Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 169–178.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.36
MSC 2010: 70E17

Принципы динамики и сервосвязи*

В. В. Козлов

Как известно, в теории Бегена – Аппеля сервосвязи реализуются с помощью управляемых внешних сил. В статье дано расширение теории Бегена – Аппеля, когда сервосвязи реализуются посредством управляемого изменения инерционных свойств динамической системы. Обсуждается аналитическая механика динамических систем с сервосвязями общего вида. Ключевой принцип развиваемого подхода состоит в подходящем определении возможных перемещений систем со связями.

Ключевые слова: сервосвязи, принцип Даламбера – Лагранжа, возможные перемещения, принцип Гаусса, теорема Нётер

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — обобщенные координаты механической системы, T — ее кинетическая энергия, $F_1, \ldots, F_n$ — обобщенные силы. Если система является «свободной» (координаты x и скорости $\dot{x}$ не связаны каким-либо нетривиальным соотношением), то ее движение описываются уравнениями Лагранжа

$$[T] = F, \tag{1}$$

$[f]$ обозначает вариационную производную

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Если имеется связь $\Phi(\dot{x}, x, t) = 0$ (в приложениях функция Φ линейна по $\dot{x}$), то уравнения (1) обычно заменяются более общими:

$$[T] = F + \lambda\, \partial\Phi/\partial\dot{x}, \quad \Phi = 0, \tag{2}$$

где λ — пока не определенный множитель. Пусть $\partial\Phi/\partial\dot{x} \neq 0$. Тогда, не решая (2), множитель λ можно представить в виде явной функции от $\dot{x}$, x и t.

*Переработанный и дополненный вариант статьи «Принципы динамики и сервосвязи» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1989, № 5, с. 59–66.

Получено 29 января 2015 года
После доработки 04 февраля 2015 года

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Уравнения (2) эквивалентны принципу Даламбера – Лагранжа:

$$([T] - F)\,\delta x = 0, \quad \Phi = 0, \tag{3}$$

где возможные перемещения (вариации по Гато) δx удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\,\delta x = 0. \tag{4}$$

При построении динамики со связями обычно исходят из принципа Даламбера – Лагранжа. Некоторые авторы (Гаусс, Пуансо, Якоби, Кирхгоф и др.) рассматривали принцип Даламбера – Лагранжа как самостоятельный принцип, доказывать который не нужно (см. [1, 2]). Однако при традиционном способе изложения динамики этот принцип устанавливается с помощью принципа освобождаемости и аксиомы идеальности связи. Принцип освобождаемости утверждает, что систему со связью можно считать свободной, при этом к внешним силам F надо добавить еще реакцию связи

$$R = [T] - F. \tag{5}$$

Аксиома идеальности связи выражается равенством

$$R\,\delta x = 0. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) вместе с уравнением связи $\Phi = 0$ эквивалентны, конечно, (3). Но сами по себе уравнения (3) без уравнения (4), задающего возможные перемещения, не определяют однозначно уравнений движения. Поэтому при таком способе построения динамики в число аксиом следует включить определение возможных перемещений. Как будет показано ниже, эта аксиома независима от аксиом (5) и (6). Доказательство использует тот факт, что динамика систем с сервосвязями существенно зависит от физического способа их реализации.

В качестве простого примера рассмотрим движение по прямой двух материальных точек с массами m_1 и m_2, причем на точку m_2 действует сила F. Пусть x_1 и x_2 — координаты этих точек. Если m_1 и m_2 соединены твердым невесомым стержнем, то вся система движется с ускорением $F/(m_1 + m_2)$. Связь задается уравнением

$$x_2 - x_1 = \mathrm{const}, \text{ \textit{или, что то же самое,} } \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0. \tag{7}$$

Из (4) получим уравнение возможных перемещений

$$\delta x_2 - \delta x_1 = 0. \tag{8}$$

Эта связь является идеальной.

Ту же самую связь можно реализовать и так: считая m_1 и m_2 свободными, приложим к точке m_1 «следящую» силу $R = m_1 F/m_2$. Если в начальный момент времени $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$, то последнее соотношение будет выполнено при всех значениях t и система точек будет двигаться как твердое тело с иным ускорением F/m_2. Реакцией связи (7) (являющейся сервосвязью) будет сила R, и ее работа на возможных перемещениях (8), как правило, отлична от нуля. В этом случае обычно говорят, что связь (7) здесь уже неидеальна [3, п. 53].

Однако можно рассуждать по-другому. Вместо соотношения (8) зададим возможные перемещения другим уравнением —

$$\delta x_1 = 0. \tag{9}$$

Тогда динамика рассматриваемой системы с сервосвязью (7) будет подчиняться старым аксиомам (5) и (6), а также новой аксиоме (9).

Таким образом, даже в простейшем случае стационарной интегрируемой связи определение возможных перемещений есть независимая аксиома динамики. Поэтому «выводы» уравнений возможных перемещений, фигурирующие в руководствах по динамике, в лучшем случае являются лишь разъяснениями принимаемых определений. Конечно, эти определения можно доказать с использованием других независимых аксиом. Так, например, Н. Г. Четаев получил соотношение (4) из аксиом (5), (6) и принципа Гаусса [4].

2. Рассмотрим свободную систему и предположим, что с помощью дополнительных управляемых сил вида λM, $M = (M_1, \ldots, M_n)$, требуется осуществить движение этой системы, подчиняющееся связи $\Phi = 0$. Здесь λ — пока неизвестная функция времени. Задача сводится к разрешимости системы уравнений

$$[T] = F + \lambda M, \quad \Phi = 0. \tag{10}$$

Продифференцируем уравнение связи по t:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\, \ddot{x} = \varphi. \tag{11}$$

Здесь φ — некоторая известная функция от $\dot{x}$, x, и t. Полагая

$$A = \|\partial^2 T/\partial x^2\|,$$

из (10) и (11) получим линейное уравнение для множителя

$$\lambda\,(A^{-1}M, \partial\Phi/\partial\dot{x}) = g,$$

с известной правой частью.

Таким образом, условие реализуемости связи $\Phi = 0$ с помощью обобщенных сил вида λM сводится к неравенству

$$(A^{-1}M, \partial\Phi/\partial\dot{x}) \neq 0. \tag{12}$$

Оно заведомо выполняется, если $M = \partial\Phi/\partial\dot{x}$ и $\partial\Phi/\partial\dot{x} \neq 0$.

В качестве примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки и предположим, что с помощью регулируемого момента сил, направленного вдоль неподвижной в теле оси n, требуется осуществить движение твердого тела, при котором проекция его угловой скорости на неподвижную в теле ось l постоянно равна нулю. Нетрудно проверить, что условие (12) реализуемости такой сервосвязи нарушается, лишь когда оси n и l ортогональны. Если оси n и l совпадают, то твердое тело совершает неголономное движение и мы получаем еще одну реализацию известной задачи Суслова [5, п. 298].

Уравнения движения (10) рассматриваемой системы с сервосвязью $\Phi = 0$ можно представить в виде принципа Даламбера–Лагранжа (3), но только следует принять новое уравнение для возможных перемещений:

$$M\,\delta x = 0. \tag{13}$$

В этом случае будут справедливы принцип освобождаемости (реакция связи R равна λM) и аксиома идеальности связи. Возникает целое семейство моделей движения систем с сервосвязями, различающихся лишь определением возможных перемещений (13).

3. Как уже отмечалось в п. 1, уравнение для возможных перемещений (4) можно вывести из условия совместности принципов Даламбера–Лагранжа и Гаусса. Оказывается, для систем, подчиняющихся принципу Даламбера–Лагранжа (3), (13), справедлив обобщенный принцип Гаусса.

Действительным движением назовем функцию $x_d(t)$, удовлетворяющую уравнениям (10), освобожденным движением — функцию $x_0(t)$, удовлетворяющую уравнениям Лагранжа (1) и начальным данным $x_0(\tau) = x_d(\tau)$, $\dot{x}_0(\tau) = \dot{x}_d(\tau)$. Введем, наконец, семейство мыслимых движений $x_\mu(t)$, задаваемых следующими условиями:

(i) действительное движение является одним из мыслимых,

(ii) $x_\mu(\tau) = x_d(\tau)$, $\dot{x}_\mu(\tau) = \dot{x}_d(\tau)$,

(iii) для любых мыслимых движений x'_μ и x''_μ разность ускорений $\ddot{x}'_\mu(\tau) - \ddot{x}''_\mu(\tau)$ удовлетворяет уравнению (13).

Запас мыслимых движений достаточно широк. Действительно, пусть $Mw = 0$. Тогда функция

$$x_d(\tau) + \dot{x}_d(\tau)(t-\tau) + (\ddot{x}_d(\tau) - w)(t-\tau)^2/2$$

определяет одно из мыслимых движений.

Следуя Гауссу, введем функцию принуждения

$$Z_{\mu,0} = (A(\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_0), (\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_0)),$$

являющуюся мерой отклонения мыслимых движений от освобожденного при $t = \tau$. Ясно, что $Z_{\mu,0}$ — квадрат вектора $\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_0$ во внутренней метрике, задаваемой кинетической энергией T. Положим еще

$$Z_{\mu,d} = (A(\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_d), (\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_d)).$$

Рассмотрим три вектора

$$a = \ddot{x}_\mu - \ddot{x}_0, \quad b = \ddot{x}_d - \ddot{x}_0, \quad c = \ddot{x}_\mu - \ddot{x}_d.$$

Ясно, что $a = b + c$. Покажем, что векторы b и c ортогональны во внутренней метрике. Действительно,

$$(Ab, c) = (A(\ddot{x}_d - \ddot{x}_0), (\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_d)) = \lambda\, M(\ddot{x}_\mu - \ddot{x}_d) = 0$$

согласно условиям (i) и (iii). По теореме Пифагора, $Z_{\mu,0} = Z_{d,0} + Z_{\mu,d}$. Так как $Z_{\mu,d} \geqslant 0$, то

$$Z_{d,0} \leqslant Z_{\mu,0}.$$

Это неравенство составляет обобщенный принцип Гаусса: действительным является то из мыслимых движений, которое наименее всего отклоняется от освобожденного движения.

Если положить $M = \partial\Phi/\partial\dot{x}$, то получим классический принцип Гаусса. При этом в качестве мыслимых движений можно принять движения, подчиняющиеся связи $\Phi = 0$ и условию (iii). Условие (i) выполнено автоматически, а условие (iii) выводится из соотношений (4) и (11).

4. Способ реализации сервосвязей с помощью регулируемых обобщенных сил, изложенный в п. 2, не является единственно возможным. Оказывается, сервосвязи можно также осуществить с помощью подходящего изменения инерционных свойств системы.

Рассмотрим движение системы с измененной кинетической энергией $T_* = T + \lambda N + \mu$, где N — некоторая функция от $\dot{x}$, x и t, а λ и μ — пока неизвестные функции времени. Параметр μ несущественный, так как он не входит в уравнение движения

$$[T_*] = F. \tag{14}$$

Параметр λ выберем из условия реализуемости связи $\Phi = 0$. Тогда из (4) получим замкнутую систему уравнений для отыскания x и λ:

$$[T] = F - \dot{\lambda}\,\partial N/\partial \dot{x} - \lambda\,[N], \quad \Phi = 0. \tag{15}$$

С помощью соотношения (11) можно найти условие разрешимости системы (15) относительно $\ddot{x}$ и $\dot{\lambda}$:

$$(A^{-1}\partial N/\partial \dot{x},\, \partial \Phi/\partial \dot{x}) \neq 0. \tag{16}$$

Неравенство (16) является достаточным условием реализуемости связи $\Phi = 0$. Отметим, что кроме начальных данных x_0 и $\dot{x}_0$, удовлетворяющих уравнению связи, надо задать еще начальное значение параметра λ.

В качестве примера рассмотрим задачу о вращении твердого тела с неподвижной точкой из п. 2, но теперь регулируемое воздействие будет осуществляться с помощью симметричного маховика, вращающегося вокруг оси n. Его вращение не меняет, конечно, распределения масс всей системы. Снова поставим задачу о реализации вращений, при которых проекция угловой скорости на ось l обращается в нуль. Вращение маховика относительно тела меняет кинетическую энергию системы. Можно показать, что в этом случае условие (16) реализуемости указанной сервосвязи также выполняется, если оси n и l не ортогональны. Для однозначного задания вращения тела-носителя необходимо задать в начальный момент времени скорость маховика относительно твердого тела.

Положим $N = \Phi$. Если $\partial\Phi/\partial\dot{x} \neq 0$, то условие (16) заведомо выполнено. В задаче о вращении твердого тела условие $N = \Phi$ эквивалентно совпадению осей n и l. В этом случае движение подчиняется не принципу Даламбера – Лагранжа (3), (4), а обобщенному вариационному принципу Гамильтона – Остроградского

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F\,\delta x\,dt = 0, \quad \Phi = 0 \tag{17}$$

для всех вариаций δx с закрепленными концами, удовлетворяющих уравнению

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\,(\delta x)^{\cdot} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x = 0. \tag{18}$$

Принцип (17)–(18) лежит в основе вакономной динамики (6). В (6) указаны способы «пассивной» реализации вакономных связей, основанные на эффекте присоединенных масс.

5. Наблюдения пунктов 2 и 4 можно обобщить. Предположим, что имеется измененная кинетическая энергия $T_* = T + \lambda(t)N$ и система находится под действием дополнительных обобщенных сил вида $\lambda'(t)M$. За счет выбора λ и λ' как функций времени требуется реализовать движение со связью $\Phi = 0$. Такую задачу в общем случае можно решить многими различными способами (ср. [7], [8, гл. 24]). Однако эту неопределенность можно исключить, задав некоторую априорную зависимость межу параметрами λ и λ'. Простейшая из них — линейная: $\lambda' = k\lambda$, $k = \text{const}$. Можно считать, что $k = 1$; в противном случае M заменим на kM. В итоге движение системы с сервосвязью описывается уравнениями

$$[T] = F - \dot{\lambda}\partial N/\partial\dot{x} - \lambda[N] + \lambda M, \quad \Phi = 0. \tag{19}$$

Условие реализуемости сервосвязи $\Phi = 0$ имеет вид неравенства (16).

Уравнения (19) можно представить в форме обобщенного принципа Даламбера–Лагранжа. Положим

$$R = -\dot{\lambda}\,\partial N/\partial\dot{x} - \lambda\,[N] + \lambda\,M.$$

На каждом движении (задаваемом однозначно значениями $x_0, \dot{x}_0$ и λ_0 в фиксированный момент времени) R является некоторой функцией времени. Будем трактовать R как реакцию связи, так что будет выполнен принцип освобождаемости (5).

Пусть $\delta x(t)$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$. Подсчитаем работу силы реакции на этом промежутке времени:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} R\delta x\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda(\delta N + M\delta x)\,dt = 0.$$

Если вариации δx подчинить условию

$$\delta N + M\delta x = \frac{\partial N}{\partial\dot{x}}\,(\delta x)^{\cdot} + \frac{\partial N}{\partial x}\,\delta x + M\,\delta x = 0, \tag{20}$$

то

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} R\delta x\,dt = 0. \tag{21}$$

Равенство (21) можно трактовать как условие идеальности связи, а равенство (20) — как определение возможных перемещений. Если $N = 0$, то (20) и (21) эквивалентны соответственно (13) и (6).

Для уравнений (19) также справедлив обобщенный принцип Гамильтона–Остроградского (17), но только уравнение (18) для вариаций надо заменить уравнением (20).

Соотношения между λ и λ' могут быть заданы в дифференциальной форме. Пусть, например, $\lambda' = k\lambda^{\cdot}$, $k = \text{const}$. Снова можно считать, что $k = 1$. В этом случае уравнения движения приобретают вид

$$[T] = F - \dot{\lambda}\partial N/\partial\dot{x} - \lambda[N] + \dot{\lambda}M, \quad \Phi = 0. \tag{22}$$

Условие реализуемости сервосвязи сводится к неравенству

$$(A^{-1}(\partial N/\partial\dot{x} - M), \partial\Phi/\partial\dot{x}) \neq 0.$$

Уравнение (22) представимо в виде обобщенного принципа Даламбера–Лагранжа

$$\int_{t_1}^{t_2} ([T]-F)\delta x\,dt = 0,$$

где возможные перемещения $\delta x(t)$ обращаются в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$ и удовлетворяют уравнению

$$\delta N - (M\delta x)^{\cdot} = 0.$$

Совершенно аналогично рассматривается общий случай, когда λ и λ' связаны произвольным линейным соотношением, включающим в себя производные любых порядков. При этом определение возможных перемещений содержит условие обращения в нуль функций $\delta x(t)$ в точках t_1 и t_2 вместе со своими производными до некоторого порядка.

6. Для систем с сервосвязями общего вида справедлив интегральный аналог принципа Гаусса. Для определенности рассмотрим систему, динамика которой описывается уравнениями (19).

Пусть $t \to x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — некоторый гладкий путь, удовлетворяющий уравнению связи. Его вариации $\delta x(t)$ задаются уравнением (20) и обращаются в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$. Положим $R(t) = ([T]-F)_{x(t)}$. Оказывается, путь $x(t)$ является движением тогда и только тогда, когда для всех его вариаций δx справедливо неравенство

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} (A^{-1}(R+A\delta x), R+A\delta x)\,dt \geqslant \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} (A^{-1}R, R)\,dt. \tag{23}$$

Необходимость вытекает из равенства (21). Достаточность можно вывести из условия минимума функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} (A^{-1}(R+A\delta x), R+A\delta x)\,dt$$

при $\delta x = 0$ на линейном подпространстве функций δx, удовлетворяющих (20). Для этого воспользуемся методом множителей Лагранжа: считая λ новым переменным, составим вариационное уравнение с лагранжианом

$$(A^{-1}(R+A\delta x), R+A\delta x)/2 - \lambda\delta N - \lambda M\delta x.$$

Простое вычисление приводит к соотношению

$$-(\lambda\partial N/\partial\dot{x})^{\cdot} = R + A\delta x - \lambda\partial N/\partial x - \lambda M,$$

которое должно выполняться при $\delta x = 0$. В результате получим первое уравнение системы (19). Что и требовалось.

Если $N = 0$, то при $t_2 - t_1 \to 0$ из (23) можно вывести локальный обобщенный принцип Гаусса, установленный в п. 3. Подчеркнем, что вариационный принцип (23) справедлив для любой положительно определенной матрицы A.

7. Рассмотрим снова уравнения (19). Пусть

$$g^\alpha\colon x_0 \to x_\alpha$$

— группа преобразований конфигурационного пространства в фиксированный момент времени. Эта группа — поток динамической системы, порождаемой векторным полем

$$w = \left.\frac{dx_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{24}$$

Как известно, моментом механической системы относительно группы g называется величина

$$I = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\, w.$$

Пусть $t \to x_0(t)$ — движение. Элемент группы g^α переводит его в

$$x_\alpha(t) = g^\alpha(x_0(t)).$$

Положим

$$\dot{w} = \left.\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial\alpha\,\partial t}\right|_{\alpha=0}.$$

Условие инвариантности кинетической энергии T относительно продолженного действия группы g имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\,\dot{w} + \frac{\partial T}{\partial x}\, w = 0. \tag{25}$$

Предположим, что группа g сохраняет кинетическую энергию и в каждый момент времени поле симметрий (24) является возможным перемещением системы (то есть уравнение (20) удовлетворяется при подстановке $\delta x = w$). Тогда

$$\left(I + \lambda\,\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\, w\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = Fw. \tag{26}$$

Действительно,

$$[T]w = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\, w - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\,\dot{w} + \frac{\partial T}{\partial x}\, w\right) = \dot{I}$$

согласно условию (25). Далее,

$$-Rw = \left(\lambda\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} w - \lambda\frac{\partial N}{\partial x} w - \lambda M w = \left(\lambda\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\, w\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\,\dot{w} + \frac{\partial N}{\partial x}\, w + Mw\right) = \left(\lambda\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\, w\right)^{\boldsymbol{\cdot}}$$

согласно предположению, что поле w есть возможное перемещение. Суммируя сказанное, из первого уравнения (19) выводим равенство (26).

Это равенство — далеко идущее обобщение классической теоремы Нётер. Если момент силы F относительно группы g равен нулю ($Fw = 0$), то из (26) получаем первый интеграл уравнений движения. При $N = 0$ (для систем с сервосвязями Бегена) соотношение (26) представляет непосредственное расширение классической теоремы об изменении момента.

8. Обсудим теперь условия применимости теоремы об изменении кинетической энергии. Умножая первое уравнение (19) на $\dot{x}$, после элементарных преобразований получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(E + \lambda \frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\,\dot{x}\right)^{\cdot} = F\dot{x} + \lambda\{\delta N\big|_{\dot{x}} + M\dot{x}\}, \tag{27}$$

где

$$E = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} - T.$$

Следовательно, если кинетическая энергия не зависит явно от времени и в каждый момент скорость системы является возможным перемещением системы (то есть удовлетворяет соотношению (20)), то

$$\left(E + \lambda \frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\,\dot{x}\right)^{\cdot} = F\dot{x}.$$

Для потенциальных сил получаем обобщенный интеграл энергии; он переходит в обычный интеграл энергии для сервосистем Бегена (когда $N = 0$).

Пусть теперь функции T и N не зависят явно от времени. Тогда (27) преобразуется в следующее соотношение:

$$\left(E + \lambda\left(\frac{\partial N}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} - N\right)\right)^{\cdot} = F\dot{x} - \dot{\lambda}N + M\dot{x}.$$

Если $N = \Phi$ и $M\dot{x} = 0$ в каждый момент времени, то получаем следующий вариант теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\left(E + \lambda\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} - \Phi\right)\right)^{\cdot} = F\dot{x}.$$

Если предположить дополнительно, что сила F потенциальна, то отсюда вытекает интеграл энергии для вакономных систем.

Конечно, если $N = \Phi$ и Φ не зависит явно от времени, то $\delta N(= \delta\Phi) = 0$ и уравнение (20) для возможных перемещений переходит в более простое $M\delta x = 0$.

Выводы пунктов 7 и 8 переносятся и на уравнения (22).

9. В заключение сделаем ряд замечаний исторического характера. Сервосвязи открыты Бегеном и описаны в его диссертации 1922 года (имеется русский перевод [7]). Беген рассмотрел класс сервосвязей, которые можно осуществить с помощью ругулируемых обобщенных сил (ср. п. 2). Сервосвязи из пп. 4–5 не охватываются теорией Бегена. Кроме того, в классических работах [7], [8, гл. 24] не указывались в явном виде условия их реализуемости. Обобщенные уравнения Аппеля для систем с сервосвязями Бегена [8, п. 470] легко получить из обобщенного принципа Гаусса (п. 3). Идея введения новых возможных перемещений вида (13) принадлежит Бегену. Однако теория систем с сервосвязями не была в должной мере раскрыта с позиций общих принципов динамики. В частности, не было замечено, что определение возможных перемещений является независимой аксиомой динамики: разные способы введения возможных перемещений порождают различные модели систем со связями. На это обстоятельство указано в работе [6, V].

Автор признателен Я. В. Татаринову за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Список литературы

[1] Якоби К. Лекции по динамике. Москва – Ленинград: ОНТИ, 1936. 272 с.

[2] Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. Москва: АН СССР, 1962. 404 с.

[3] Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики: В 2-х тт.: Т. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы: Ч. 1. Москва: ИЛ, 1951. 435 с.

[4] Четаев Н. Г. О принципе Гаусса // Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 3, 1932/1933, т. 6, с. 68–71.

[5] Суслов Г. К. Теоретическая механика. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1946. 655 с.

[6] Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями: I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1982, № 3, с. 92–100;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1982, № 4, с. 70–76;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: III // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1983, № 3, с. 102–111;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: IV. Интегральные принципы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1987, № 5, с. 76–83;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: V. Принцип освобождаемости и условие идеальности связей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1988, № 6, с. 51–54.

[7] Беген А. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. Москва: Наука, 1967. 171 с.

[8] Аппель П. Теоретическая механика: Т. 2. Москва: Физматгиз, 1960. 487 с.

Principles of dynamics and servo-constraints

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

It is well known that in the Béghin – Appel theory servo-constraints are realized using controlled external forces. In this paper an expansion of the Béghin – Appel theory is given in the case where servo-constraints are realized using controlled change of the inertial properties of a dynamical system. The analytical mechanics of dynamical systems with servo-constraints of general form is discussed. The key principle of the approach developed is to appropriately determine virtual displacements of systems with constraints.

MSC 2010: 70E17
Keywords: servo-constraints, d'Alembert – Lagrange principle, virtual displacements, Gauss principle, Noether theorem

Received January 29, 2015, accepted February 04, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 169–178 (Russian)