипс с эксцентриситетом e .

Уравнения движения пассивно гравитирующей точки вдоль оси Oz известны [1]:

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0, \quad 2r = a(1 - e \cos E). \quad (1)$$

Здесь r — половина расстояния между телами m_1, m_2 , E — эксцентрическая аномалия, e — эксцентриситет орбиты, a — ее большая полуось. Единицы измерения выбраны таким образом, что $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$, при этом период T обращения основных тел по орбите равен 2π .

Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (2)$$

где τ — один из кеплеровских элементов эллиптической орбиты, представляющий собой время прохождения через перигеум, $n = 2\pi/T$ — среднее движение основных тел. Без ограничения общности будем считать, что $\tau = 0$, при этом $n = 1$ в силу выбора единиц измерения.

Устойчивость равновесия в первом (линейном) приближении исследована в работе [2]. Показано, что равновесие $z = \dot{z} = 0$ устойчиво для почти всех значений e , исключая дискретное множество нулей уравнения

$$|b(e)| = 1, \quad (3)$$

отвечающих случаю кратных мультипликаторов. Здесь $b(e)$ — половина следа матрицы монодромии линеаризованных уравнений движения. Корни уравнения (3) образуют последовательность значений $\{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, такую, что для каждого e_j равновесие неустойчиво в линейном приближении (утверждение доказано для первых девяти членов последовательности $\{e_j\}$, имеющих непростые элементарные делители).

Первые девять членов корней уравнения (3) с точностью 10^{-6} приведены в таблице 1.

Таблица 1

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
0.544469	0.855863	0.944770	0.977522	0.990604	0.996022	0.998305	0.999276	0.999690

Цель статьи — исследовать устойчивость тривиального равновесия в нелинейном приближении при любых $e \in [0, 1)$. Отметим, что случай малых e исследован. В работе [3] показано отсутствие резонансов второго, третьего и четвертого порядков, доказана устойчивость равновесия по Ляпунову.



Уравнения движения (1) представляют собой периодическую систему Гамильтона с одной степенью свободы:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (4)$$

Здесь

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{(q^2 + r^2)^{1/2}}, \quad 2r = a(1 - e \cos E), \quad q = z, \quad p = \dot{z}.$$

Задача об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем изучена довольно подробно. Наиболее распространенный метод анализа — метод нормальных форм. Однако получение нормальной формы для неавтономной функции Гамильтона является сложной задачей. Поэтому воспользуемся методом точечных отображений, приводящим задачу об устойчивости равновесия к эквивалентной задаче об устойчивости неподвижной точки отображения \hat{T} , сохраняющего площадь и представляющего собой отображение фазового пространства уравнений (1) на себя для момента времени $t = 2\pi$. В работе [4] получен явный вид отображения \hat{T} : $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ (q_0, p_0 — начальные значения величин q, p) с точностью до членов третьего порядка малости включительно по фазовым переменным. Коэффициенты форм определяются путем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Запишем гамильтониан системы (4), раскладывая его в ряд по q, p и отбрасывая аддитивное слагаемое, не зависящее от p, q :

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2r^3} q^2 - \frac{3}{8r^5} q^4 + \dots \quad (5)$$

Следуя алгоритму [4], уничтожим квадратичную часть гамильтониана. С этой целью введем каноническую замену переменных $p, q \rightarrow \xi, \eta$ вида

$$q = x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta, \quad p = x_{21}(t)\xi + x_{22}(t)\eta, \quad \xi(0) = \xi_0 = q_0, \quad \eta(0) = \eta_0 = p_0, \quad (6)$$

где $x_{ij}(t)$ — элементы нормальной фундаментальной матрицы решений уравнений в вариациях Пуанкаре с функцией Гамильтона

$$H_2 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2r^3} q^2.$$

Тогда преобразованный гамильтониан $G(\xi, \eta, t)$ примет вид

$$G = G_3(\xi, \eta, t) + G_4(\xi, \eta, t) + \dots, \quad (7)$$

где

$$G_3 = 0, \quad G_4 = -\frac{3}{8r^5} (x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta)^4. \quad (8)$$

Замена переменных (6) приводит задачу о построении отображения \hat{T} к нахождению отображения $\xi_0, \eta_0 \rightarrow \xi_1, \eta_1$ ($\xi_1 = \xi(2\pi), \eta_1 = \eta(2\pi)$)

$$\xi_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_0}, \quad \eta_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}$$

за период изменения t от 0 до 2π . Производящую функцию Ψ такого преобразования можно представить рядом

$$\Psi = \xi_1 \eta_0 + \Phi_3(\xi_1, \eta_0, 2\pi) + \Phi_4(\xi_1, \eta_0, 2\pi) + \dots,$$

где $\Phi_k(\xi, \eta_0, t)$ — однородные формы k -го порядка, такие, что формальный ряд

$$\begin{aligned}\Phi &= \xi\eta_0 + \Phi_3(\xi, \eta_0, t) + \Phi_4(\xi, \eta_0, t) + \dots, \\ \Phi_k(\xi, \eta_0, 0) &= 0 \quad (k = 3, 4, \dots)\end{aligned}$$

является полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + G\left(\xi, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, t\right) = 0. \quad (9)$$

В силу (9), формы $\Phi_k(\xi, \eta_0, t)$ находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_3(\xi, \eta_0, t)}{\partial t} &= -G_3(\xi, \eta_0, t), \\ \frac{\partial \Phi_4(\xi, \eta_0, t)}{\partial t} &= -G_4(\xi, \eta_0, t) - \frac{\partial G_3(\xi, \eta_0, t)}{\partial \eta_0} \frac{\partial \Phi_3(\xi, \eta_0, t)}{\partial \xi}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая начальные условия $\Phi_k(\xi, \eta_0, 0) = 0$, равенства (8), (10), однородные формы Φ_3, Φ_4 представим в виде

$$\Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = \lambda_1(t)\xi^4 + \lambda_2(t)\xi^3\eta_0 + \lambda_3(t)\xi^2\eta_0^2 + \lambda_4(t)\xi\eta_0^3 + \lambda_5(t)\eta_0^4, \quad \lambda_k(0) = 0.$$

Из второго равенства системы (10) следует

$$\dot{\lambda}_1\xi^4 + \dot{\lambda}_2\xi^3\eta_0 + \dot{\lambda}_3\xi^2\eta_0^2 + \dot{\lambda}_4\xi\eta_0^3 + \dot{\lambda}_5\eta_0^4 = \frac{3}{8r^5}(x_{11}(t)\xi + x_{12}(t)\eta_0)^4. \quad (11)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ξ, η_0 в левой и правой частях уравнения (11) и интегрируя полученные равенства, будем иметь:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= \frac{3}{8} \int_0^t \frac{x_{11}^4(t)}{r(t)^5} dt, \quad \lambda_2(t) = \frac{3}{2} \int_0^t \frac{x_{11}^3(t)x_{12}(t)}{r(t)^5} dt, \quad \lambda_3(t) = \frac{9}{4} \int_0^t \frac{x_{11}^2(t)x_{12}^2(t)}{r(t)^5} dt, \\ \lambda_4(t) &= \frac{3}{2} \int_0^t \frac{x_{11}(t)x_{12}^3(t)}{r(t)^5} dt, \quad \lambda_5(t) = \frac{3}{8} \int_0^t \frac{x_{12}^4(t)}{r(t)^5} dt.\end{aligned} \quad (12)$$

Равенства (12) необходимо дополнить уравнениями в вариациях, уравнением (2) и провести их интегрирование от $t = 0$ до $t = 2\pi$ для разных значений параметров e , учитывая, что

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0.$$

Отображение \hat{T} выглядит следующим образом [4]:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} &= X(2\pi) \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0 \partial p_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + O_4 \\ p_0 + \frac{\partial S_3}{\partial q_0} - \frac{\partial^2 S_3}{\partial q_0^2} \frac{\partial S_3}{\partial p_0} + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + O_4 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$S_3 = \Phi_3(q_0, p_0, 2\pi) \equiv 0, \quad S_4 = \Phi_4(q_0, p_0, 2\pi),$$

$O(4)$ — совокупность членов, порядок которых выше третьего.



Исследование устойчивости в нелинейной постановке

Запишем линеаризованное отображение \widehat{T} :

$$\begin{aligned} q_1 &= y_{11}q_0 + y_{12}p_0, & p_1 &= y_{21}q_0 + y_{22}p_0, \\ y_{ij} &= x_{ij}(2\pi). \end{aligned} \quad (14)$$

Собственные значения уравнений в вариациях Пуанкаре (мультипликаторы) являются корнями уравнения

$$\rho^2 - 2b\rho + 1 = 0 \quad (2b = y_{11} + y_{22}). \quad (15)$$

На рисунке 1 приведен график зависимости $b(e)$. Из вида графика следует, что $|b(e)| < 1$ всюду, за исключением дискретного набора значений $\{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, такого, что $b(e_j) = \pm 1$.

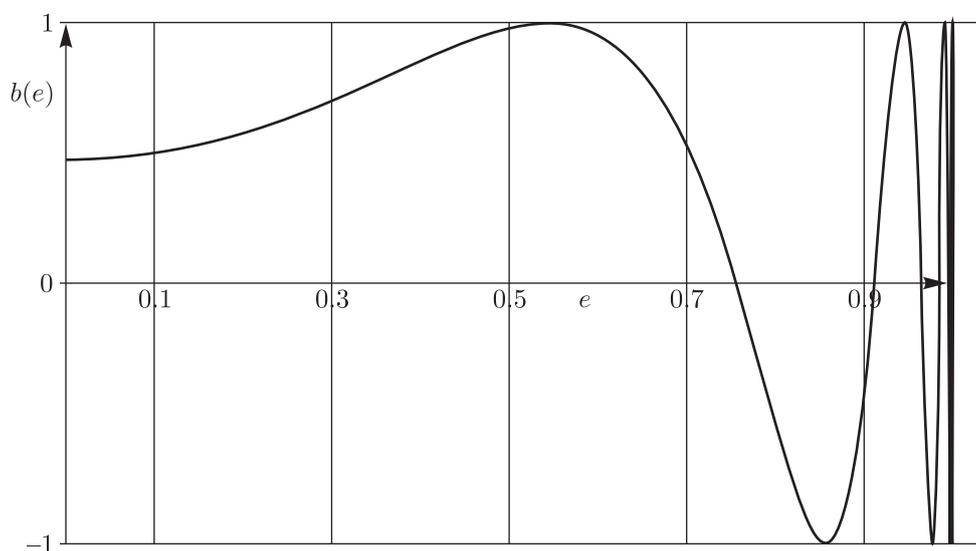


Рис. 1

Условия устойчивости и неустойчивости системы при $|b| \leq 1$ получены в работах [4, 5] с дополнениями в [6] (в гиперболическом случае $|b| > 1$ положение равновесия неустойчиво). Приведем краткое их описание.

С помощью линейной замены переменных

$$q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P \quad (d = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} \neq 0) \quad (16)$$

отображение (14) приводим к вещественной нормальной форме. Тогда преобразование $Q_0, P_0 \rightarrow Q_1, P_1$ предстанет в виде

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0 \partial P_0} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + O_4 \\ P_0 + \frac{\partial F_3}{\partial Q_0} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_0^2} \frac{\partial F_3}{\partial P_0} + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + O_4 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} F_3 &= d^{-1} \cdot S_3 (n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0), \\ F_4 &= d^{-1} \cdot S_4 (n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) + \Delta, \\ \Delta &= \frac{1}{2} \left[n_{11}n_{22} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right)^2 - 2n_{12}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial Q_0} \right) \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right) + n_{11}n_{21} \left(\frac{\partial F_3}{\partial P_0} \right)^2 \right], \\ F_k &= \sum_{\nu+\mu=k} f_{\nu\mu} Q_0^\nu P_0^\mu \quad (k = 3, 4). \end{aligned}$$

Рассмотрим эллиптический случай, когда $|b(e)| < 1$. Тогда мультипликаторы ρ_1, ρ_2 являются комплексно-сопряженными величинами с модулями, равными единице:

$$\rho_1 = \exp(i2\pi\lambda), \quad \rho_2 = \exp(-i2\pi\lambda), \quad \cos(2\pi\lambda) = b.$$

Нормальная форма линейного отображения (14) задает поворот на угол $2\pi\sigma$, где

$$\sigma = \delta\lambda, \quad \delta = \text{sign}(y_{12} \sin(2\pi\lambda)),$$

при этом коэффициенты n_{ij} в нормализующем преобразовании (16) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} n_{11} &= -\delta\chi y_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = \delta\chi[y_{11} - \cos(2\pi\lambda)], \quad n_{22} = -\chi \sin(2\pi\lambda), \\ \chi &= |y_{12} \sin(2\pi\lambda)|^{-1/2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{30} - f_{12}, \quad a_2 = f_{12} + 3f_{30}, \quad a_3 = f_{22} - f_{40} - f_{04}, \\ b_1 &= f_{21} - f_{03}, \quad b_2 = f_{21} + 3f_{03}, \quad b_3 = f_{13} - f_{31}, \\ k &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) + 6(a_1b_2 - a_2b_1) - 8a_2b_2 + 9 \text{ctg}(3\pi\sigma)(a_1^2 + b_1^2) + 3 \text{ctg}(\pi\sigma)(a_2^2 + b_2^2), \\ k_0 &= 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}) - 8a_2b_2 + \sqrt{3}(a_2^2 + b_2^2), \\ k_1 &= 2[4a_3 + 9a_1b_1 - a_2b_2 + 3 \text{ctg}(\pi\sigma)(a_1a_2 - b_1b_2)], \\ k_2 &= 8b_3 - 9(a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2) + 6 \text{ctg}(\pi\sigma)(a_1b_2 + a_2b_1). \end{aligned}$$

Следующие три теоремы полностью решают задачу устойчивости по формам третьего порядка малости в отображении \widehat{T} , исключая вырожденные случаи, при которых нарушаются условия теорем. Исследование устойчивости в вырожденных случаях следует проводить по формам более высокого порядка малости.

Теорема 1 ([4–6]). *Предположим, что $|b| < 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- I. *Если $b \neq -1/2$, $b \neq 0$ (нерезонансный случай), то положение равновесия устойчиво при $k \neq 0$.*
- II. *Если $b = -1/2$ (резонанс третьего порядка), то равновесие неустойчиво при $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Если $a_1^2 + b_1^2 = 0$, но при этом $k_0 \neq 0$, то имеет место устойчивость.*
- III. *Если $b = 0$ (резонанс четвертого порядка), то положение равновесия устойчиво при $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ и неустойчиво при $|k| < \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.*



Заметим, что условия теоремы 1 исключают из рассмотрения значения e_j , входящие в таблицу 1. Вычисления проводились на интервале $e \in [0, 1)$. Показано, что в нерезонансном случае $|b(e)| < 1$, $b \neq -1/2$, $b \neq 0$ коэффициент $k(e)$ отличен от нуля всюду (см. рис. 2). Поэтому положение тривиального равновесия устойчиво по Ляпунову.

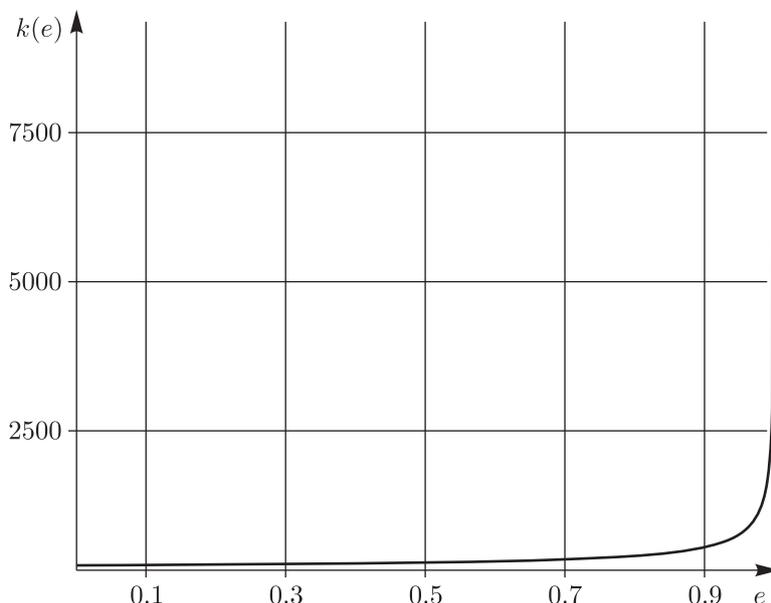


Рис. 2

При резонансе третьего порядка ($b(e) = -1/2$) имеем $a_1^2(e) + b_1^2(e) = 0$ при любых e , поскольку $S_3 \equiv 0$. Коэффициент $k_0(e)$ тождественно равен $k(e)$, поэтому $k_0(e) \neq 0$. Отсюда следует устойчивость тривиального равновесия.

Наконец, $|k| > \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ на всем интервале $e \in [0, 1)$, в частности, неравенство сохраняет силу и при $b(e) = 0$. Следовательно, на основе пункта III теоремы 1, равновесие устойчиво при резонансе четвертого порядка ($b(e) = 0$).

Таким образом, теорема 1 гарантирует устойчивость по Ляпунову тривиального равновесия для всех значений эксцентриситета e из интервала $e \in [0, 1)$, если исключить из рассмотрения корни $\{e_j\}$ уравнения (3).

Рассмотрим теперь случай кратных мультипликаторов: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (резонанс первого порядка, $b(e) = 1$ при $e = e_1, e_3, e_5, e_7, e_9$) и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ (резонанс второго порядка, $b(e) = -1$, когда $e = e_2, e_4, e_6, e_8$).

Отметим, что отображение (14) будет тождественным, если $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Если $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$, то коэффициенты линейного преобразования (16) вычисляются в соответствии с таблицей 2 [4].

Таблица 2

$y_{12} \neq 0, y_{21} = 0$	$n_{11} = \sqrt{ y_{12} }, n_{12} = n_{21} = 0, n_{22} = \sqrt{ y_{12} }/y_{12}$
$y_{12} = 0, y_{21} \neq 0$	$n_{11} = 0, n_{12} = \sqrt{ y_{21} }/y_{21}, n_{21} = \sqrt{ y_{21} }, n_{22} = 0$
$y_{12} \neq 0, y_{21} \neq 0$	$n_{11} = y_{12}, n_{12} = 0, n_{21} = \text{sign}(b) - y_{11}, n_{22} = 1$

Теорема 2 ([4, 6]). Предположим, что $b = 1$.

- I. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Тогда если $S_3 \neq 0$, то положение равновесия $p = q = 0$ исходной системы неустойчиво. Если $S_3 \equiv 0$, а уравнение $\phi(x) \equiv S_4(\sin(x), \cos(x)) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво.
- II. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$. Если $f_{30} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 < 0$, то имеет место устойчивость. В случае $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 > 0$ равновесие неустойчиво.

Сформулируем аналогичную теорему для случая $b = -1$. Для этого введем дополнительные обозначения. Пусть

$$R_4(q_0, p_0) = 2S_4 - \frac{\partial S_3}{\partial q_0} \frac{\partial S_3}{\partial p_0},$$

$$g = -8f_{40} + 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2.$$

Теорема 3 ([4, 6]). Предположим, что $b = -1$.

- I. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 = 0$. Если уравнение $\psi(x) \equiv R_4(\sin x, \cos x) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво.
- II. Пусть $y_{12}^2 + y_{21}^2 \neq 0$. Если $g > 0$, то положение равновесия неустойчиво, если $g < 0$, то устойчиво.

Исследуем на устойчивость только две точки e_1, e_2 , отвечающие случаю кратных мультипликаторов: $\rho_1 = \rho_2 = 1$ при $e = e_1$ и $\rho_1 = \rho_2 = -1$ при $e = e_2$. Анализ остальных точек $e = e_j$ ($j = 3, 4, \dots$) требует регуляризации уравнений движения в окрестности $e = 1$ и большой точности вычисления, поэтому представляет собой отдельную задачу.

Для повышения надежности вычислений необходимо повысить точность расчетов, удерживая большое число значащих цифр в представлении исследуемых точек. Однако проводить вычисление корней уравнения $|b(e)| = 1$ затруднительно в силу их вырожденности:

$$\left. \frac{db(e)}{de} \right|_{e=e_j} = 0. \quad (18)$$

Поэтому величины $\{e_j\}$ будем рассматривать как корни уравнения (18). С этой целью положим

$$z_{11}(t, e) = \frac{dx_{11}(t, e)}{de}, \quad z_{12}(t, e) = \frac{dx_{12}(t, e)}{de},$$

$$z_{21}(t, e) = \frac{dx_{21}(t, e)}{de}, \quad z_{22}(t, e) = \frac{dx_{22}(t, e)}{de},$$

рассматривая $z_{ij}(t, e)$ как новые функции времени, такие, что

$$\frac{db(e)}{de} = 0.5(z_{11}(2\pi, e) + z_{22}(2\pi, e)).$$

Дифференциальные уравнения относительно $x_{ij}(t, e)$, $z_{ij}(t, e)$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{21}, & \dot{x}_{21} = -\frac{x_{11}}{r^3(t)}, \\ \dot{x}_{12} = x_{22}, & \dot{x}_{22} = -\frac{x_{12}}{r^3(t)}, \\ \dot{z}_{11} = z_{21}, & \dot{z}_{21} = -\frac{z_{11}}{r^3(t)} - \frac{24 \cos E}{(1 - e \cos E)^4} x_{11}, \\ \dot{z}_{12} = z_{22}, & \dot{z}_{22} = -\frac{z_{12}}{r^3(t)} - \frac{24 \cos E}{(1 - e \cos E)^4} x_{12}, \\ \dot{E} = \frac{1}{1 - e \cos E}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{11}(0, e) = 1, & \quad x_{12}(0, e) = 0, \quad x_{21}(0, e) = 0, \quad x_{22}(0, e) = 1, \\ z_{11}(0, e) = z_{12}(0, e) = z_{21}(0, e) = z_{22}(0, e) = 0. \end{aligned}$$

Начальные значения по z_{ij} , то есть $z_{ij}(0, e) = \frac{\partial x_{ij}(0, e)}{\partial e}$, принимают нулевые значения по причине независимости начальных данных по $x_{ij}(t, e)$ от эксцентриситета.

Расчеты показывают, что корни уравнения

$$0.5(z_{11}(2\pi, e) + z_{22}(2\pi, e)) = 0 \quad (19)$$

простые; первые два корня, если удерживать 14 значащих цифр, имеют вид

$$e_1 = 0.54446890395124, \quad e_2 = 0.855862554109814.$$

Они удовлетворяют уравнению (19) с точностью $10E-11$ и, соответственно, с точностью $10E-8$ — уравнениям $b(e) = 1$, $b(e) = -1$.

Вычисления показывают, что $y_{12}(e_1) = y_{21}(e_1) = 0$, при этом функция $\varphi(x)$ из теоремы 2 удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & 377.762846455813(\sin x)^4 + 3.89313385769305 \cdot 10^{-8}(\sin x)^3 \cos(x) + \\ & + 8.46955261944630(\sin x)^2(\cos x)^2 + 3.34345010652353 \cdot 10^{-10} \sin x(\cos x)^3 + \\ & + 0.047472457175316(\cos x)^4 > 0, \quad x \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Поэтому, на основании теоремы 2, тривиальное равновесие устойчиво по Ляпунову при $e = e_1$.

Рассмотрим второй корень $e = e_2$ уравнения (19). Для него имеем

$$y_{21}(e_2) = -0.000879508 \neq 0.$$

Параметр g обращается в нуль как в случае $y_{12} = 0$, так и в случае $y_{12} \neq 0$. Поэтому теорема 3 не работает в силу вырождения, и исследование устойчивости равновесия требует привлечения членов более высокого порядка малости.

Заметим, что исследование устойчивости, предпринятое в работе [7] для произвольных значений e , неверное. К примеру, нет анализа кривой $b = b(e)$, содержащей бесконечную последовательность экстремальных точек $b(e_j) = \pm 1$, $\{e_j\} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$, и, как следствие, нет выводов о неустойчивости равновесия в первом приближении при $e = e_j$. Нелинейный анализ устойчивости отсутствует, хотя делаются выводы об устойчивости по Ляпунову (есть ссылка на монографию Бибикова Ю. Н. [8] без всякой проверки выполнения условий соответствующих теорем).

Заклучение

В статье исследована устойчивость тривиального решения задачи Ситникова в нелинейной постановке. Показано, на основе теоремы 1, что устойчивость по первому приближению сохраняется в полной системе уравнений для всех значений эксцентриситета из интервала $[0, 1)$, за исключением корней $\{e_j\}$ уравнения (3). Устойчивость равновесия при $e = e_1$ следует из теоремы 2, в то время как случай $e = e_2$ отвечает вырождению условий соответствующей теоремы (теоремы 3). Таким образом, исследование устойчивости при $e = e_2$ требует учета членов разложения функции Гамильтона более высокого порядка малости. Остается также открытым вопрос устойчивости равновесия при $e = e_j$ ($j = 3, 4, \dots$).

Список литературы

- [1] Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 2, с. 303–306.
- [2] Калас В. О., Красильников П. С. Об устойчивости равновесия в задаче Ситникова // Космические исследования, 2011, т. 49, № 6, с. 551–554.
- [3] Журавлёв С. Г., Перепелкина Ю. В. Об устойчивости в строгом нелинейном смысле тривиального положения относительного равновесия в классическом и обобщенных вариантах задачи Ситникова // ПММ, 2013, т. 77, № 2, с. 239–250.
- [4] Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // МТТ, 2004, № 6, с. 3–12.
- [5] Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // МТТ, 1996, № 2, с. 37–54.
- [6] Маркеев А. П. Об устойчивости нелинейных колебаний связанных маятников // МТТ, 2013, № 4, с. 20–30.
- [7] Тхай В. Н. Периодические движения обратимой механической системы второго порядка: Приложение к задаче Ситникова // ПММ, 2006, т. 70, № 5, с. 813–834.
- [8] Бибииков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Ленинград: ЛГУ, 1991. 143 с.

On the investigation of stability of equilibrium in Sitnikov problem in nonlinear formulation

Vyacheslav O. Kalas¹, Pavel S. Krasilnikov²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University)

Volokolamskoe Shosse, 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia

¹kalasv@yandex.ru, ²krasil06@rambler.ru

With regard to nonlinear terms in the equations of motion, the stability of the trivial equilibrium in Sitnikov problem is investigated. For Hamilton's equations of the problem, the mapping of phase space into itself in the time $t = 2\pi$ was constructed up to terms of third order. With the help of point mapping method, the stability of equilibrium is investigated for eccentricity from the interval $[0, 1)$. It is shown that Lyapunov stability takes place for $e \in [0, 1)$, if we exclude the discrete sequence of values $\{e_j\}$ for which the trace of the monodromy matrix is equal to ± 2 . The first and second values of the eccentricity of the specified sequence are investigated. The equilibrium is stable if $e = e_1$. Eccentricity value $e = e_2$ corresponds to degeneracy stability theorems, therefore the stability analysis requires the consideration of the terms of order higher than the third. The remaining values of eccentricity from discrete sequence have not been studied.

MSC 2010: 70F07, 34D20

Keywords: Sitnikov problem, stability, point mappings

Received October 11, 2014, accepted December 26, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 117–126 (Russian)

