



УДК: 532.516

MSC 2010: 76D05

## Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом

Д. В. Князев, И. Ю. Колпаков

В рамках класса точных решений уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью части компонент скорости от одной пространственной переменной рассмотрены осесимметричные неавтономные течения вязкой жидкости в цилиндрической области, радиус которой меняется со временем по некоторому закону, вычисляемому в ходе решения. Задача сведена к двухпараметрической динамической системе, качественный и численный анализ которой позволил выделить на фазовой плоскости три области, соответствующие различным предельным величинам радиуса трубы: радиус трубы и скорость потока обращаются в бесконечность за конечное время, площадь поперечного течения цилиндра обращается в нуль в течение конечного промежутка времени, радиус трубы неограниченно долго приближается к постоянному значению, а поток — к состоянию покоя. Для случая идеальной жидкости решение задачи получено в конечном виде, удовлетворяющем условиям прилипания.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, точные решения, течение в трубе

---

Получено 15 апреля 2014 года

После доработки 16 декабря 2014 года

---

Работа выполнена в рамках совместного проекта УрО, СО, ДВО РАН (12-С-1-1006) и при поддержке РФФИ (12-01-00023).

---

Князев Денис Вячеславович

[dvk5@yandex.ru](mailto:dvk5@yandex.ru)

Институт механики сплошных сред УрО РАН

614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1

Колпаков Илья Юрьевич

[kolpakov.ilia@mail.ru](mailto:kolpakov.ilia@mail.ru)

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29

## 1. Введение

Прикладной интерес к изучению течения жидкости в цилиндрической области (трубе) с меняющимся во времени радиусом, как правило, связан с проблемой описания функционирования отдельных частей кровеносной системы [1–4]. Не менее интересна эта задача в теоретическом плане, поскольку некоторые ее точные решения дают примеры развития сингулярностей или исчезновения решений за конечное время в полных уравнениях Навье – Стокса.

Изучение осесимметричных течений вязкой жидкости в трубе, с меняющимся со временем радиусом, в рамках класса точных решений уравнений гидродинамики с линейной зависимостью части компонент скорости от осевой координаты начато в [1], где отмечается, что эта нестационарная задача допускает автомодельное решение, зависящее от единственной переменной, связывающей радиальную координату и время. С использованием последнего обстоятельства в [1, 2] построены приближенные решения, описывающие течения в трубе, площадь поперечного сечения которой неограниченно растет или сокращается до нуля по линейному закону. Неавтомодельные режимы течения, вызванного периодическим во времени изменением радиуса трубы, численно изучены в [4]. В зависимости от безразмерных амплитуды и скорости колебаний боковой поверхности цилиндра описана последовательность бифуркаций, способная приводить к хаотизации потока жидкости.

В настоящей работе, с использованием семейства точных решений, аналогичного найденному в [5], рассматриваются неавтомодельные режимы осесимметричных течений, индуцированных изменением радиуса цилиндра по некоторым законам, вычисляемым в ходе решения задачи. Полученные решения описывают поведение потока при обращении радиуса трубы в нуль за конечное время, стремлении площади поперечного сечения к постоянному значению в течение не ограниченного времени и росту радиуса до бесконечности за конечный промежуток времени.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричное течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе, вызываемое изменением радиуса со временем  $\tau$  по закону  $R(\tau)$ . Граничные условия выражают требования регулярности потока на оси трубы [6] и прилипания на подвижной боковой поверхности

$$r = 0: V_r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \quad r = R(\tau): V_r = \frac{dR}{d\tau}, \quad V_z = 0. \quad (2.1)$$

Точное решение задачи ищется в виде

$$V_r = \frac{\nu}{R_0} \frac{u(t, x)}{\sqrt{x}}, \quad V_z = -2 \frac{\nu}{R_0} \left[ W(t, x) + Z \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (2.2)$$

$$P = \frac{\nu^2}{R_0^2} [p_0(t, x) - 4Zp_1(t) - 2Z^2p_2(t)],$$

где  $P$ ,  $V_r$ ,  $V_z$  — давление, отнесенное к постоянной плотности, радиальная и осевая составляющие скорости в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ ,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $R_0 = R(0)$  — начальный радиус трубы,  $t = 2\nu\tau/R_0^2$ ,  $x = r^2/R_0^2$ ,  $Z = z/R_0$  — безразмерные время и пространственные переменные. Подставив (2.2) в уравнения Навье – Стокса, с учетом (2.1), получим систему относительно новых безразмерных



неизвестных:

$$u_{xt} + uu_{xx} - u_x u_x + p_2 = 2(xu_{xx})_x,$$

$$x = 0: u = 0, \quad x = \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^2 \equiv H(t): u = \frac{dH}{dt}, \quad u_x = 0, \quad (2.3)$$

$$W_t + uW_x - u_x W + p_1 = 2(xW_x)_x,$$

$$x = 0: |W| < \infty, \quad x = H(t): W = 0. \quad (2.4)$$

Здесь и далее индексы  $t$  и  $x$  обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Изолированная задача (2.3) описывает течение, индуцируемое перемещением боковой поверхности трубы, а подчиненная ей линейная относительно  $W$  система (2.4) характеризует движение жидкости под действием однородного продольного градиента давления  $p_1$  с учетом движения границы (если  $u \neq 0$ ). Далее задача (2.4) подробно не рассматривается. Отметим лишь, что простейшее ее решение имеет вид  $W = Cu_x$ ,  $p_1 = Cp_2$  ( $C$  — постоянная), а в случае неподвижной боковой поверхности трубы ( $u \equiv 0$ ) (2.4) дает известное решение Пуазейля.

Однородная по осевой координате часть давления вычисляется по формуле

$$p_0 = p_{00}(t) + 2u_x - \frac{u^2}{2x} - \int \frac{u_t}{x} dx.$$

Рассмотрим систему (2.3). В силу нестационарности она должна быть дополнена начальным условием. Вместо этого для произвольного момента времени зададим пространственную структуру течения (2.2) функцией тока вида [5]

$$\psi = \nu R_0 Z u(t, x) = \nu R_0 Z A(t) \{1 - \exp[\lambda(t)x] + \lambda(t)x \exp[h(t)]\}, \quad (2.5)$$

$$h(t) = \lambda(t)H(t)$$

(считаем, что  $W = p_1 = 0$ ). Тогда, в силу (2.3), величины  $\lambda(t)$ ,  $A(t)$ ,  $h(t)$  подчиняются автономной системе трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda_t + \lambda^2 A e^h = 2\lambda^2, \quad A_t + (1 - 3e^h) A^2 \lambda = 0, \quad h_t + (e^h - 1) A \lambda = 2h\lambda, \quad (2.6)$$

$$\lambda(0) = h(0) = \lambda_0, \quad A(0) = A_0 = \frac{\text{Re}}{1 + (\lambda_0 - 1)e^{\lambda_0}},$$

а квадратичная по осевой координате часть давления вычисляется по формуле  $p_2 = (\lambda A e^h)^2 - (\lambda A e^h)_t$ ; здесь  $\text{Re} = H_t(0) = R_0 V_0 / \nu$  — начальное число Рейнольдса, построенное по радиальной скорости  $V_0 = R_t(0)$  боковой поверхности цилиндра в момент времени  $t = 0$ .

Представление (2.5) дает частные решения исходной задачи, справедливые лишь для специальных законов  $H(t) = h(t)/\lambda(t) \geq 0$  изменения относительной площади поперечного сечения трубы со временем, вычисляемых в результате решения системы (2.6). Численный анализ (2.6) наталкивается на ряд трудностей, связанных с обращением части неизвестных в бесконечность в определенные моменты времени, что, впрочем, не обязательно влечет за собой развитие сингулярного течения жидкости. Указанное обстоятельство приводит

к необходимости качественного анализа (2.6), ключом к которому является изолированное уравнение, связывающее между собой неизвестные  $A$  и  $h$  (следствие второго и третьего уравнений (2.6))

$$\frac{dA}{dh} = \frac{(3e^h - 1)A^2}{2h + (1 - e^h)A}. \quad (2.7)$$

В силу вышеизложенного исследование уравнения (2.7) должно включать в себя, кроме традиционного изучения его особых точек, еще и анализ поведения интегральных кривых на бесконечности.

### 3. Течение идеальной жидкости

Самостоятельный интерес представляет решение задачи (2.3)–(2.6) применительно к идеальной жидкости, так как оно удовлетворяет тем же условиям прилипания (2.1), что и вязкий поток. Кроме того, бездиссипативное приближение дает наглядную иллюстрацию обозначенных ранее проблем сингулярных решений.

В отсутствие вязкости правые части уравнений (2.6) обращаются в нуль, тогда решение получившейся задачи Коши имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{e^h (e^h - 1)^2}, \quad h = \ln \left[ 1 + \frac{e^{\lambda_0} - 1}{\lambda_0} \lambda \right], \\ \lambda &= \lambda_0 - (A_0 \lambda_0^2 e^{\lambda_0}) t, \quad C = A_0 e^{\lambda_0} (e^{\lambda_0} - 1)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу обратимости движения идеальной жидкости семейство интегральных кривых (3.1) бездиссипативного варианта уравнения (2.7) расположено симметрично относительно оси абсцисс плоскости  $(h, A)$ , то есть  $A(h, -C) = -A(h, C)$  (рис. 1а). Далее для определенности считаем, что время течет в «естественном» направлении, то есть  $t \geq 0$ . Тогда движение точки, изображающей решение рассматриваемой системы, вдоль траектории, выбранной начальными значениями  $(h(0), A(0)) = (h_0, A_0)$ , происходит в направлении, указанном на рисунке 1 стрелками. Каждая интегральная кривая (3.1) имеет две особые точки  $h = 0$ ,  $h = -\infty$ , достигаемых за конечное время.

Пусть изображающая точка в начальный момент времени находится в первом квадранте плоскости  $(h, A)$  (рис. 1а). Двигаясь по траектории (вдоль интегральной линии), она за конечное время  $t = t_1 = (\lambda_0 A_0 e^{\lambda_0})^{-1}$  достигнет особой точки  $h = 0$ , такой, что

$$t \rightarrow t_1: A \rightarrow \infty, \quad H \rightarrow \frac{e^{\lambda_0} - 1}{\lambda_0}, \quad \psi \rightarrow -\nu R_0 Z A_0 \lambda_0^2 e^{\lambda_0} \left( \frac{x}{2} - \frac{e^{\lambda_0} - 1}{\lambda_0} \right) x. \quad (3.2)$$

Следовательно, несмотря на обращение в бесконечность амплитуды  $A$ , радиус трубы и скорость потока остаются конечными в момент времени  $t = t_1$ , а течение жидкости непрерывно продолжается далее во времени ( $t > t_1$ ). При этом изображающая точка переходит во второй квадрант и к моменту времени  $t = t_2 = [A_0 \lambda_0 (e^{\lambda_0} - 1)]^{-1}$  достигает положения  $h = -\infty$ , при этом радиус трубы и скорость потока обращаются в бесконечность ( $A, H \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \lambda_0 / (1 - e^{\lambda_0})$ ). Таким образом, за конечное время  $t = t_2$  решение становится сингулярным и не может быть продолжено далее.

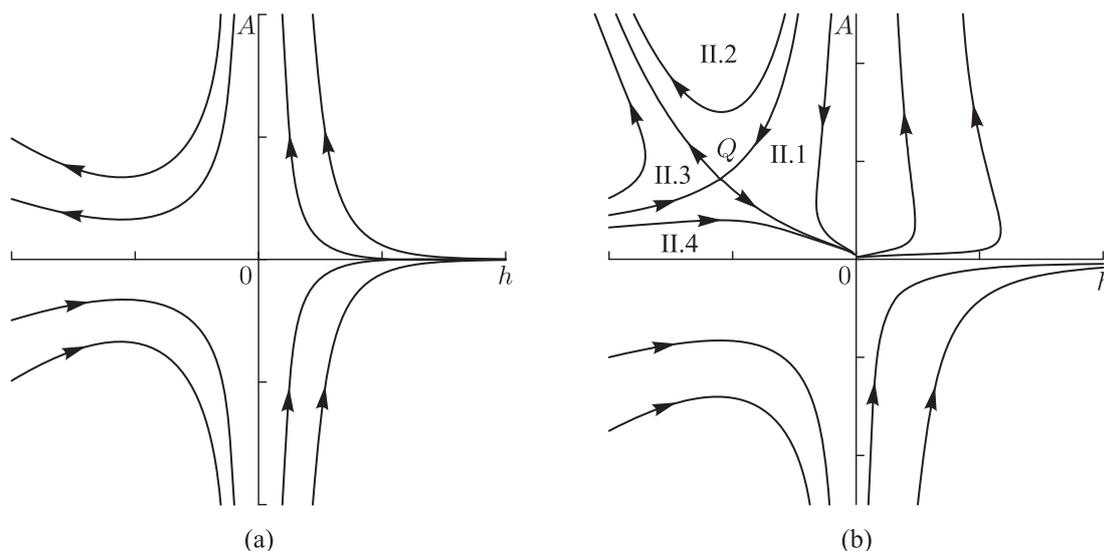


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (2.7) для течений идеальной жидкости (а) и вязкой жидкости (б).

Опишем теперь движение вдоль произвольной траектории в нижней полуплоскости  $A < 0$ . Пусть изображающая точка в начальный момент времени стартует из третьего квадранта. При  $t = t_1 = (\lambda_0 A_0 e^{\lambda_0})^{-1}$  она достигнет положения  $h = 0$ , которое, в соответствии с (3.2), проходит так же, как это описано выше. Далее изображающая точка оказывается в четвертом квадранте фазовой плоскости, где за бесконечное время достигает точки покоя  $(+\infty, -0)$ , в которой радиус трубы и скорость потока жидкости обращаются в нуль.

В итоге заключаем, что при  $A_0 > 0$  течение идеальной жидкости (2.5), (3.1) становится сингулярным, так как скорость потока и радиус трубы обращаются в бесконечность за конечное время  $t_2$ . В случае  $A_0 < 0$  решение существует неограниченное время, в течение которого радиус трубы стремится к нулю.

#### 4. Течение вязкой жидкости

При учете вязкости не удастся найти решение задачи (2.6) в конечном виде, что влечет за собой необходимость качественного и численного исследования этой системы, базирующегося на изолированном уравнении (2.7).

Фазовый портрет уравнения (2.7) на плоскости содержит две конечные особые точки  $O = (0, 0)$ ,  $Q = (-\ln 3, 3 \ln 3)$  (рис. 1b).

Особая точка  $Q$  соответствует автомодельному решению краевой задачи (2.3)

$$u = 3 \ln 3 \left( 1 - e^\xi + \frac{\xi}{3} \right), \quad \xi \equiv \frac{x}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{-\ln 3}{1 + \ln 3(2 - \ln 3)t}$$

и является классической седловой точкой, сепаратрисы которой делят второй квадрант фазовой плоскости на четыре части  $\Pi.1$ – $\Pi.4$  (рис. 1b).

Интегральные линии из секторов  $\Pi.2$ ,  $\Pi.3$  со временем стремятся к неустойчивой сепаратрисе, уходящей на бесконечность. Легко показать, что вязкость не оказывает существен-

ного влияния на поведение этих траектории. Действительно, при  $h \rightarrow -\infty$  уравнение (2.7) приближенно сводится к линейному уравнению относительно  $h$ , имеющему общее решение:

$$\frac{dh}{dA} \approx -\frac{2}{A^2}h - \frac{1}{A}, \quad h \approx \left( \ln C_1 - \int \frac{\exp(-2/A)}{A} dA \right) \exp\left(-\frac{2}{A}\right), \quad C_1 = \text{const.} \quad (4.1)$$

В интересующем нас случае  $A \rightarrow +\infty$  из общего решения (4.1) следует, что  $A \approx C_1 e^{-h} > 0$  (ср. с (3.1)), а значит, первое — диссипативное — слагаемое в правой части уравнения (4.1) несущественно. В итоге, подобно невязкому случаю, заключаем, что изображающая точка, двигаясь вдоль траекторий, лежащих в секторах II.2, II.3, уходит в бесконечность за конечное время. При этом скорость потока жидкости и радиус трубы неограниченно растут.

Интегральные линии из секторов II.1, II.4 вместе со второй неустойчивой сепаратрисой стремятся к точке покоя  $O$ . В верхней полуплоскости  $A > 0$  точка  $O$  представляет собой узел, а в нижней — седло с сепаратрисами  $h = 0$ ,  $A = 0$ , содержащими тривиальные решения задачи (2.3). Поведение интегральных линий в окрестности точки  $O$  приближенно описывается уравнением  $dA/A^2 \approx dh/h$ , из которого, с учетом (2.6), имеем

$$\lambda \approx \frac{1}{C_1 - 2t} \approx C_2 h \approx C_3 \exp\left(-\frac{1}{A}\right), \quad C_2 > 0. \quad (4.2)$$

Следовательно, эта точка покоя достижима лишь за неограниченное время  $t \rightarrow \pm\infty$ . Здесь и далее  $C_1, C_2, C_3$  — постоянные интегрирования.

Из (4.2) вытекает, что все решения (2.6), соответствующие интегральным линиям второго квадранта ( $C_1, C_2 < 0$ ), стремящимся к особой точке  $O$ , описывают процесс медленной ( $t \rightarrow \infty$ ) остановки движения жидкости, обусловленный исчезновением причины этого движения — изменения радиуса трубы, так как  $H = h/\lambda \rightarrow \text{const}$  (рис. 2).

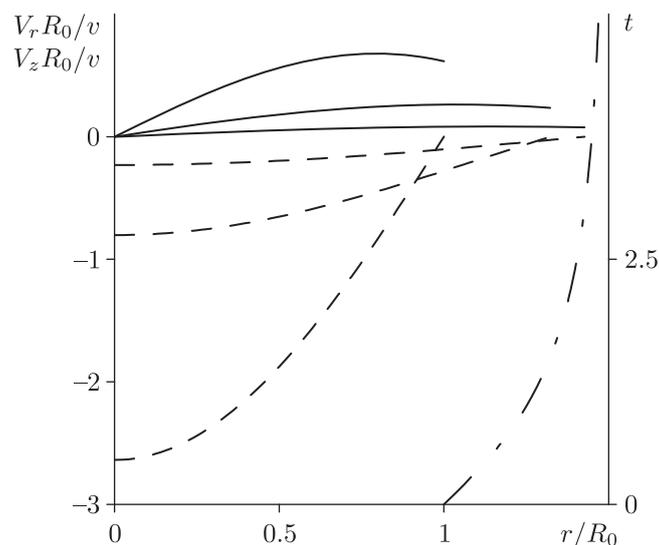


Рис. 2. Безразмерные профили радиальной (сплошные линии) и осевой (штриховые линии) составляющих скорости при  $Z = 1$  в последовательные моменты безразмерного времени  $t(R/R_0)$  (штрихпунктирная кривая), рассчитанные для  $\lambda_0 = -0.4$ ,  $A_0 = 10$ .

Покажем, что, подобно невязкому случаю, интегральные кривые из первого (третьего) квадранта фазовой плоскости «переходят» за конечное время во второй (четвертый) квадрант через точку  $(0, \infty)$ . Для этого введем переменную  $a = A^{-1}$ . Следуя стандартной процедуре исследования поведения траектории в окрестности особой точки  $(h, a) = (0, 0)$  [7], разложим числитель и знаменатель (2.7) в ряды Маклорена, сохранив в них главные (линейные) слагаемые. Получим приближенное уравнение  $da/dh \approx 2a/h$ , не содержащее «вязких» членов. Решение этого и остальных уравнений (2.6), в пределах выбранной степени точности, согласуется с (3.1) (сохранив в приближенном уравнении еще и квадратичные слагаемые, получим  $C_1 a \approx h^2 \exp(2a + 3h)$ ):

$$A = \frac{1}{a} \approx \frac{C_1}{h^2}, \quad h \approx C_2 \lambda \approx C_3 - \frac{C_1}{C_2} t, \quad C_2 > 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, все выводы, сделанные при рассмотрении невязкой задачи вблизи бесконечно удаленной точки оси  $A$ , качественно справедливы и в вязком случае, а выражения (4.3) могут быть использованы для «сшивания» интегральных линий из смежных квадрантов фазовой полуплоскости  $A > 0$  ( $A < 0$ ) при выполнении численных расчетов.

Рассмотрим поведение траекторий из четвертого квадранта фазовой плоскости при их стремлении к асимптоте  $A = 0$ . В данном случае вязкость жидкости оказывает существенное влияние на характер течения, приводя к тому, что обращение радиуса трубы в нуль происходит за конечное время и сопровождается неограниченным ростом скорости потока.

Формально проинтегрировав первое уравнение системы (2.6), получим

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} - \left[ 2t + \int_0^t (-Ae^h) dt \right].$$

Для решений из четвертого квадранта выражение, стоящее в прямоугольной скобке, — неотрицательная неограниченно растущая со временем функция ( $A \leq 0$ ,  $h > 0$ ). Такой рост гарантируется линейным по  $t$  вязким слагаемым. Следовательно, каким бы ни было начальное значение  $0 < \lambda_0 < \infty$ , найдется конечный момент времени  $t_*$ , в который  $\lambda$  обратится в бесконечность. При этом, очевидно,  $A(t_*) = 0$ ,  $h(t_*) = \infty$ .

Качественное поведение решений (2.6) вблизи заключительного момента времени можно описать, выполнив в (2.7) замену  $A = ahe^{-h}$  и перейдя в коэффициентах, зависящих от  $h$ , к пределу при  $h \rightarrow +\infty$ . В результате получим приближенное уравнение  $da/dh \approx 2a(a + 1)/(2 - a)$ . Его решение  $a = -1$  притягивает к себе все прочие решения из интересующей нас области  $a < 0$  при достаточно больших значениях  $h$ . В результате, с учетом остальных уравнений (2.6), найдем

$$A \approx -he^{-h}, \quad \lambda \approx C_1 e^{h/3}, \quad H \approx C_1^{-1} h e^{-h/3}, \quad C_1 t - C_2 \approx \int_{-\infty}^{-h/3} \frac{e^\eta}{3\eta} d\eta, \quad C_1, C_2 > 0. \quad (4.4)$$

Последнее приближенное равенство (4.4) согласуется с доказанным выше утверждением о конечности времени существования решений из четвертого квадранта плоскости  $(h, A)$ , так как при  $h \rightarrow +\infty$  из него следует, что  $t \approx C_2/C_1 = \text{const} > 0$ . Третье выражение (4.4) указывает на стремление к нулю приведенной площади поперечного сечения трубы с ростом величины  $h$ . При этом скорость потока неограниченно возрастает, поскольку

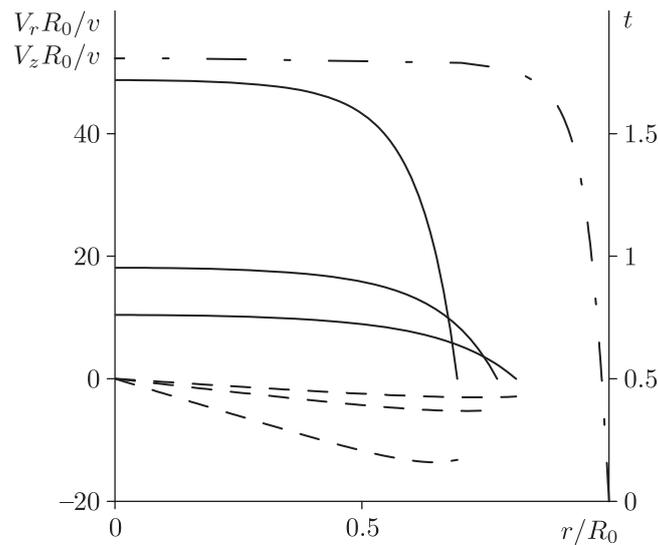


Рис. 3. Безразмерные профили радиальной (сплошные линии) и осевой (штриховые линии) составляющих скорости при  $Z = 1$  в последовательные моменты безразмерного времени  $t(R/R_0)$  (штрихпунктирная кривая), рассчитанные для  $\lambda_0 = 0.1$ ,  $A_0 = -10$ .

за ограниченное время  $t_*$  требуется выплеснуть из трубы бесконечный объем жидкости. Осевая составляющая поля скорости почти однородна по радиусу за исключением сравнительно узкого кольца вблизи сжимающейся боковой поверхности трубы (рис. 3).

В итоге заключаем, что при  $A_0 > 0$  решение вязкой задачи становится сингулярным за конечное время, если изображающая точка оказывается в областях II.2, III.3 фазовой плоскости  $(h, A)$ , либо описывает остановку потока за бесконечное время, вследствие прекращения изменения радиуса цилиндра. В случае  $A_0 < 0$  решение задачи существует конечное время, за которое радиус трубы обращается в нуль.

## Список литературы

- [1] Uchida Sh., Aoki H. Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe // J. Fluid Mech., 1977, vol. 82, no. 2, pp. 371–387.
- [2] Skalak F. M., Wang C. Y. On the unsteady squeezing of a viscous fluid from a tube // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math., 1979, vol. 21, no. 1, pp. 65–74.
- [3] Wang C. Y. Arbitrary squeezing of fluid from a tube at low squeeze numbers // Z. Angew. Math. Phys., 1980, vol. 31, no. 5, pp. 620–627.
- [4] Blyth M. G., Hall Ph., Papageorgiou D. T. Chaotic flows in pulsating cylindrical tubes: A class of exact Navier–Stokes solutions // J. Fluid Mech., 2003, vol. 481, pp. 187–213.
- [5] Bellamy-Knights P. G. An unsteady two-cell vortex solution of the Navier–Stokes equations // J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, no. 3, pp. 673–687.
- [6] Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. Течения вязкой жидкости с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
- [7] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. Москва: Наука, 1966. 568 с.

## The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius

Denis V. Knyazev<sup>1</sup>, Iliia Yu. Kolpakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS  
Korolev St. 1, Perm, 614013, Russia

<sup>2</sup>Perm National Research Polytechnic University  
Komsomolsky Ave. 29, Perm, 614990 Russia

<sup>1</sup>dvk5@yandex.ru, <sup>2</sup>kolpakov.ilia@mail.ru

In the frameworks of a class of exact solutions of the Navier–Stokes equations with linear dependence of part the speed components on one spatial variable the axisymmetrical nonselfsimilar flows of viscous fluid in the cylindrical area which radius changes over the time under some law calculated during the solution are considered. The problem is reduced to two-parametrical dynamic system. The qualitative and numerical analysis of the system allowed to allocate three areas on the phase plane corresponding to various limit sizes of a pipe radius: radius of a pipe and stream velocity tend to infinity for finite time, the area of a cross section of the cylinder tend to zero during a finite time span, radius of the tube infinitely long time approaches to a constant value, and the flow tend to the state of rest. For a case of ideal fluid flow the solution of the problem is obtained in the closed form and satisfying the slip condition.

MSC 2010: 76D05

Keywords: Navier–Stokes equations, exact solutions, pipe flow

Received April 15, 2014, accepted December 16, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 89–97 (Russian)