



УДК: 517.9, 574.34
MSC 2010: 37G35

Бассейны притяжения кластеров в системах связанных отображений

М. П. Кулаков, Е. Я. Фрисман

В данной работе изучается феномен кластеризации и мультистабильности в системе связанных логистических отображений Рикера. Предлагается методика построения бассейнов некоторых фаз кластеризации. Для этого рассматривается несколько одновременно возможных и принципиально разных траекторий системы, соответствующих различным фазам кластеризации, которые имеют свои области притяжения (бассейны) в фазовом пространстве и области существования в параметрическом пространстве. Предлагается подход, позволяющий аппроксимировать каждую фазу кластеризации системой неидентичных несимметрично связанных отображений, состоящей из меньшего числа уравнений, равного числу кластеров. Показано, что формирование и трансформация кластеров происходит таким же образом и с теми же бифуркациями, как и рождение несинхронных режимов в аппроксимирующих системах.

Ключевые слова: метапопуляция, мультистабильность, система связанных отображений, кластеризация, бассейн притяжения

1. Введение

При описании сложной динамики распределенных систем (электрические устройства, химические системы типа «реакция – диффузия», нейроподобные системы, биологические популяции) могут привлекаться системы или решетки связанных отображений. Такие системы, впервые предложенные в работах [1–9], представляют собой набор связанных логистических отображений, демонстрирующих сложную динамику и хаос. Связь между отдельными элементами такой решетки может носить глобальный характер, когда мгновенные

Получено 07 июля 2014 года
После доработки 16 декабря 2014 года

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31443 мол_а.

Кулаков Матвей Павлович
k_matvey@mail.ru
Фрисман Ефим Яковлевич
frisman@mail.ru

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
679016, г. Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, д. 4



состояния одного осциллятора оказывают влияние на состояние всех остальных, и тогда говорят о решетках глобально связанных отображений. Однако при описании, например, динамики биологических популяций, когда каждый одиночный осциллятор может интерпретироваться как локальная популяция, связь между осцилляторами в виде сезонной миграции, очевидно, не может носить глобальный характер. В этом случае связанными оказываются лишь рядом стоящие смежные популяции, для описания динамики которых логично использовать системы не глобально связанных нелинейных колебательных элементов (например, одномерных отображений, рассмотренных в работах [10–13]).

Как известно, системы связанных отображений характеризуются наличием эффектов мультистабильности, синхронизации, перемежаемости и кластеризации, изучавшихся в работах [6, 11, 14–22]. Сам по себе процесс образования групп фазовых переменных или кластеров, в пределах которых динамика фазовых переменных синхронна, можно рассматривать как аналог образования в системах миграционно-связанных популяций (метапопуляциях) устойчивых ядерных группировок особей, окруженных флуктуирующими спутниковыми популяциями [23, 24]. Будучи интересными с позиций нелинейной динамики, эти феномены значительно осложняют возможность использования моделей данного типа для описания динамики реальных популяций. В частности, затрудняется возможность идентификации параметров, что выражается в получении множества оценок параметров, вызванного мультистабильным характером динамических режимов и формированием различных фаз кластеризации [13].

Вместе с тем исследования феномена кластеризации далеки от завершения. В частности, недостаточно исследованы закономерности формирования кластеров в зависимости от начального распределения фазовых переменных или, выражаясь биологическими терминами, начального распределения особей по ареалу, а также в зависимости от числа и типа связей (инерциальная, диссипативная или их комбинация) между элементами системы и формы ареала моделируемой популяции.

В данной работе исследуется феномен кластеризации, возникающий в системах связанных логистических отображений, в которых каждый одиночный осциллятор связан с небольшим числом «соседних» с ними. Предлагается методика выделения бассейнов притяжения некоторых фаз кластеризации, возникающих в таких решетках. В качестве одиночного колебательного элемента рассматривается широко используемая в популяционной биологии модель «запас – пополнение» Рикера. Однако представляемые в работе результаты являются (по большей части) общими для любого другого унимодального отображения.

2. Кластеризация в системах не глобально связанных отображений

В системе глобально связанных отображений с диссипативной связью между элементами динамика каждого одиночного элемента $x_n^{(i)} \in R$ ($i = 1, 2, \dots, N$) складывается из динамик всех остальных элементов и может быть записана в виде

$$x_{n+1}^{(i)} = \sum_{j=1}^N m_{i,j} f(x_n^{(j)}) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.1)$$

где $0 \leq m_{i,j} \leq 1$ ($i \neq j$) — коэффициент связи j -го элемента с i -м или миграции особей из j -й субпопуляции в i -ю, а коэффициент $m_{i,i} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N m_{j,i}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) указыва-

ет на вклад локальной динамики, определяемой одиночным уравнением $x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)})$, в динамику i -го элемента после его взаимодействия со всеми остальными (в биологических терминах — доля особей, оставшихся в i -й субпопуляции после эмиграции), $f(x)$ — унимодальная функция, определяющая динамику одиночного осциллятора.

Очевидно, что при равенстве всех $m_{i,j} = m$ ($i \neq j$), то есть когда связь между элементами носит полностью симметричный характер, система (2.1) представляет собой систему глобально связанных отображений и имеет следующий вид:

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - (N - 1)m) f(x_n^{(i)}) + m \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.2)$$

В дальнейшем будем пользоваться системой (2.1) с полностью симметричным характером связи или матричной формой системы (2.1):

$$x_{n+1} = M f(x_n),$$

где x_n — матрица-столбец, состоящая из значений $x_n^{(i)}$, квадратная матрица $M = (m_{i,j})$ — матрица связи (миграции).

В большинстве работ [1, 2, 6, 8, 15, 17, 18], связанных с изучением системы (2.1) и ее аналогов для описания динамики одиночного осциллятора, используются однопараметрические отображения (квадратичное Фейгенбаума, кубическое и т. п.) с областью значений $[0; 1]$ или $[-1; 1]$, переводящие их в себя. В данной работе будем пользоваться широко применяемой в математической популяционной биологии зависимостью «запас – пополнение» Рикера

$$x_{n+1} = a x_n e^{-x_n}, \quad (2.3)$$

отображающей $R_+ = [0; \infty)$ в себя и обладающей универсальностью Фейгенбаума [10, 13, 20, 25–27]. В уравнении (2.3) коэффициент a — репродуктивный потенциал, который является бифуркационным параметром.

Использование системы (2.1) в качестве модели реальных систем (например, популяций животных, распределенных по некоторому ареалу, — метапопуляций), предполагает, что каждый осциллятор описывает динамику локальной популяции или субпопуляции, проживающей на определенной территории, имеющей четкие и постоянные границы. При этом связь между отдельными субпопуляциями выражается в перемещении особей в местах контакта с соседними субареалами. Как уже упоминалось, в этом случае связь не может носить глобальный характер.

На рисунке 1 приведены примеры возможного расположения субареалов на плоской территории, в местах их контакта происходят миграционные перемещения, отмеченные стрелками. Переменная $x^{(i)}$ может быть интерпретирована как численность или плотность популяции в i -м субареале в произвольный дискретный момент времени. В этом случае число особей, перемещающихся из i -й территории в j -ю, будет строго прямо пропорционально $x^{(i)}$, а доля $m_{j,i}$ таких особей будет явно зависеть от длины границы между i -м и j -м субареалом. В этом случае обязательно, что $m_{i,j} = m_{j,i}$. Такой подход хорошо известен в математической популяционной биологии и нашел применение, например, в моделях идеального свободного распространения, построенных на основе связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [28, 29].

Все осцилляторы (субпопуляции) на рисунке 1 пронумерованы слева направо, и порядок счета выделен по строкам одним цветом. В простейших случаях, показанных на рисунках 1а и 1б, площади всех субареалов оказываются равными. Равными также будут



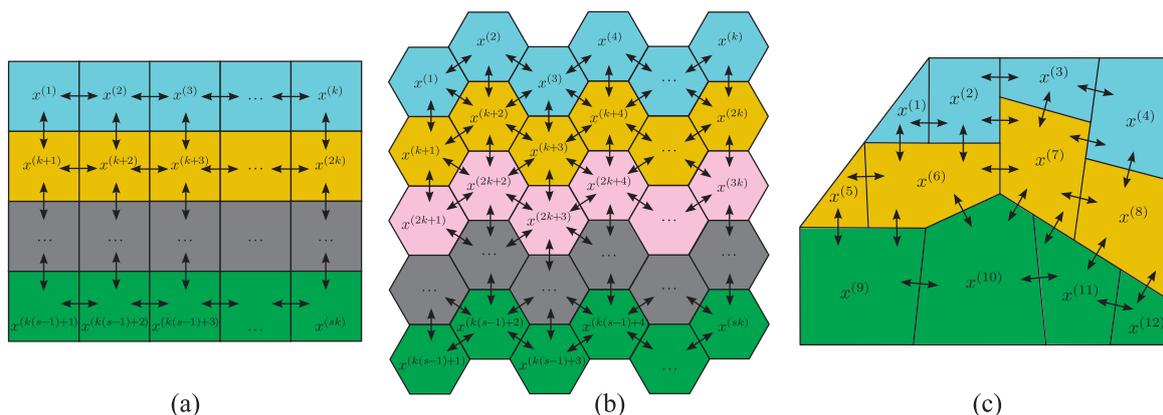


Рис. 1. Система связанных осцилляторов или популяций, где стрелками показаны перемещения особей в местах контакта субареалов: а), б) правильная и с) неправильная форма субареалов.

все длины границ; таким образом, значения всех $m_{i,j}$ ($i \neq j$) оказываются идентичными, кроме явно нулевых для субареалов, не имеющих общих границ (несвязанных субпопуляций). В более общем случае одиночный осциллятор может быть связан с любым числом элементов: так, на рисунке 1с осциллятор $x^{(7)}$ связан с семью своими соседями, а $x^{(5)}$ — лишь с двумя. Длины границ и, следовательно, коэффициенты связи в этом случае будут совершенно разными. Каждому из представленных случаев пространственного расположения субареалов соответствует своя матрица связи M , которая косвенно содержит информацию о способе нумерации элементов $x^{(i)}$ и их пространственном расположении. Таким образом, при диссипативном характере связи, то есть когда миграция носит сезонный характер и происходит в промежутках между процессами воспроизводства, динамика всех таких систем связанных осцилляторов или субпопуляций может быть описана моделью (2.1) с матрицей M , соответствующей конкретному пространственному расположению.

В дальнейшем будем рассматривать простейший случай расположения колебательных элементов $x^{(i)}$, изображенный на рисунке 1а. Изучение других случаев, включая исследование формы субареалов, их числа и т. п., выходит за рамки данной работы.

Прежде чем переходить непосредственно к исследованию системы (2.1), необходимо сделать важное замечание. Для того чтобы система диссипативно связанных отображений (2.1) и (2.2) с идентичными коэффициентами связи, аналогично отображению (2.3), переводила R_+^N в себя (N — число элементов в системе) и имела ограниченные траектории, необходимо и достаточно, чтобы $a > 0$ и $0 \leq m \leq \frac{1}{p}$, где p — максимальное количество элементов, с которыми связан одиночный осциллятор. В противном случае найдется такой осциллятор $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), для которого $m_{i,i} < 0$, и правые части одного или нескольких уравнений системы (2.1) станут отрицательны для любой начальной точки $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(N)}) \in R_+^N$. Например, если связь между элементами системы (2.1) выглядит, как показано на рисунке 1а, то $p = 4$, а если как на рисунке 1б, то $p = 6$. В самом общем случае — для системы глобально связанных отображений (2.2) — имеем $p = N - 1$. В случае неидентичности коэффициентов связи системы (2.1) такими условиями будут $a > 0$, $0 \leq m_{i,j} \leq 1$ и $\sum_{j=1}^N m_{j,i} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, N$ и $j = 1, 2, \dots, N$).

При исследовании систем вида (2.1) или (2.2) очень важной оказывается задача описания условий и механизмов синхронизации и десинхронизации динамики каждой из фазовых переменных, а также образование групп синхронных осцилляторов (кластеров).

Будем в дальнейшем говорить, что два или более осциллятора системы (2.1) имеют полностью синхронную динамику, если их реализации асимптотически равны, то есть $|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}| \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j$) при $n \rightarrow \infty$ и при условии, что траектории $x_n^{(i)}$ и $x_n^{(j)}$ ограничены. В противном случае, если две или более фазовые реализации асимптотически не равны одновременно, будем говорить о несинхронных осцилляторах (2.1). Помимо состояния полной синхронизации динамики фазовых переменных элементов системы (2.1), используем также понятие частичной синхронизации с захватом периода и фазы колебаний, для простоты назовем это синфазной динамикой системы (2.1). В этом случае совпадают периоды и фазы колебаний.

Группы смежных друг с другом одиночных осцилляторов системы (2.1), демонстрирующих по крайней мере синфазные реализации, будем называть кластером синхронизации.

С биологической точки зрения, кластеризация как процесс образования кластеров подобна тому, как в ходе пространственного перераспределения особей по ареалу может образовываться множество постоянных или временных группировок различного размера с принципиально разными динамическими характеристиками (ядерные и спутниковые). Идентификация таких групп на фоне всей метапопуляции возможна, в частности, благодаря синхронному поведению всех составляющих эти группы частей, то есть более мелких и неделимых групп особей [24]. Изменение условий обитания может привести к распаду таких групп, и тогда динамика этих мелких групп уже не будет синхронной.

На рисунке 2 приведен пример возможного образования 12 кластеров разного размера из 42 более мелких точечных популяций. Для наглядности эти кластеры, или группировки особей, показаны разными цветами. По форме и своему расположению модельная метапопуляция, изображенная на рисунке 2а, специально выбрана подобной системе связанных осцилляторов, изображенной на рисунке 1с. В данном случае система неидентичных, со сложной формой и неравными границами субареалов покрыта равномерной решеткой из субпопуляций, которые полностью идентичны, и их субареалы имеют равные границы, а связь

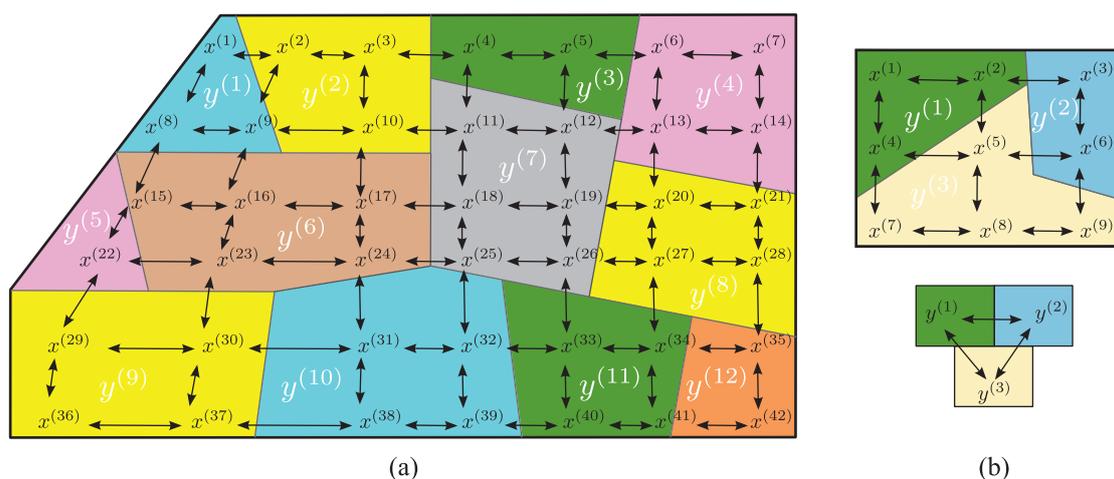


Рис. 2. Кластеризация в метапопуляции: а) образование 12 кластеров из 42 точечных популяций, б) образование 3 кластеров из 9 точечных популяций.

между элементами подобна изображенной на рисунке 1а. Кластеризация означает, например, что динамика осцилляторов $x^{(1)}$, $x^{(8)}$ и $x^{(9)}$ будет синфазна, а $x^{(1)} + x^{(8)} + x^{(9)} = y^{(1)}$, и т. д. Естественно, что такое покрытие может быть осуществлено множеством систем идентичных симметрично связанных отображений, которые отличаются числом элементов в решетке, количеством элементов в кластерах и их формой. Кроме того, приведенный на рисунке 2а вариант покрытия иллюстрирует процесс образования в метапопуляциях группировок особей, который оказывается подобен кластеризации в системах не глобально связанных отображений.

С формальной точки зрения, когда точечные локальные идентичные популяции (осцилляторы) образуют кластер, суммируется их численность (значения фазовых переменных), происходит объединение ареалов, которое приводит к объединению их границ, а следовательно, каким-то образом суммируются коэффициенты связи элементов, расположенных на границе кластера. Например, рассмотрим случай, изображенный на рисунке 2б: если динамика каждой переменной $x^{(i)}$ описывается системой симметрично связанных идентичных отображений вида (2.1), то, во-первых, можно принять, что $y_n^{(1)} = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + x_n^{(4)}$, $y_n^{(2)} = x_n^{(5)} + x_n^{(7)} + x_n^{(8)} + x_n^{(9)}$ и $y_n^{(3)} = x_n^{(3)} + x_n^{(6)}$, а во-вторых, коэффициент связи первого кластера со вторым будет каким-то способом зависеть от $m_{2,5} = m_{5,2}$, $m_{4,5} = m_{5,4}$ и $m_{4,7} = m_{7,4}$, второго с третьим — от $m_{5,6} = m_{6,5}$ и $m_{6,9} = m_{9,6}$, третьего с первым — от $m_{2,3} = m_{3,2}$.

Выведем уравнения, описывающие динамику новых переменных $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$, при условии, что все составляющие кластер осцилляторы имеют строго синхронное поведение, то есть в асимптотическом случае $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = x_n^{(4)}$, $x_n^{(5)} = x_n^{(7)} = x_n^{(8)} = x_n^{(9)}$ и $x_n^{(3)} = x_n^{(6)}$ (при $n \rightarrow \infty$). Просуммируем в отдельности уравнения из системы (2.1), которые описывают динамику первого, второго и третьего кластера соответственно. Тогда после приведения слагаемых легко получить

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = f_1(y_n^{(1)}) \left(1 - \frac{4}{3}m\right) + \frac{3}{4}mf_2(y_n^{(2)}) + \frac{1}{2}mf_3(y_n^{(3)}), \\ y_{n+1}^{(2)} = f_2(y_n^{(2)}) \left(1 - \frac{5}{4}m\right) + mf_1(y_n^{(1)}) + mf_3(y_n^{(3)}), \\ y_{n+1}^{(3)} = f_3(y_n^{(3)}) \left(1 - \frac{3}{2}m\right) + \frac{1}{3}mf_1(y_n^{(1)}) + \frac{1}{2}mf_2(y_n^{(2)}), \end{cases} \quad (2.4)$$

где $f_1(y_n^{(1)}) = f(x_n^{(1)}) + f(x_n^{(2)}) + f(x_n^{(4)})$, $f_2(y_n^{(2)}) = f(x_n^{(5)}) + f(x_n^{(7)}) + f(x_n^{(8)}) + f(x_n^{(9)})$ и $f_3(y_n^{(3)}) = f(x_n^{(3)}) + f(x_n^{(6)})$. Учитывая асимптотическое равенство фазовых переменных, можно утверждать, что $f_1(y_n^{(1)}) = 3f(x_n^{(1)})$, $f_2(y_n^{(2)}) = 4f(x_n^{(5)})$ и $f_3(y_n^{(3)}) = 2f(x_n^{(3)})$, где первый множитель — число элементов в кластере. Тогда, если f — зависимость «запас — пополнение» Рикера, то

$$f_1(y_n^{(1)}) = ay_n^{(1)} e^{-\frac{1}{3}y_n^{(1)}}, \quad f_2(y_n^{(2)}) = ay_n^{(2)} e^{-\frac{1}{4}y_n^{(2)}} \quad \text{и} \quad f_3(y_n^{(3)}) = ay_n^{(3)} e^{-\frac{1}{2}y_n^{(3)}}. \quad (2.5)$$

В популяционном смысле дробь в показателе степени функций (2.5) означает, что экологическая ниша кластера, состоящего из локальных популяций, прямо зависит от его размера (числа локальных точечных популяций, его образующих). Чем больше размер кластера, тем большей численности может достичь локальная популяция (кластер), описываемая одним из уравнений вида (2.4).

Таким образом, динамика системы симметрично связанных изначально идентичных осцилляторов (2.1), в которой образуются кластеры с полностью синхронными элементами, может быть описана системой неидентичных несимметрично связанных элементов (2.4), которую можно назвать аппроксимирующей для системы (2.1). Однако ниже будет показано, что образование в системах не глобально связанных осцилляторов устойчивых кластеров, состоящих из полностью синхронных элементов, является скорее исключением, особенно в системах большой размерности. В таких системах формируются преимущественно режимы с частичной синхронизацией. Тем не менее, можно продемонстрировать, что в ряде случаев динамика системы типа (2.4) способна неплохо аппроксимировать динамику кластеров. На рисунке 3а приведена динамика девяти колебательных элементов, описываемых системой (2.1). В данном случае происходит частичная синхронизация, о чем свидетельствует едва заметное слияние графиков $x_n^{(i)}$. Для удобства восприятия прямоугольниками выделены графики переменных, образующих один кластер.

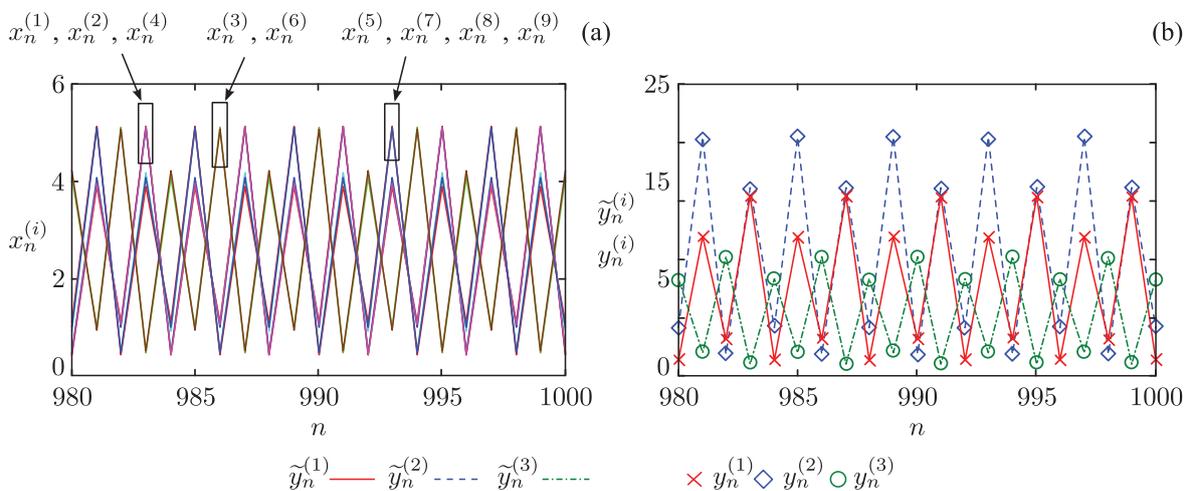


Рис. 3. Динамика системы (2.1) (а) и системы (2.4) (б), а так же динамика сумм элементов кластеров, при $a = 14$, $m = 0.005$, $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(4)} = 0.44$, $x_0^{(5)} = x_0^{(7)} = x_0^{(8)} = x_0^{(9)} = 1.02$ и $x_0^{(3)} = x_0^{(6)} = 4.2$.

На рисунке 3б в виде линий показана динамика трех сумм: $\tilde{y}_n^{(1)} = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + x_n^{(4)}$, $\tilde{y}_n^{(2)} = x_n^{(5)} + x_n^{(7)} + x_n^{(8)} + x_n^{(9)}$ и $\tilde{y}_n^{(3)} = x_n^{(3)} + x_n^{(6)}$; крестом, ромбом и кругом отмечена динамика трех колебательных элементов, описываемых системой (2.4) с начальной точкой итерирования $y_0^{(1)} = x_0^{(1)} + x_0^{(2)} + x_0^{(4)}$, $y_0^{(2)} = x_0^{(5)} + x_0^{(7)} + x_0^{(8)} + x_0^{(9)}$ и $y_0^{(3)} = x_0^{(3)} + x_0^{(6)}$. В данном случае максимальная относительная ошибка отклонения сумм $\tilde{y}_n^{(j)}$ от переменных $y_n^{(j)}$, описываемых системой (2.4), выраженная в процентах, то есть $100\% \cdot \max_n \left(\left| \frac{\tilde{y}_n^{(j)} - y_n^{(j)}}{\tilde{y}_n^{(j)}} \right| \right)$ ($j = 1, 2, 3$), равна 0.12%, 0.319% и 0.15% (соответственно, для первого, второго и третьего кластера). С ростом силы связи между осцилляторами, когда на динамику отдельного элемента все большее влияние оказывают соседние элементы, наблюдается рост данной ошибки, до того момента, когда формирование данных кластеров оказывается невозможным для используемой начальной точки.

Возникающие отклонения между суммами элементов кластеров и переменными аппроксимирующей системы (2.4) объясняются тем, что в плоской решетке не глобально связанных отображений разные элементы оказываются связаны с различным числом элементов. Например, те из них, что расположены на «границе ареала», связаны лишь с двумя

или тремя своими соседями, а расположенные дальше от границ — уже с четырьмя, то есть первые имеют «более выгодное» положение, чем вторые. Вместе с тем противоположное воздействие испытывают осцилляторы в пределах кластера. Так, те из них, что расположены на границе кластера, связаны с представителями соседнего кластера, имеющего иную степень синхронизации (например, иную фазу колебаний). Как следствие, эти элементы за счет прямого воздействия имеют явно иную амплитуду колебания, чем осцилляторы в центре кластера, которые связаны с представителями своего кластера и прямо не связаны с другими кластерами. Сочетание двух этих процессов приводит лишь к частичной аппроксимации системы (2.1) системой (2.4).

Данный результат легко обобщается для случая образования двух кластеров с полностью синхронными элементами или близкими к этому. Если первый кластер системы (2.1) состоит из $N_0 < N$ элементов и второй, соответственно, из $N - N_0$, а число непосредственных (прямых) связей (миграционных переходов) между первым и вторым кластером равно N_S , то уравнения, аппроксимирующие суммарную динамику каждого кластера, имеют вид

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{N_S}{N_0} m\right) f_1(y_n^{(1)}) + \frac{N_S}{N - N_0} m f_2(y_n^{(2)}), \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{N_S}{N - N_0} m\right) f_2(y_n^{(2)}) + \frac{N_S}{N_0} m f_1(y_n^{(1)}), \end{cases}$$

где $y_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{N_0} x_n^{(j)}$, $y_n^{(2)} = \sum_{j=N_0+1}^N x_n^{(j)}$, $f_1(y_n^{(1)}) = a y_n^{(1)} e^{-\frac{1}{N_0} y_n^{(1)}}$, $f_2(y_n^{(2)}) = a y_n^{(2)} e^{-\frac{1}{N - N_0} y_n^{(2)}}$.

С заменой $y^{(1)} \rightarrow \frac{1}{N_0} y^{(1)}$, $y^{(2)} \rightarrow \frac{1}{N - N_0} y^{(2)}$ данная система значительно упрощается:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{N_S}{N_0} m\right) f(y_n^{(1)}) + \frac{N_S}{N_0} m f(y_n^{(2)}), \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{N_S}{N - N_0} m\right) f(y_n^{(2)}) + \frac{N_S}{N - N_0} m f(y_n^{(1)}), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $f(y) = a y e^{-y}$.

При решении системы (2.1), (2.4) или (2.6) выбор начальной точки итерирования оказался принципиально важным для сохранения вида и размера кластеров. Так, иные начальные значения даже при сохранении равенств $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(4)} = x_0^{(5)} = x_0^{(7)} = x_0^{(8)} = x_0^{(9)}$ и $x_0^{(3)} = x_0^{(6)}$ (см. рис. 3) могут приводить к формированию принципиально иных кластеров, уже не описываемых системой (2.4). Поэтому далее сосредоточимся на исследовании данной зависимости на примере формирования двух кластеров.

3. Кластеризация как результат мультистабильности динамических режимов

Как известно, колебательные режимы систем вида (2.1) обладают мультистабильным характером при различных видах функции $f(x)$, что показано, в частности, в работах [6, 30]. Если взять эту функцию в виде зависимости «запас – пополнение» Рикера (2.3), то несложно показать, что после первой бифуркации неподвижной точки $\bar{x} = \bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(2)} = \dots \bar{x}^{(N)} = h = \ln(a)$ и формирования устойчивого 2-цикла (при $a > e^2$) в реализациях системы (2.1)



возможно несколько принципиально разных траекторий, реализуемых в зависимости от начальной точки итерирования $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(N)})$. Для решетки из четырех связанных отображений, показанной на рисунке 1а, и $k = s = 2$ ($N = ks = 4$), легко выделить четыре вида таких траекторий:

- полностью синхронная динамика всех фазовых переменных и формирование одного кластера (рис. 4а);
- образование двух равных кластеров, в пределах которых осцилляторы синхронны или синфазны (в зависимости от длины цикла), а между собой элементы из разных кластеров не синфазны (рис. 4б);
- формирование двух не равных кластеров, один из которых состоит из трех элементов, а другой из одного-единственного (рис. 4с);
- динамика каждого осциллятора не синфазна с элементами, с которыми она непосредственно связана (рис. 4д), а число кластеров при этом можно принять равным количеству элементов системы (2.1).

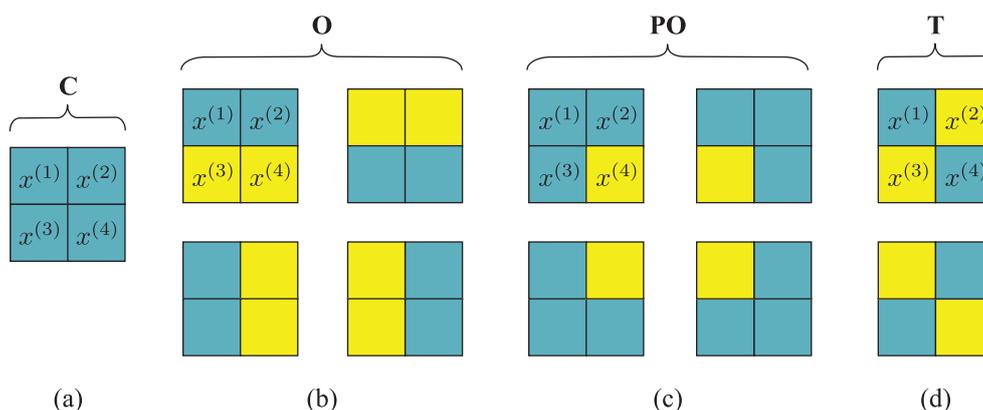


Рис. 4. Кластеры системы (2.1) при $k = 2$ и $s = 2$, где клетки одного цвета показывают синфазность колебаний данных осцилляторов.

При $k = s = 2$ и связи, показанной на рисунке 1а, матрица связи имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 2m & m & m & 0 \\ m & 1 - 2m & 0 & m \\ m & 0 & 1 - 2m & m \\ 0 & m & m & 1 - 2m \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что каждый осциллятор связан с двумя другими, а поэтому $p = 2$; тогда для того, чтобы система отображений (2.1) переводила R_+^4 в себя, необходимо и достаточно, чтобы $0 \leq m \leq 0.5$.

Несложно увидеть, что траектории, соответствующие некогерентной динамике, могут быть реализованы несколькими способами, отличающимися числом и расположением синфазных элементов, что показано на рисунке 4 несколькими сочетаниями квадратов разного



цвета. Перечисленные виды колебательных режимов можно условно сравнить с хорошо известными фазами кластеризации (так называемыми фазами Канеко) [6]. Первый вариант траектории можно соотнести с когерентной фазой (С), два последующих — с упорядоченной (О) и частично упорядоченной (РО) фазой, последний — с турбулентной фазой (Т). В свою очередь, существует несколько вариантов некогерентных фаз: для упорядоченной и частично упорядоченной — четыре, для турбулентной — два. Однако качественных различий между ними нет, а при перенумерации элементов их динамика полностью совпадает. Примечательно, что после потери устойчивости нетривиального состояния равновесия эти фазы реализуются на плоскостях, построенных на собственных векторах матрицы M .

Рассмотрим особенности формирования динамических режимов данных видов кластеров. Один из способов исследования фаз кластеризации заключается в построении аппроксимирующих систем вида (2.6), состоящих из двух не идентично связанных отображений, и изучении особенностей формирования их динамики. Однако нами предлагается немного иной способ, не требующий построения таких систем и связанный лишь с фиксированием начальной точки из некоторой окрестности бассейна притяжения данных фаз.

4. Карты динамических режимов некоторых фаз кластеризации

Одним из достаточно наглядных инструментов изучения эволюции динамических режимов являются карты динамических режимов, на которых в параметрическом пространстве отмечаются области существования устойчивых циклов и их длины. Для системы (2.1) при построении таких карт в каждой точке параметрического пространства из некоторого начального состояния $(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(N)})$ вычисляется несколько тысяч итераций системы (2.1) и по последним точкам траектории $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$ определяется длина цикла каждой фазовой переменной.

Для систем с мультистабильным характером динамических режимов выбор начальной точки итерирования оказывается принципиальным. В этом случае начальная точка обычно либо фиксирована, либо случайна, и тогда мы имеем карту динамических режимов, полученных конкретно из этих начальных состояний. Однако для систем вида (2.1), особенно при не глобальном характере связи, априори можно указать характер всех возможных динамических режимов, примеры которых показаны на рисунке 4. Тогда, зафиксировав начальную точку, достаточно близкую к какому-либо кластеру, можно ожидать, что после серии итераций траектория системы (2.1) останется в пределах бассейна притяжения того кластера, внутри которого и лежит эта начальная точка, либо покинет его. Это покажет, насколько «удачно» была выбрана начальная точка и какому бассейну она принадлежит. С другой стороны, не имеет значения, из какой части бассейна притяжения брать начальную точку (быть может, кроме границы бассейна) — траектория системы рано или поздно сойдется к данному кластеру. Используя это свойство и грамотно выбрав начальную точку, можно построить карты динамических всех фаз кластеризации, а затем и их бассейны притяжения.

При $k = s = 2$ очевидно, что когерентная фаза реализуется в окрестности биссектрисы первого квадранта фазового пространства и, зафиксировав начальную точку, близкую к биссектрисе, или даже с равными координатами $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = x_0^{(4)}$, можно проследить эволюцию этой фазы. Одно из состояний упорядоченной фазы легко получить,

положив $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 1.5 \ln(a) \neq x_0^{(3)} = x_0^{(4)} = 0.5 \ln(a)$, частично упорядоченной — с координатами $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = 1.5 \ln(a) \neq x_0^{(4)} = 0.5 \ln(a)$, турбулентной — с координатами $x_0^{(1)} = x_0^{(4)} = 1.5 \ln(a) \neq x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = 0.5 \ln(a)$, где $\bar{x} = h = \ln(a)$ — неподвижная точка системы (2.1). Далее при построении бассейнов притяжения будет показано, что для данных двухкластерных состояний точка $(1.5 \ln(a), 0.5 \ln(a))$ почти всегда лежит в бассейне несинфазных режимов и ее использование в качестве начального состояния, приводящего к образованию этих кластеров, вполне оправдано.

На рисунке 5 приведены полученные для данных начальных значений эскизы карт динамических режимов, где цифры показывают длины устойчивых циклов, а нижний индекс в виде буквы — соответствующий тип кластера. Буквой **К** отмечены области формирования замкнутых инвариантных кривых, а буквой **Х** — область хаотической динамики. Причем эти виды динамики наблюдаются почти для всех фаз кластеризации. Таким образом, **К_О** и **К_Т** — квазипериодическая динамика между кластерами с упорядоченной и турбулентной фазой, а в самих кластерах динамика по крайней мере синфазна. Интересно, что для частично упорядоченной фазы исключено образование предельных инвариантных кривых. Аналогично хаотический аттрактор (вернее, режим гиперхаоса) может наблюдаться между равными и неравными кластерами.

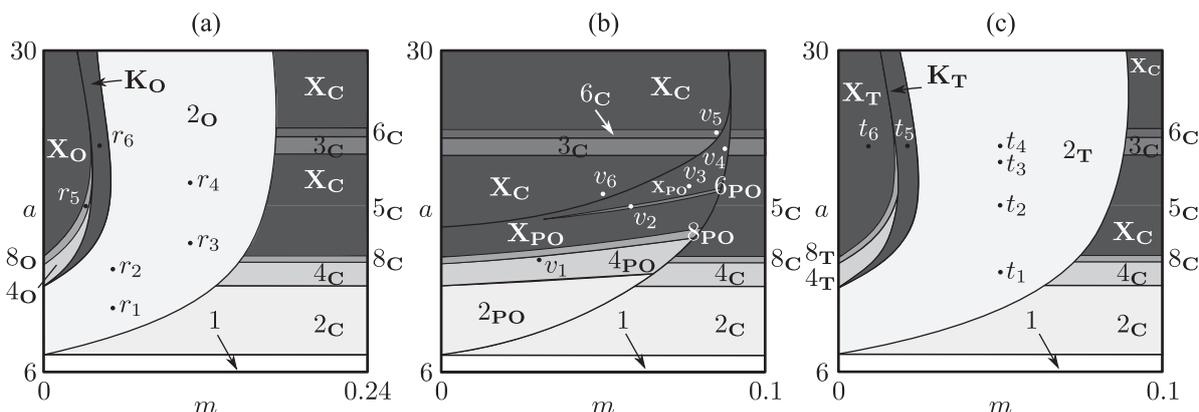


Рис. 5. Карты динамических режимов различных фаз кластеризации.

Все карты на рисунке 5 состоят из двух слоев. Первый (нижний) — это области существования когерентной фазы, совпадающей с аналогичными областями одиночного уравнения (2.3) или системы (2.1) при $m = 0$. Второй — области, в которых существуют иные кластеры с циклами разных длины.

Области существования, как и бифуркационные механизмы формирования упорядоченной фазы с циклами $2_O, 4_O, 8_O, K_O$ и X_O (рис. 5а), оказываются полностью аналогичными областям существования и механизмам формирования несинфазных циклов в системе двух связанных отображений:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = (1 - m) f(y_n^{(1)}) + m f(y_n^{(2)}), \\ y_{n+1}^{(2)} = (1 - m) f(y_n^{(2)}) + m f(y_n^{(1)}). \end{cases} \tag{4.1}$$

Система (4.1), рассмотренная в большом числе работ (в том числе в [21, 31], а при $f(y) = aye^{-y}$ — в [20, 32, 33]), аппроксимирует систему (2.1) в случае образования двух равных кластеров. Действительно, в этом случае $N = 4$ и $N_S = N_0 = 2$, тогда из (2.6) следует (4.1).



Хорошо известно [20, 21, 31], что после бифуркации удвоения единственного нетривиального состояния равновесия $\bar{x} = h = \ln(a)$ и появления устойчивого синфазного цикла длины 2 в системе (4.1) возможно рождение пары неустойчивых седловых точек, соответствующих противофазному 2-циклу. В дальнейшем он испытывает бифуркацию вил с мультипликатором, равным +1, а вокруг каждого элемента противофазного 2-цикла рождается пара седловых точек. Возникновение последних приводит к первому дроблению бассейна притяжений синфазных состояний и появлению бассейна притяжения, ставшего устойчивым, противофазного цикла длины 2. Как ни странно, но механизмы появления устойчивого режима системы (2.1), соответствующего упорядоченной фазе с равными кластерами, полностью совпадают с описанным сценарием; таким образом, упорядоченная фаза ведет себя подобно противофазному циклу длины 2. Похожие области и бифуркации наблюдаются и для турбулентной фазы, однако они реализуются в более узкой области параметрической плоскости (рис. 5с).

Принципиально иной механизм потери устойчивости отмечается для частично упорядоченной фазы. В этом случае схожим образом появляется несинфазный 2-цикл, который в дальнейшем эволюционирует по сценарию Фейгенбаума. Области существования кластеров этой фазы, изображенные на рисунке 5b (2PO, 4PO, 8PO, 6PO и XPO), напоминают искривленные области существования когерентной динамики (2C, 4C, 8C, 3C и XC). Особенностью здесь является то, что 6PO не является результатом удвоения 3PO, который оказывается невозможен для данной фазы.

5. Бассейны притяжения двухкластерных фаз

Рассмотрим некоторые закономерности образования двух кластеров. Пусть первый кластер состоит из $N_0 < N$ элементов, произвольным образом расположенных на двумерной решетке, а второй, соответственно, из $N - N_0$ элементов. Пронумеруем каждый элемент в первом кластере от 1 до N_0 , а во втором — от $N_0 + 1$ до N . Пусть динамика каждого осциллятора в пределах этих кластеров

$$\left\{ x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N_0)} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ x_n^{(N_0+1)}, x_n^{(N_0+2)}, \dots, x_n^{(N)} \right\} \quad (5.1)$$

будет синфазна при $n \rightarrow \infty$ со всеми находящимися в нем элементами. Таким образом, динамика $x_n^{(1)}$ попарно синхронна с каждым составляющим этот кластер элементом $x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_0$), а $x_n^{(N_0+1)}$ синхронен каждому элементу $x_n^{(j)}$ ($j = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N$), но между собой $x_n^{(i)}$ и $x_n^{(j)}$ не синхронны. Рассмотрим эволюцию системы отображения (2.1) из начальной точки вида

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \dots = x_0^{(N_0)}, Y_0 = x_0^{(N_0+1)} = x_0^{(N_0+2)} = \dots = x_0^{(N)} \mid X_0 \neq Y_0 \right\}, \quad (5.2)$$

которая принадлежит кластеру (5.1). После $\tau > 0$ итераций образ точки (5.2) будет иметь вид $\mathbf{x}_\tau = \left\{ x_\tau^{(1)}, x_\tau^{(2)}, \dots, x_\tau^{(N)} \right\}$. Полученные после серии итераций фазовые переменные могут образовать кластеры вида (5.1), и тогда можно говорить, что точка \mathbf{x}_0 выбрана удачно и принадлежит бассейну притяжения данного кластера, либо будут получены другие кластеры другого размера и числа заполнения. Чтобы построить бассейны притяжения данного кластера, можно попробовать оценить близость начального \mathbf{x}_0 и предельного

пространственного распределения \mathbf{x}_τ . В качестве такой оценки удобно воспользоваться коэффициентом детерминации:

$$r_n^2 = r^2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) \quad (n = \tau, \tau + 1, \dots, \tau + d), \quad (5.3)$$

где \mathbf{x}_0 соответствует набору фазовых переменных в начальный момент времени, например вида (5.2), а \mathbf{x}_n соответствует наборам после $\tau, \tau + 1, \dots, \tau + d$ итераций, взятым на устойчивом аттракторе, где d — максимальная длина цикла, достигаемая какой-либо из фазовых переменных. В случае формирования предельной инвариантной кривой достаточно рассмотреть наборы \mathbf{x}_n на одном полном обороте фазовой кривой. В результате вычисления величины (5.3) будет получено d оценок близости r_n^2 , из которых выбирается самый минимальный:

$$R^2 = \min r_n^2. \quad (5.4)$$

В случае если полученный коэффициент R^2 достаточно близок к 1, то достигаемая системой (2.1) динамика на каждой τ -й итерации с точностью до постоянного множителя совпадает с выбранным начальным состоянием \mathbf{x}_0 , и при данных значениях параметров такой режим существует, а значит, данная начальная точка принадлежит бассейну притяжения всех подобных кластеров. Если же он близок к нулю, то между этими состояниями нет сходства, а следовательно, для данных значений параметров такой фазы кластеризации не существует, либо выбранная начальная точка (5.2) не принадлежит бассейну таких кластеров. Таким образом, просканировав фазовую плоскость (X_0, Y_0) , вычисляя для каждой ее точки величину $R^2(X_0, Y_0)$ и определяя длины циклов $d(X_0, Y_0)$, можно построить бассейны притяжений выбранных в виде (5.1) двухкластерных режимов системы (2.1).

На рисунках 6–9 при $k = s = 2$ приведены примеры полученных таким образом бассейнов на плоскости (X_0, Y_0) , где X_0 и Y_0 выбраны в виде (5.2): рисунок 6 соответствует упорядоченной фазе, рисунок 8 — частично упорядоченной, а рисунок 9 — турбулентной фазе. Черным цветом показаны бассейны когерентной фазы, где исследуемые кластеры неустойчивы. Оттенками серого и белым цветом выделены бассейны устойчивых фаз кластеризации. Кроме того, отмечены конкретные виды циклов (длина и фаза кластеризации в нижнем индексе). Данные бассейны строились для точек параметрической плоскости $(a; m)$, отмеченных на рисунке 5 как $r_1, r_2, \dots, r_6, v_1, v_2, \dots, v_6$ и t_1, t_2, \dots, t_6 . Для полностью синхронной динамики всех осцилляторов, то есть когерентной фазы, величина R^2 для всех просчитанных бассейнов составляет не более 0.001. Для искомым бассейнов иных фаз кластеризации значение R^2 составляет не менее 0.999, что для объема в $N = 4$ точек указывает на 95 %-ном доверительном интервале на значимую связь начального распределения, заданного в виде (5.2) и полученного после серии итерации, то есть указывает на сохранение заданной структуры кластеров.

На рисунках 6а, 6б и 6с отмечается одновременное существование различных фаз кластеризации — когерентной ($2_C, 4_C$ и X_C) и упорядоченной (2_O); кроме того, наблюдается серия удвоения периода колебаний полностью синхронной динамики, показанная на рисунке 5 как нижний лист карты динамических режимов. В крайней правой части параметрического портрета, изображенного на рисунке 5а, бассейном притяжения режимов, соответствующих когерентной фазе синхронизации, является вся положительная часть фазового пространства. После бифуркации рождения противофазных режимов, соответствующих упорядоченной фазе, этот бассейн приобретает вид, показанный на рисунке 6а. По мере роста параметра a бассейн притяжения когерентной фазы претерпевает значительные изменения. Из односвязных двумерных областей он трансформируется в одномерную область: такой областью становится часть биссектрисы первого квадранта фазового пространства,

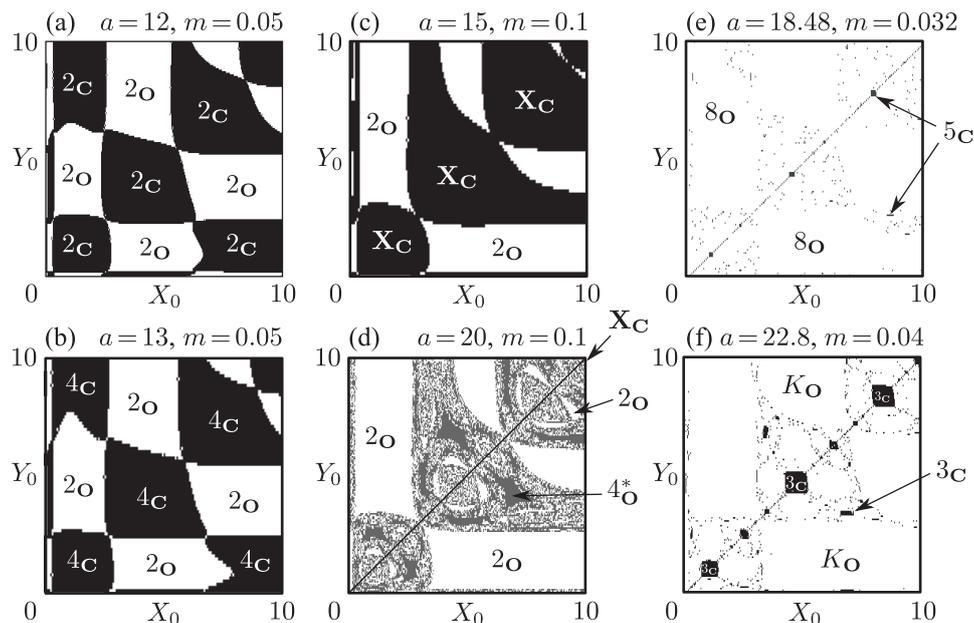


Рис. 6. Бассейны притяжения преимущественно упорядоченной фазы кластеризации в точках r_1 (a), r_2 (b), r_3 (c), r_4 (d), r_5 (e) и r_6 (f), где $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)}$ и $Y_0 = x_0^{(3)} = x_0^{(4)}$ ($X_0 \neq Y_0$).

когда в системе (2.1) формируется режим динамики, близкий к хаотической синхронизации и устойчивый лишь в диагональном направлении. Это происходит в форме катастрофы, когда упорядоченная фаза с фиксированным видом кластеров может быть реализована множеством способов. В этот момент становится возможным формирование нескольких принципиально разных траекторий, соответствующих аналогичным по виду кластерам (по расположению, форме и числу заполнения) в одной фазе. Такие кластеры и траектории отличаются характером динамики (циклы разных длин), расположением аттракторов и характерными бифуркациями. Например, цикл $4O^*$, показанный на рисунке 7, сосуществует с циклом $2O$. Оба эти режима соответствуют упорядоченной фазе с двумя равными кластерами вида $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\}$, $\{x_n^{(3)}, x_n^{(4)}\}$. Бассейн цикла $4O^*$ имеет сильно раздробленный или даже фрактальный вид, показанный на рисунке 6d.

Надо отметить, что подобный режим (4-цикл) ранее был обнаружен и для системы (4.1) (обозначенный в [31], как 4_2), который расположен достаточно близко к биссектрисе первого координатного угла фазовой плоскости. Оправданно ожидать, что для рассматриваемой упорядоченной фазы, отмеченной для системы (4.1) в [31], также можно наблюдать последовательность переходов: цикл — тор — резонансный цикл — тор — резонансный цикл — ... В этом случае также обнаружено, что в окнах периодичности полностью синхронных режимов (резонансных циклов) бассейны когерентной фазы вновь становятся двумерными областями, отмеченными на рисунках 6e и 6f как $5C$ и $3C$.

Несложно заметить, что описанные трансформации бассейнов наблюдаются лишь для когерентной фазы. Бассейны упорядоченной фазы (откуда берется точка $(1.5h, 0.5h)$ для построения карт динамических режимов), кроме случаев появления бассейнов ее мультистабильных режимов, остаются относительно целостными областями, в которых один аттрактор сменяет другой в соответствии со сценарием, показанным на рисунке 5a. Например, уменьшение силы связи m между осцилляторами приводит к тому, что на основе несинхрон-

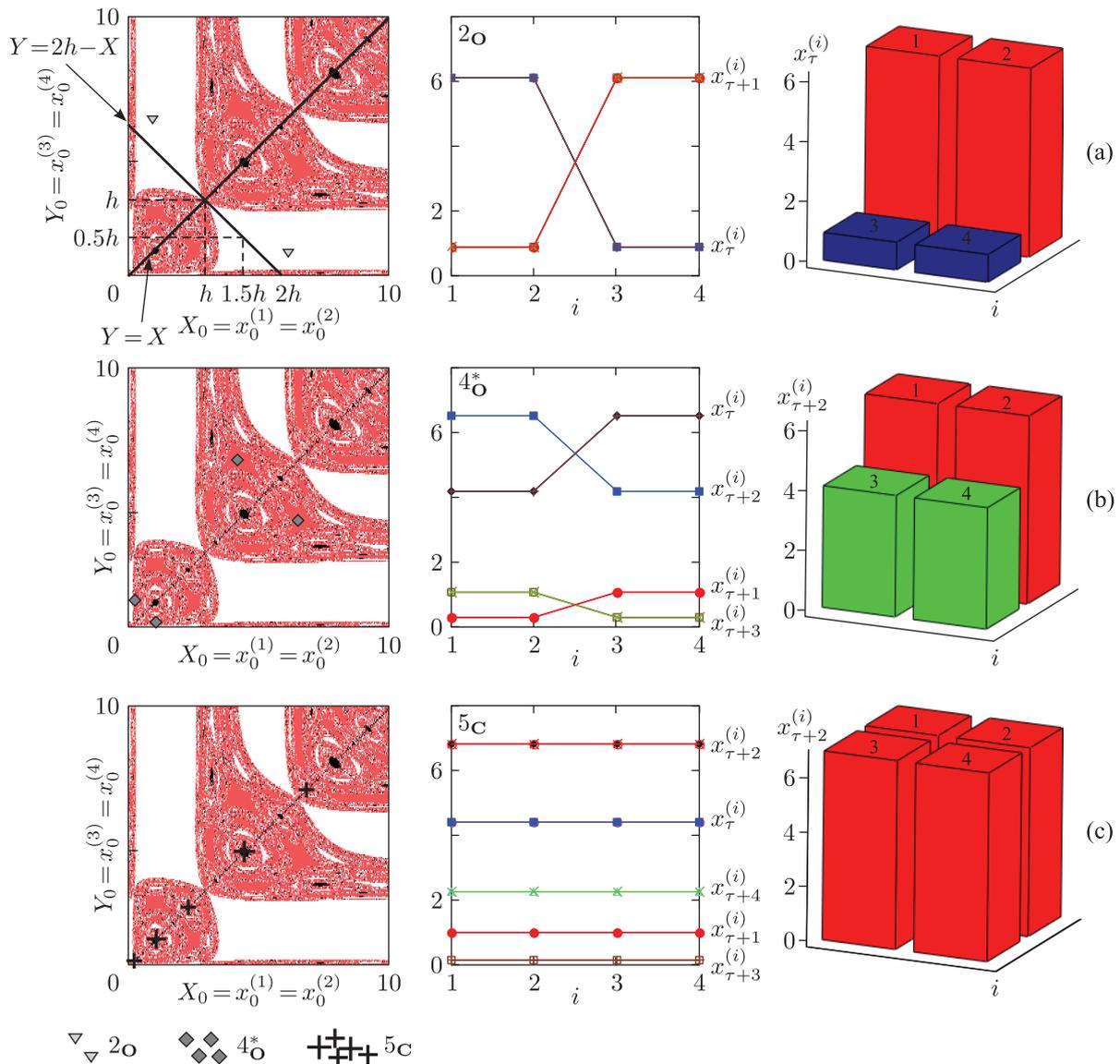


Рис. 7. Справа и посередине — примеры динамики при упорядоченной (а, b) и когерентной фазе (с) кластеризации. Слева — расположение точек фазовых кривых в бассейнах притяжений соответствующего режима при $a = 18.5$ и $m = 0.1$.

ного цикла $2O$ в плоскости (X_0, Y_0) формируется две замкнутые инвариантные кривые K_O (тор), а кластеры относительно друг друга испытывают противофазные квазипериодические колебания. Дальнейшее снижение величины m приводит к разрушению инвариантных кривых и формированию противофазного цикл $4O$, отличного по расположению в фазовом пространстве от цикла $4O^*$ на рисунке 6b и 7d. Впоследствии цикл $4O$ испытывает удвоение периода, приводящее к рождению несинфазного хаотического аттрактора XO , когда при хаотической динамике структура каждого кластера сохраняется в виде (5.1). Важно, что при этих бифуркациях и постоянном значении параметра a «каркас» бассейна притяжения когерентной фазы не меняет своих границ и формы. Таким образом, эволюция режимов упорядоченной фазы качественно совпадает с эволюцией режимов системы (4.1).

На рисунке 7 приведены примеры динамики системы (2.1) при различных начальных условиях, которые демонстрируют когерентную (рис. 7с) и упорядоченную (рис. 5а и 5b) фазу кластеризации. Для большей наглядности приведены фазовые портреты каждого режима, наложенные на бассейн притяжения (слева), а также пространственно-временная динамика каждого осциллятора (посередине и справа).

На рисунке 7 число i на графиках посередине — номер осциллятора в решетке (2.1), кривые $x_\tau^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) — значение i -й фазовой переменной на τ -й итерации. Данные графики (рис. 7а и 7b) указывают на то, что первый и второй осцилляторы (как и третий с четвертым) образуют кластеры, в пределах которых динамика оказывается полностью синхронной, что подтверждается их пересечением. На последнем графике, когда отмечается когерентная фаза, они не пересекаются. Справа показано пространственное расположение осцилляторов на одной из итераций системы (2.1). Высота столбца и его цвет показывают значение соответствующей фазовой переменной, а число над каждым столбцом — номер i . Слева показаны бассейны притяжения данных режимов: белый и серый (красный) — бассейны упорядоченной фазы $2\mathbf{O}$ и $4\mathbf{O}^*$, которые практически неотличимы по значениям R_2 , для их идентификации использовалась величина d . Небольшие черные области вокруг биссектрисы, как и она сама, — бассейн притяжения когерентной фазы. На эти области притяжения также нанесены точки, соответствующие фазовым кривым.

На первом из фазовых портретов (рис. 7а) показано, что использованная выше для построения карт динамических режимов (рис. 5) начальная точка $(1.5h, 0.5h)$ лежит в бассейне упорядоченной фазы. Несложно заметить, что там находится лишь один из возможных для данной фазы режимов — $2\mathbf{O}$, реализуемый в окрестности отрезка прямой $Y = 2h - X$, а режим $4\mathbf{O}^*$ реализуется чуть дальше. Поэтому на рисунке 5а не отмечена область существования цикла $4\mathbf{O}^*$. Используя множество других бассейнов, несложно убедиться, что данная прямая расположена преимущественно в области притяжения упорядоченной или частично упорядоченной фазы (см. рис. 6–9), а точка $(1.5h, 0.5h)$ лежит примерно в центре бассейна.

Схожим образом трансформируются бассейны притяжения двукластерных состояний частично упорядоченной фазы с тем отличием, что для нее с ростом параметра a характерен сценарий удвоения периода противофазных режимов, а сами бассейны не симметричны относительно биссектрисы первого квадранта фазовой плоскости.

На рисунке 8а показан случай сосуществования полностью синхронного цикла длины 8 ($8\mathbf{C}$) и 4-цикла ($4\mathbf{PO}$) для кластеров вида $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}\}$ и $\{x_n^{(4)}\}$. Интересно, что данный кластер оказывается неустойчивым в некоторых частях фазового пространства и приводит к турбулентной фазе, что показано в виде областей $2\mathbf{T}$ и $4\mathbf{T}$ на этом и следующем рисунках. Аналогично предыдущему случаю трансформируется бассейн когерентной фазы: из двумерных односвязных областей он переходит в одномерные, которые в окнах периодичности вновь становятся двумерными. Примечательно, что и в этом случае, и не только в момент «схлопывания» бассейна когерентной фазы, но и в «окнах периодичности», в системе из начальных условий вида $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)}$ и $Y_0 = x_0^{(4)}$ ($X_0 \neq Y_0$) возможно появление мультистабильных состояний частично упорядоченной фазы вида $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(4)}\}$ и $\{x_n^{(3)}\}$ и др. (см. рис. 2), отличных от кластеров вида $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}\}$ и $\{x_n^{(4)}\}$. Для таких режимов величина R^2 будет значительно меньше 0.999, но много больше 0.001, а длины циклов d будут равны. Бассейны таких режимов отмечены на рисунках 8b–d более темными областями. На рисунке 8f показан случай, когда ни один режим частично упорядоченной

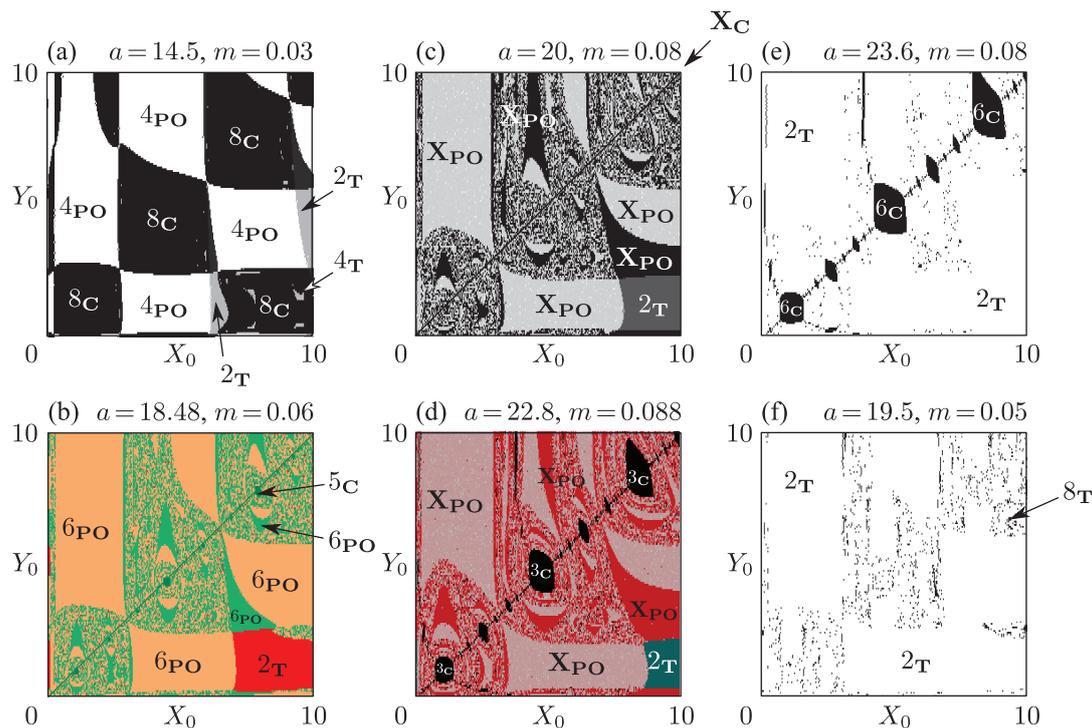


Рис. 8. Бассейны притяжения частично упорядоченной фазы кластеризации в точках v_1 (a), v_2 (b), v_3 (c), v_4 (d), v_5 (e) и v_6 (f), где $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)}$ и $Y_0 = x_0^{(4)}$ ($X_0 \neq Y_0$).

фазы кластеризации не является устойчивым (точка v_6 на рис. 5b) и указанная начальная точка приводит к формированию лишь турбулентной фазы и колебаниям с периодом 4 и 8. Диагональное направление при этом также устойчиво.

Для построения бассейнов притяжения турбулентной фазы в качестве начальной точки принималась структура в виде $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(4)}$ и $Y_0 = x_0^{(2)} = x_0^{(3)}$ ($X_0 \neq Y_0$) (см. рис. 4d). Очевидно, что при этом не будут получено всего многообразия мультистабильных состояний этой фазы кластеризации системы (2.1), особенно для циклов длины 4 и более, когда каждый из осцилляторов способен колебаться со своей уникальной фазой. Однако такое упрощение позволяет отделить бассейны притяжения когерентной фазы от бассейна турбулентной фазы вообще. Результат этого показан на рисунке 9, на котором прослеживаются бифуркации когерентной фазы, дробление областей притяжения и т.п. Но, несмотря на ограничения предлагаемого метода, информация о формируемой длине цикла d , в зависимости от начальной точки итерирования, позволяет дополнительно выявить кластеры, находящиеся в турбулентной фазе, осцилляторы которых испытывают колебания с иными периодами, например цикл 4_T^* на рисунке 9b–с и $К_T$ на рисунке 9d. Появление цикла 4_T^* подобно образованию 4_O^* (см. рис. 7b) и тоже связано с мультистабильностью, которую приобретает противофазный цикл длины 2. Рисунок 9е повторяет рисунок 6f с тем отличием, что белым цветом на первом показан бассейн турбулентной, а на втором — упорядоченной фазы кластеризации. Последний из представленных бассейнов на рисунке 9f интересен тем, что при данных значениях параметров область притяжения турбулентной фазы имеет вид, напоминающий белый шум, где практически в каждой белой и серой точке лежит точка хаотического аттрактора, а в черной — синхронный цикл длины 3.

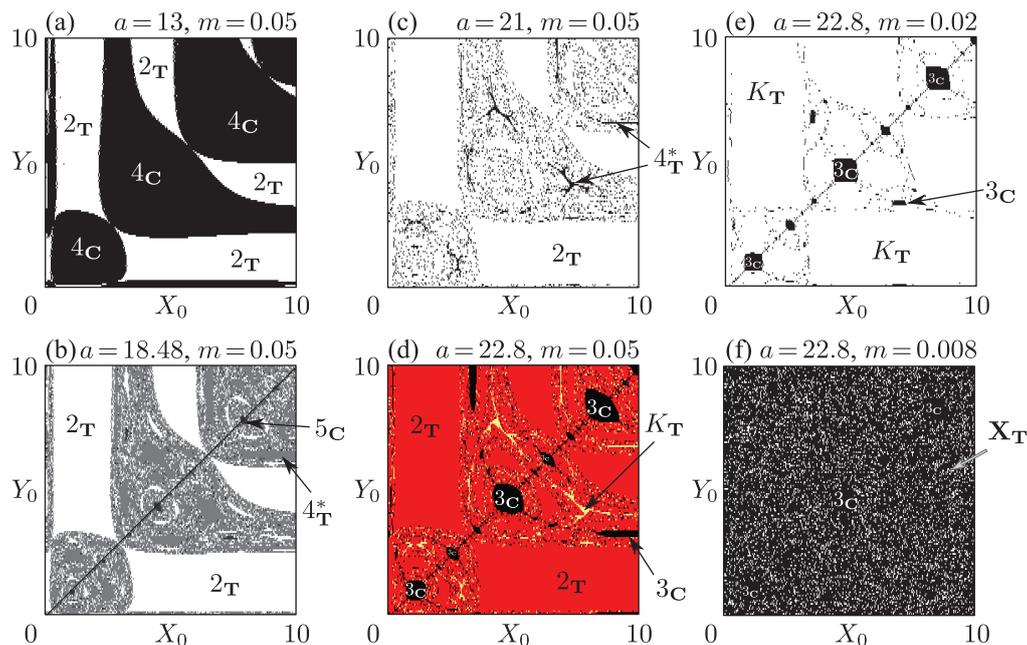


Рис. 9. Бассейны притяжения турбулентной фазы кластеризации в точках t_1 (a), t_2 (b), t_3 (c), t_4 (d), t_5 (e) и t_6 (f), где $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(4)}$ и $Y_0 = x_0^{(2)} = x_0^{(3)}$ ($X_0 \neq Y_0$).

6. Кластеризация в системах большой размерности

В отличие от предыдущего случая, для систем, состоящих из большого числа связанных элементов, сложно рассмотреть все возможные виды траекторий системы (2.1), которые определяют вид формируемых кластеров. Поэтому исследование зависимости начального распределения значений фазовых переменных и достигаемого режима может быть произведено лишь на некоторых «типичных» случаях кластеризации.

На рисунке 10 приведено три примера реализации системы (2.1) в случае решетки (ареала) квадратной формы, состоящей из 36 точечных осцилляторов (локальных популяций), то есть $k = s = 6$ и $N = ks = 36$; примеры получены из различных начальных условий. Первый и второй соответствуют образованию двух различных как по числу, так и по виду кластеров (рис. 10a–b). В последнем случае осцилляторы с синфазной динамикой расположены в шахматном порядке, что соотносится с турбулентной фазой (рис. 10c).

Слева на рисунке 10 высота столбцов показывает значения каждой переменной на n -й итерации. Справа изображена та же динамика в зависимости от номера субпопуляции $i = (p-1)k + q$, где p и q — номера строки и столбца прямоугольной решетки, на пересечении которых располагается i -й элемент ($p = 1, 2, \dots, s$, $q = 1, 2, \dots, k$, $ks = N$). Тонкими вертикальными линиями выделены строки этой решетки. В данном случае каждый осциллятор колеблется с циклом длины 2, что отмечено в виде двух трехмерных столбчатых графиков (слева) и двумерных графиков (справа), отмеченных как $n = \tau$ и $n = \tau + 1$. Несложно заметить, что, несмотря на малый коэффициент связи, в данных примерах отмечается «граничный эффект», появление которого уже обсуждалось выше. Он заключается в том, что элементы, расположенные на границах и в центре кластеров, колеблются с немного разными амплитудами, и эти различия становятся более заметными с увеличением коэффициента связи m или размеров решетки.

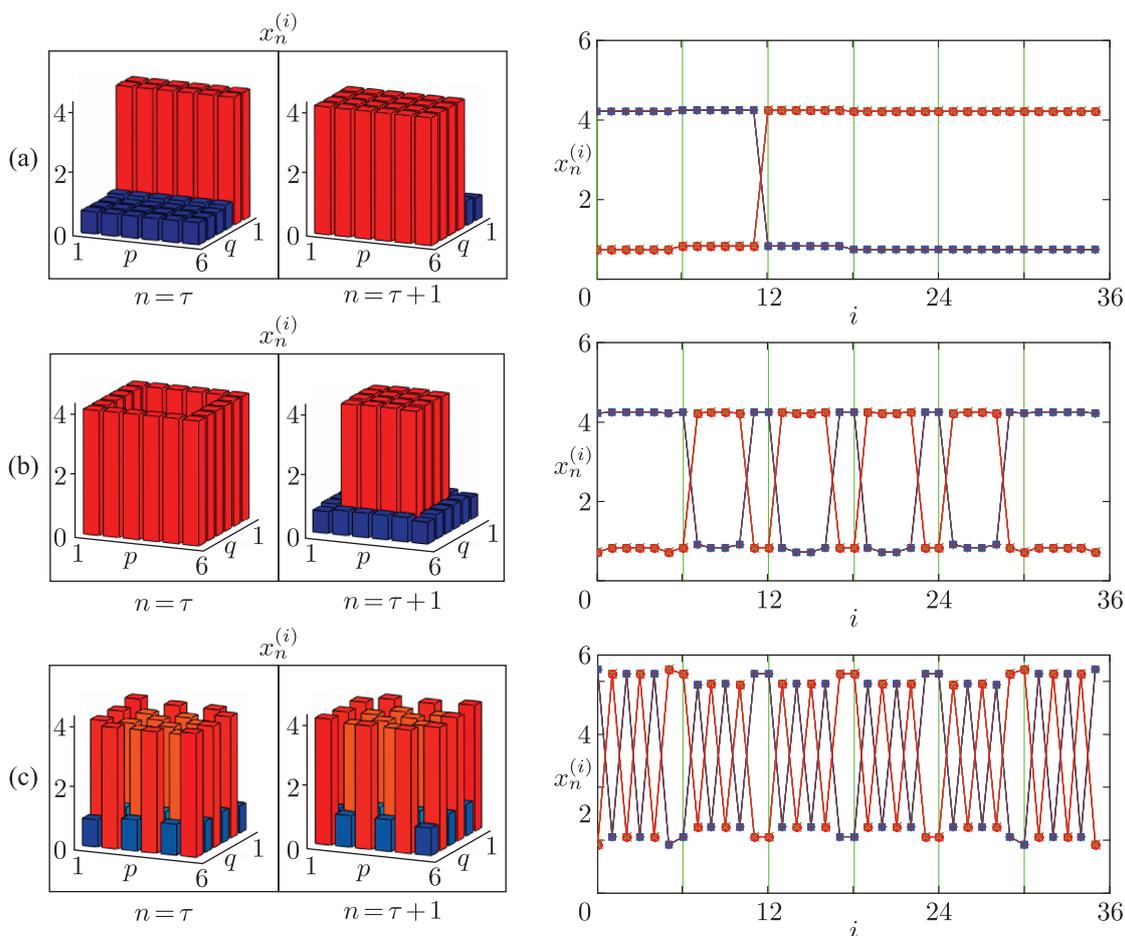


Рис. 10. Примеры пространственной динамики системы (2.1) при $a = 12$, $m = 0.025$.

Одним из «типичных» случаев для решетки из четного числа связанных элементов является образование двух равных кластеров, динамику которых в асимптотическом случае можно описать системой вида (4.1).

Рассмотрим бассейны притяжения такого кластера. Для этого положим начальную точку значениями в виде (5.2), то есть $X_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \dots = x_0^{(18)}$ и $Y_0 = x_0^{(19)} = x_0^{(20)} = \dots = x_0^{(36)}$ ($X_0 \neq Y_0$), а затем будем варьировать ее, вычисляя минимальный коэффициент детерминации (5.4). Таким образом, можно получить карту величины R^2 на плоскости (X_0, Y_0) , изображенную на рисунке 11а. Светлые области соответствуют бассейнам когерентной динамики, где значение R^2 до девятого знака после запятой равно нулю, темными — бассейны иных фаз кластеризации.

Следовательно, начальные условия вида (5.2) при $N = 36$ и $N_0 = 18$ не всегда приводят к формированию равных кластеров. Данный факт подтверждается тем, что вокруг областей притяжения когерентной фазы (2 \mathbf{C}) и упорядоченной фазы с равными кластерами (2 \mathbf{O}) располагаются достаточно узкие бассейны иных фаз кластеризации, которые являются своего рода переходными состояниями между фазами. Области притяжения являются пересечениями бассейнов когерентной и упорядоченной фазы. Например, бассейн фазы с равным числом элементов (рис. 11е), отмеченный как 2 \mathbf{O} , является одновременно областью притяжения фазы с неравным числом элементов в кластерах (рис. 11д и 11с),

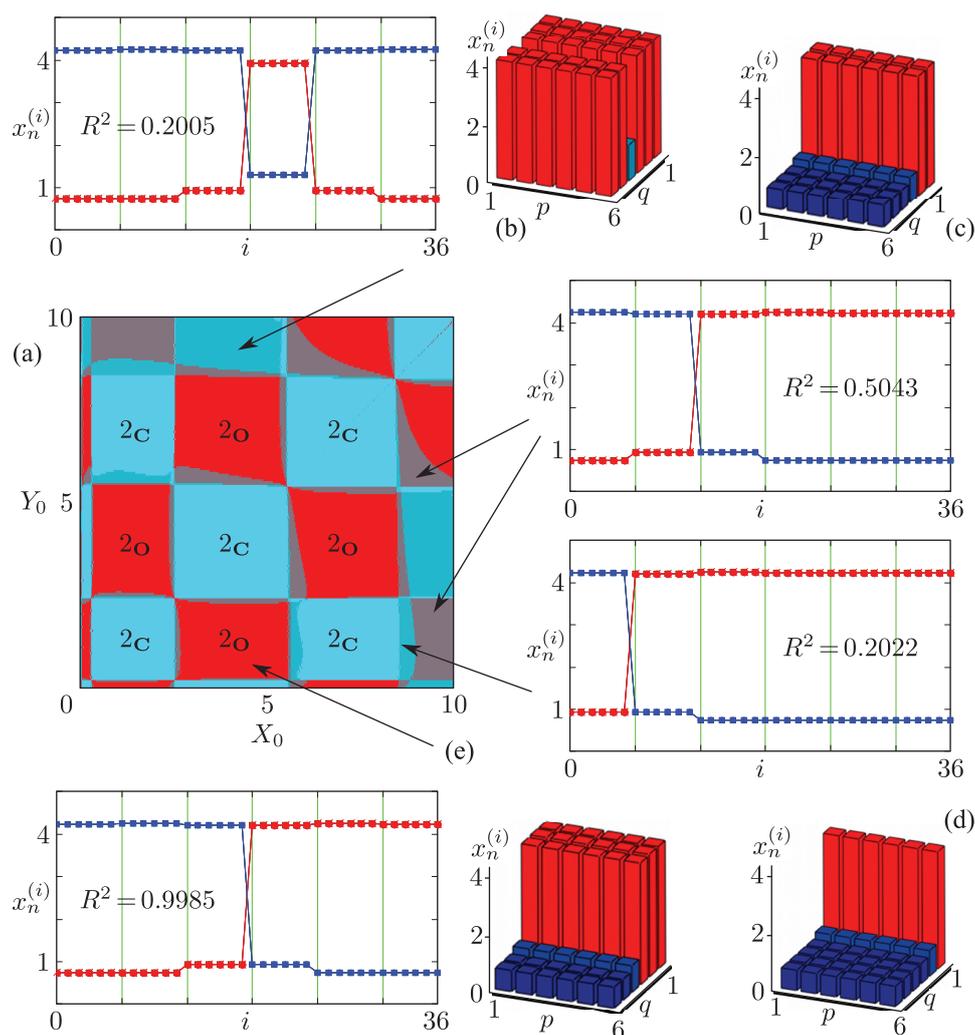


Рис. 11. Бассейны притяжения кластеров (а); кластеры при $a = 12$ и $m = 0.05$ (b–e).

которая возможна при больших вариациях начальной точки (в местах перехода от 2_C к 2_O). Соответственно, области притяжения когерентной динамики 2_C , объединенные с данными пересечением, сильно напоминают бассейн синфазной динамики в системе (4.1). Кроме того, выделяются области притяжения трехкластерных фаз, состоящих из двух синфазных, разделенных третьим несинфазным с ними кластером посередине (рис. 11b), которые являются скорее объединением областей притяжения. Каждый из отмеченных режимов характеризуется своим значением R^2 , указанным на рисунке 11.

Для определения областей существования конкретных фаз кластеризации в системах из большого числа связанных элементов можно, как и в прошлом случае, строить множество карт динамических режимов при различных начальных условиях. Однако, используя показатель (5.4), можно существенно дополнить получаемую таким образом информацию о взаимосвязи различных фаз кластеризации. Ограничимся рассмотрением случаев образования равных кластеров в виде (5.2) при $N = 36$ и $N_0 = 18$, неравных кластеров при $N = 36$ и $N_0 = 6$, а также кластеров, в которых синфазными оказываются элементы, расположенные в шахматном порядке.

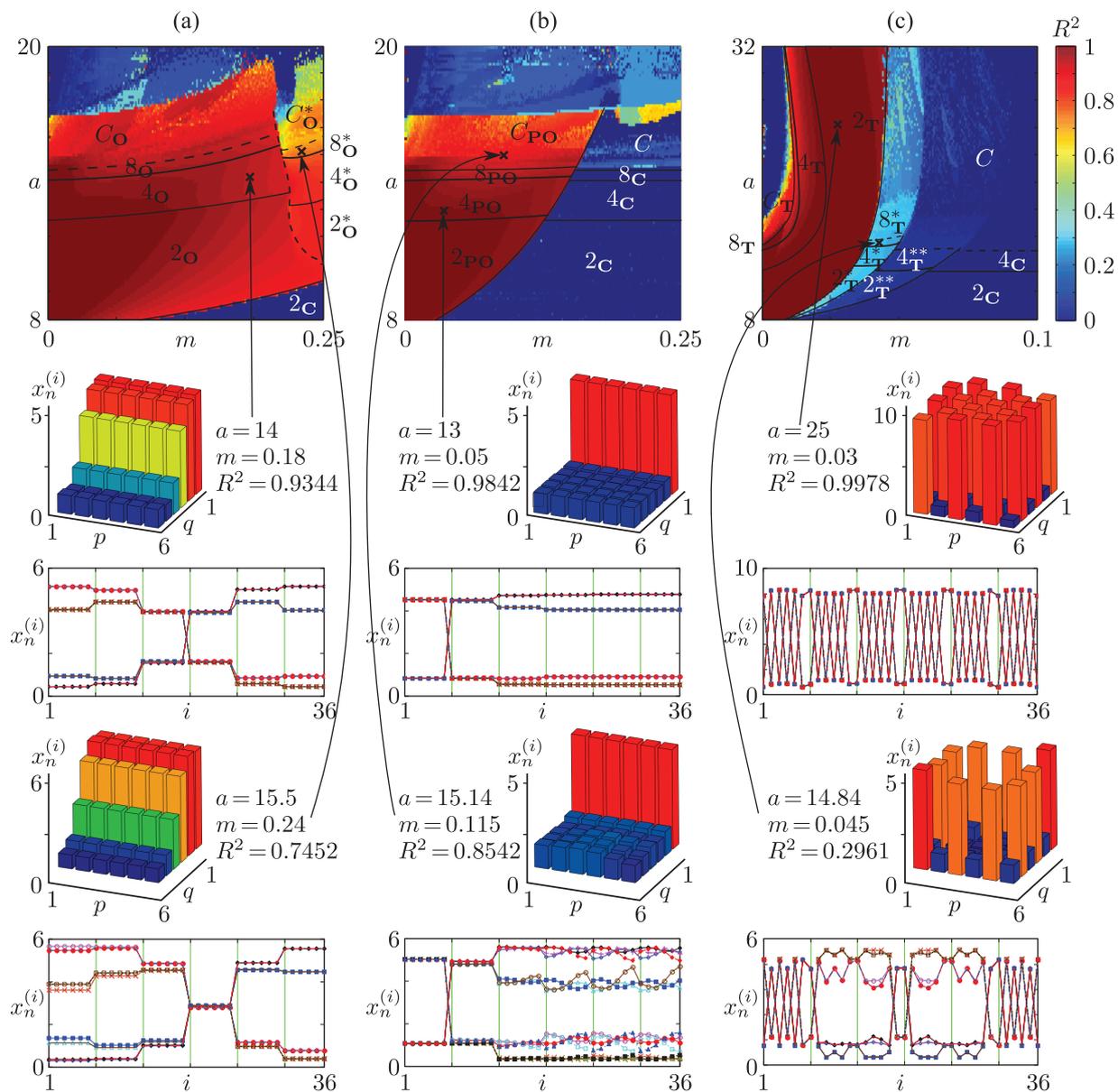


Рис. 12. Значения величины R^2 на параметрической плоскости, карта динамических режимов и примеры динамики системы (2.1), демонстрирующих образование двух равных кластеров (упорядоченная фаза, а), не равных кластеров (частично упорядоченная фаза, б) и кластеров с элементами, расположенными в шахматном порядке (турбулентная фаза, с).

На рисунке 12 сверху изображены карты величин R^2 в зависимости от значения параметров; поверх карт нанесены области регистрируемых устойчивых циклов. Ниже показаны примеры пространственно-временной динамики системы (2.1) при указанных значениях параметров и начальной точки, соответствующей рассматриваемым фазам кластеризации.

Линия на рисунке 12а, отделяющая область когерентной динамики $2C$ и упорядоченной фазы $2O$, точно совпадает с границей существования устойчивых противофазных циклов системы (2.6), которая аппроксимирует динамику двух равных кластеров в системе (2.1)



и имеет вид

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{3}m\right) f(y_n^{(1)}) + \frac{1}{3}mf(y_n^{(2)}), \\ y_{n+1}^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{3}m\right) f(y_n^{(2)}) + \frac{1}{3}mf(y_n^{(1)}), \end{cases}$$

а указанная граница по сравнению с аналогичной границей в системе (4.1) будет растянута вдоль оси m в три раза, выходя за пределы области допустимых значений параметров $m \leq 0.25$. Однако с ростом параметра a усложнение динамик в данном случае происходит иначе, чем в системах (2.6) или (4.1): в этом случае наблюдается только каскад удвоения периода.

В правой части параметрического портрета на рисунке 11а выделяется нечеткая граница перехода от фазы с равными кластерами к фазе с неравным числом кластеров. При приближении к этой границе значения фазовых переменных с 13 по 24 ($i = 13, 14, \dots, 24$) сближаются, а правее от нее значения примерно равны. Такие режимы обозначены звездочкой в качестве верхнего индекса. Ниже приведены примеры таких режимов. Режим $8_{\mathbf{O}}^*$ примечателен тем, что внешне динамика первого кластера ($i = 1, 2, \dots, 18$) выглядит как 8-цикл, второго — как 4-цикл ($i = 25, 26, \dots, 36$), а осцилляторы посередине ($i = 19, 20, \dots, 24$) не испытывают колебаний. Однако с точностью до девятого знака после запятой алгоритм определения длины цикла идентифицирует их как 8-цикл.

Сокращение числа элементов в одном из кластеров двухкластерной фазы приводит к тому, что области параметров, где они устойчивы, значительно сужаются, а их границы приближаются к аналогичным границам когерентной динамики. Так, правая граница режимов $4_{\mathbf{PO}}$ и $8_{\mathbf{PO}}$ на рисунке 12b незначительно отличается от соответствующих границ когерентных режимов $4_{\mathbf{C}}$ и $8_{\mathbf{C}}$. В этом случае начальные условия в виде (5.2) и $N = 36$ и $N_0 = 6$ не приводят к иным фазам (кроме когерентной и одного вида частично упорядоченной фазы). Интересно, что в данном случае с ростом параметра a усложнение динамики отчетливо заметно лишь для большего по размеру кластера, а для меньшего кластера динамика напоминает 2-цикл. Аналогично и элементы, граничащие с ним, также колеблются с меньшим разбросом амплитуд. Примеры показаны снизу на рисунке 12b, где у элементов с 12-го по 36-й четко заметна динамика с периодом 4 (график посередине) и нерегулярная динамика (внизу). Последний график для простоты представлен лишь пятнадцатью последними итерациями на аттракторе (15 зависимостей $x_n^{(i)}$ от i).

Области существования режимов турбулентной фазы, когда синфазны переменные, расположенные в шахматном порядке, имеют совсем иной вид (рис. 12c), хотя сценарий потери устойчивости — удвоение периода. Эти области значительно сужаются с ростом числа элементов в решетке (2.1), но в целом схожи с показанными на рисунке 5c областями $2_{\mathbf{T}}$, $4_{\mathbf{T}}$, $8_{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}$.

Кроме того, в этом случае начальные условия, зафиксированные в шахматном порядке (такие, что четные переменные в одной строке решетки (2.1) равны нечетным элементам в другой строке), способны приводить к режимам, по виду напоминающим турбулентную фазу и обозначенным на рисунке 12c верхним индексом в виде одной или двух звездочек. Один из примеров таких режимов приведен внизу на рисунке 11c, когда лишь элементы на границе решетки (ареала) сохраняют шахматный порядок, а осцилляторы посередине образуют один кластер и испытывают колебания с периодом 8.

Примечательно, что во всех рассмотренных решетках, состоящих из относительно большого числа элементов, отмечается лишь сценарий Фейгенбаума. Не отмечен сценарий, когда

вокруг несинхронного 2-цикла образуются предельные инвариантные кривые, разрушение которых приводит к появлению 4-цикла и его дальнейшему удвоению. В рамках данной работы этот сценарий отмечен лишь в решетке из четырех связанных элементов в турбулентной и упорядоченной фазе кластеризации, а также в хорошо изученных системах (2.6) и (4.1). Для частично упорядоченной фазы отмечен сценарий удвоения периода, который становится единственно возможным с ростом размерности системы (2.1). Очень похоже, что это связано именно с тем, что характер связи между колебательными элементами рассматриваемой системы (2.1) не является глобальным. С одной стороны, образование двух равных кластеров возможно только в решетках из четного числа связанных элементов, и, похоже, что соотношение четного или нечетного числа элементов в строках и столбцах плоских решеток (2.1) является довольно принципиальным вопросом, который требует отдельного изучения. С другой стороны, в упорядоченной фазе решетки из четырех элементов каждый элемент связан с представителем соседнего кластера (помимо связи внутри кластера), однако в решетках с количеством элементов больше 9 ($k \geq 3, s \geq 3$) существуют элементы, которые связаны лишь с представителями своего кластера. Правда, остается неясным вопрос, почему в турбулентной фазе, когда кластер — это один элемент, в системах (2.1) при $k \geq 3, s \geq 3$ отмечается лишь удвоение периода.

7. Выводы

В работе исследованы некоторые аспекты образования кластеров в системах не глобально связанных отображений.

Показано одно из возможных применений таких систем — модели пространственной динамики миграционно-связанных популяций или метапопуляций. На примере данного модельного объекта удалось продемонстрировать возможность значительного упрощения систем связанных отображений в случае формирования кластеров. Предполагается, что динамика элементов каждого кластера может быть описана агрегированной переменной (суммой входящих в исходную систему переменных), а коэффициенты связи некоторым образом суммируются, подобно суммированию границ субареалов. В этом случае система изначально идентичных симметрично связанных отображений может быть аппроксимирована системой с меньшим числом переменных, но уже неидентичных и несимметрично связанных. Однако полное совпадение переменных аппроксимирующей системы и суммы элементов кластеров возможно лишь в случае полной синхронизации динамики всех элементов кластера. Последнее оказывается принципиально невозможно для систем не глобально связанных отображений большой размерности, в отличие от систем, осцилляторы которых связаны глобально. Несмотря на это, качественные механизмы формирования кластеров и формирования несинхронных режимов в аппроксимирующих системах совпадают. Дальнейшие же бифуркации, как правило, не совпадают.

В случае образования двух кластеров исследована зависимость начальной точки итерирования и формируемой фазы кластеризации. Для этого предложена методика построения бассейнов притяжения кластеров, которая позволяет идентифицировать области в фазовом пространстве, где локализованы конкретные фазы кластеризации. В простейшем случае — квадратной решетки из четырех связанных отображений — показано, что области притяжения когерентной фазы и некогерентной фазы имеют размерность не ниже двух. Обнаружена бифуркация, когда некогерентная фаза приобретает мультистабильный характер и формируются иные фазы кластеризации или циклы иных длин. Бассейны таких фаз часто имеют

сильно раздробленный вид. Появление таких режимов сопровождается схлопыванием области притяжения когерентной фазы в одномерную — биссектрису первого квадранта. Однако в окнах периодичности когерентной динамики они вновь приобретают неодномерный вид.

Для систем, состоящих из большого числа связанных отображений, на примере квадратной решетки из 36 элементов и случая формирования двух равных кластеров, показано, что фазовое пространство состоит из огромного числа вложенных друг в друга областей притяжения схожих фаз. Данные режимы являются своего рода переходными состояниями между когерентной динамикой и состоянием с двумя равными кластерами. Помимо таких областей, обнаружены области притяжения фаз, приводящие к формированию трехкластерных состояний, которые являются объединением бассейнов двухкластерных фаз, отличающихся числом заполнения.

На примере из 36 связанных элементов продемонстрирован «граничный эффект», когда за счет прямой связи элементы, расположенные на границе кластера, испытывают значительно меньший разброс амплитуд, чем элементы внутри кластера. Следствием этого, по всей видимости, является тот факт, что по мере уменьшения размера одного из кластеров также снижается разброс амплитуд колебаний внутри него, причем таким образом, что колебания меньшего выглядят как цикл меньшей длины, чем колебания большего по размеру кластера.

Список литературы

- [1] Kaneko K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice: Towards a prelude of a «field theory of chaos» // *Progr. Theoret. Phys.*, 1984, vol. 72, no. 3, pp. 480–486.
- [2] Кузнецов С. П. О модельном описании цепочки связанных динамических систем вблизи точки перехода порядок–беспорядок // *Изв. вузов. Физика*, 1984, т. 27, № 6, с. 87–96.
- [3] Oppo G.-L., Kapral R. Discrete models for the formation and evolution of spatial structure in dissipative systems // *Phys. Rev. A*, 1984, vol. 33, no. 6, pp. 4219–4231.
- [4] Waller I., Kapral R. Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*, 1986, vol. 30, no. 4, pp. 2047–2055.
- [5] Kaneko K. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices // *Phys. D*, 1986, vol. 23, nos. 1–3, pp. 436–447.
- [6] Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical, ordering, and control in network of chaotic elements // *Phys. D*, 1990, vol. 41, no. 2, pp. 137–172.
- [7] Kaneko K. Relevance of dynamic clustering to biological networks // *Phys. D*, 1994, vol. 75, nos. 1–3, pp. 55–73.
- [8] Кузнецов С. П. Универсальность и подобие связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1985, т. 27, № 8, с. 991–1007.
- [9] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Радиофизика*, 1991, т. 34, № 10–12, с. 1079–1115.
- [10] Manica V., Silva J. A. Population distribution and synchronized dynamics in a metapopulation model in two geographic scales // *Math. Biosci.*, 2014, vol. 250, pp. 1–9.
- [11] Martins L. C., Brunnet L. G. Multi-state coupled map lattices // *Phys. A*, 2001, vol. 296, nos. 1–2, pp. 119–130.
- [12] Richter H. Coupled map lattices as spatio-temporal fitness functions: Landscape measures and evolutionary optimization // *Phys. D*, 2008, vol. 237, no. 2, pp. 167–186.

- [13] Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л. Применение метапопуляционного подхода к анализу пространственно-временной динамики промысловых животных (на примере популяций кабана и изюбря) // Региональные проблемы, 2011, т. 14, № 2, с. 12–20.
- [14] Иванова А. С., Кузнецов С. П. О динамике на пороге возникновения хаоса в модельных системах, построенных на базе логистических отображений с инерциальной и диссипативной глобальной связью // ПНД, 2002, т. 10, № 6, с. 42–53.
- [15] Иванова А. С., Кузнецов С. П. Волны кластеризации в цепочке систем, каждая из которых содержит набор элементов с внутренней глобальной связью // ПНД, 2003, т. 11, № 4–5, с. 80–88.
- [16] Popovych O., Pikovsky A., Maistrenko Yu. Cluster-splitting bifurcation in a system of coupled maps // Phys. D, 2002, vol. 168/169, pp. 106–125.
- [17] Omelchenko I., Maistrenko Yu., Mosekilde E. Synchronization in ensembles of coupled maps with a major element // Discrete Dyn. Nat. Soc., 2005, vol. 2005, no. 3, pp. 239–255.
- [18] Chandrasekaran L., Matveev V., Bose A. Multistability of clustered states in a globally inhibitory network // Phys. D, 2009, vol. 238, no. 3, pp. 253–263.
- [19] Chen L., Lü J., Lu J., Hill D. J. Local asymptotic coherence of time-varying discrete ecological networks // Automatica, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 546–552.
- [20] Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Синхронизация 2-циклов в системе симметрично связанных популяций, запас–пополнение в которых описывается функцией Рикера // ПНД, 2010, т. 18, № 6, с. 25–41.
- [21] Кулаков М. П., Аксенович Т. И., Фрисман Е. Я. Подходы к описанию пространственной динамики миграционно-связанных популяций: Анализ синхронизации циклов // Региональные проблемы, 2013, т. 16, № 1, с. 5–15.
- [22] Zhang Y.-Q., Wang X.-Y. Spatiotemporal chaos in mixed linear–nonlinear coupled logistic map lattice // Phys. A, 2014, vol. 402, pp. 104–118.
- [23] Opdam P. Metapopulation theory and habitat fragmentation: A review of holarctic breeding bird studies // Landscape Ecol., 1991, vol. 5, no. 2, pp. 93–106.
- [24] Ecology, genetics and evolution of metapopulations / I. Hanski, O. E. Gaggiotti (Eds.). London: Acad. Press, 2004. 696 pp.
- [25] Скалецкая Е. И., Фрисман Е. Я., Шапиро А. П. Дискретные модели численности популяций и оптимизация промысла. Москва: Наука, 1979. 164 с.
- [26] Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН, 1983, т. 141, № 10, с. 343–374.
- [27] Yakubu A.-A., Castillo-Chavez C. Interplay between local dynamics and dispersal in discrete-time metapopulation model // J. Theor. Biol., 2002, vol. 218, no. 3, pp. 273–288.
- [28] Cressman R., Křivan V. Migration dynamics for the ideal free distribution // Am. Nat., 2006, vol. 168, no. 3, pp. 384–397.
- [29] Křivan V., Cressman R., Schneider C. The ideal free distribution: A review and synthesis of the game-theoretic perspective // Theor. Popul. Biol., 2008, vol. 73, no. 3, pp. 403–425.
- [30] Pisarchik A. N., Feudel U. Control of multistability // Phys. Rep., 2014, vol. 540, no. 4, pp. 167–218.
- [31] Безручко Б. П., Прохоров М. Д., Селезнев Е. П. Виды колебаний, мультистабильность и бассейны притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // ПНД, 2002, т. 10, № 4, с. 47–67.
- [32] Udawadia F. E., Raju N. Dynamics of coupled nonlinear maps and its application to ecological modeling // Appl. Math. Comput., 1997, vol. 82, nos. 2–3, pp. 137–179.
- [33] Wysham D. B., Hastings A. Sudden shift ecological systems: Intermittency and transients in the coupled Ricker population model // Bull. Math. Biol., 2008, vol. 70, no. 4, pp. 1013–1031.

Attraction basins of clusters in coupled map lattices

Matvey P. Kulakov¹, Efim Ya. Frisman²

^{1,2}Institute for Complex Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of RAS
Sholom-Aleikhem 4, Birobidzhan, 679016, Russia

¹k_matvey@mail.ru, ²frisman@mail.ru

This paper researches a phenomenon of clustering and multistability in a non-global coupled Ricker maps. To construct attraction basins for some phases of clustering we propose a method. For this purpose we consider the several simultaneously possible and fundamentally different trajectories of the system corresponding to different phases of clustering. As a result these phases or trajectories have the unique domains of attraction (basins) in the phase space and stability region in the parametric space. The suggested approach consists in that each a trajectory is approximated the non-identical asymmetric coupled map lattices consisting of fewer equations and equals the number of clusters. As result it is shown the formation and transformation of clusters is the same like a bifurcations leading to birth of asynchronous modes in approximating systems.

MSC 2010: 37G35

Keywords: metapopulation, multistability, coupled map lattices, clustering, basin of attraction

Received July 07, 2014, accepted December 16, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 51–76 (Russian)

