Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 2. С. 353–376.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 34D20, 70F25, 70Q05

Динамика систем с сервосвязями. I*

В. В. Козлов

В работе обсуждается динамика систем с сервосвязями Бегена, когда связи реализуются посредством управляемых сил. Классические неголономные системы представляют важный частный случай. Особое внимание уделено исследованию движения на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией и левоинвариантной связью. Наличие симметрий позволяет свести динамические уравнения к замкнутой системе дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями на алгебре Ли. В качестве примеров рассмотрено вращение твердого тела с левоинвариантной сервосвязью — проекция угловой скорости на некоторое фиксированное в теле направление равна нулю (обобщение неголономной задачи Суслова), а также движение саней Чаплыгина с сервосвязями определенного вида. Динамика систем с сервосвязями Бегена богаче и разнообразнее по сравнению с более привычной динамикой неголономных систем.

Ключевые слова: сервосвязи, симметрии, группы Ли, левоинвариантные связи, системы с квадратичными правыми частями

1. Введение

Работа посвящена динамике систем с сервосвязями. Основы теории систем со связями, реализуемыми с помощью управляемых сил, обсуждаются в диссертации Бегена [1]; черты общей теории приданы Аппелем [2]. Связь теории сервосвязей Бегена с основными принципами динамики изложена в работе [3]. В современной литературе по управляемым системам сервосвязи принято называть программой движения.

---

*Перевод статьи “The Dynamics of Systems with Servoconstraints. I”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 205—224.

Получено 10 февраля 2015 года
После доработки 05 марта 2015 года

Работа выполнена за счет средств гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Уравнения движения с сервосвязью

$$\Phi(\dot{x}, x, t) = 0 \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \neq 0\right) \tag{1.1}$$

имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F + \lambda N. \tag{1.2}$$

Здесь $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — обобщенные координаты, $\dot{x} = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ — скорость системы, T — кинетическая энергия, F — внешняя сила, N — заранее заданное ковекторное поле (поле сил), λ — множитель Лагранжа. Уравнения (1.1) и (1.2), конечно, следует рассматривать совместно.

Условие реализации сервосвязи имеет следующий вид:

$$\left(A^{-1}N, \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) \neq 0. \tag{1.3}$$

Здесь

$$A = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2}$$

— положительно определенный оператор инерции. Условие (1.3) означает возможность найти параметр λ как функцию от $\dot{x}$, x и t (не решая уравнения движения). Обсуждение условия (1.3) можно найти в [3].

Здесь следует дать некоторые пояснения. Общую теорию управляемых механических систем со связями не следует отождествлять с теорией сервосвязей Бегена (как это сделано, например, в работах [14, 15]).

Вообще, системы со связями, зависящими от управляющих параметров, рассматривались и до классической работы Бегена [1]. Упомянем работы Я. И. Грдины по динамике живых организмов (см. [17], где можно найти ссылки на его более ранние работы). В самом простом варианте уравнения с управляющим параметром имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F(\dot{x}, x, t, \lambda), \quad \Phi(\dot{x}, x, t, \lambda) = 0.$$

Функция $t \mapsto \lambda(t)$ (управление) находится в результате совместного решения этой дифференциально-алгебраической системы. Такие же уравнения изучались в работах [14, 15].

Если

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \neq 0,$$

то из уравнения связи (по крайней мере локально) параметр λ находится как функция от состояния x, $\dot{x}$ и времени t. Подставляя эту функцию в выражение для силы, получим замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка, из которой находим движение $t \mapsto x(t)$, а тем самым и управление $t \mapsto \lambda(t)$. Если же уравнение связи не содержит управляющего параметра, то дифференцируя его по времени и используя уравнение Лагранжа, получим:

$$\left(A^{-1}F, \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) = \Psi,$$

где Ψ — известная функция от $\dot{x}$, x и t. Если

$$\left(A^{-1}\frac{\partial F}{\partial \lambda}, \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) \neq 0,$$

то (снова по теореме о неявной функции) параметр λ находится в виде функции от состояния системы и времени. В частности, если в некоторый момент $\Phi = 0$, то это равенство справедливо при всех значениях t. Наконец, когда внешняя сила также не зависит от параметра λ, то дифференциально-алгебраическая система, как правило, несовместна и для реализации движения со связью надо вводить дополнительную силу (реакцию связи). Зависящие от управляющих параметров связи были названы в работе [14] условными связями. Сила F считается внешней силой, а реакция условной связи не вводится. Точнее, она считается равной нулю и поэтому не совершает работы на возможных перемещениях δx, определяемых уравнением Четаева

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}, \delta x\right) = 0.$$

Такие же возможные перемещения использовались и в работах [15–17].

Более того, в указанных статьях уравнения движения неоправданно усложняются введением дополнительного множителя Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F(\dot{x}, x, t, \lambda) + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}, \quad \Phi(\dot{x}, x, t, \lambda) = 0.$$

При этом утверждается, что для замыкания системы необходимо задать (или из каких-либо дополнительных условий определить) закон управления

$$\lambda = \lambda(\dot{x}, x, t).$$

На наш взгляд, в этих уравнениях надо положить $\mu = 0$ (как это и сделано в [14]).

В теории Бегена связи не зависят от управления, а действующая на систему сила равна сумме внешней силы F (также не зависящей от параметра) и реакции сервосвязи λN. Чтобы сервосвязь была идеальной, возможные перемещения удовлетворяют другому уравнению —

$$(N, \delta x) = 0.$$

Хотя это обстоятельство ясно выражено Бегеном (а также повторено в классическом учебнике Аппеля [2]), оно не всегда оказывается понятым с точки зрения основных принципов аналитической механики. Вообще, определение возможных перемещений — это ключевая аксиома динамики систем со связями. Изменение этой аксиомы (при сохранении других аксиом — принципа освобождаемости и условия идеальности связей) приводит к иной динамике системы со связью (T, F, Φ) (обсуждение этого круга вопросов см. в [3]). Сама собой возникает аналогия со знаменитым «пятым постулатом» евклидовой геометрии.

Ясно, что сервомоторы реализуют движение механической системы со связью с некоторой погрешностью. Анализ этих погрешностей, а также вопросы их минимизации обсуждаются, например, в работах [15, 18]. Для динамических систем общего вида некоторые подобные вопросы рассмотрены в книге [19].

Реализацию движения систем с сервосвязями можно назвать *активной*; она осуществляется с помощью регулируемых устройств. Если положить

$$N = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}},$$

то условие реализации (1.3) заведомо выполнено и уравнения (1.1)–(1.2) будут описывать классическое неголономное движение. С другой стороны, как хорошо известно, неголономное движение можно реализовать и *пассивным* способом, используя дополнительные силы анизотропного вязкого трения. Эта идея восходит к Каратеодори. Обзор результатов по пассивной реализации связей и их обсуждение можно найти в книге [20].

Задача точного интегрирования уравнений (1.1)–(1.2) существенно сложнее соответствующей задачи для уравнений Гамильтона и неголономных уравнений (когда $N = \partial\Phi/\partial\dot{x}$). В типичной ситуации здесь уже не справедлива известная теорема об изменении кинетической энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \dot{x}\right) - T\right] = (F, \dot{x}), \tag{1.4}$$

из которой выводится интеграл энергии в стационарном случае и когда внешние силы потенциальны. Соотношение (1.4) справедливо лишь в том случае, когда для всех «действительных» скоростей $\dot{x}$ (удовлетворяющих (1.1))

$$(N, \dot{x}) = 0.$$

Другими словами, действительные скорости должны лежать среди возможных перемещений. Это условие выполняется лишь в частных случаях, например, когда

$$\Phi = \mu(N, \dot{x}),$$

где μ — ненулевая функция в фазовом пространстве. Если ковекторное поле N не зависит от $\dot{x}$, то получаем однородную неголономную связь, для которой соотношение (1.4) заведомо выполняется.

С другой стороны, нетрудно сформулировать обобщенную теорему Нётер, дающую линейные по скорости первые интегралы. Пусть $w(x)$ — векторное поле на конфигурационном пространстве, поток которого (однопараметрическое семейство преобразований конфигурационного пространства) сохраняет кинетическую энергию $T(\dot{x}, x)$ (после естественного продолжения этих преобразований на фазовое пространство). Если

$$(N, w) = 0, \tag{1.5}$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, w\right) = (F, w).$$

Соотношение (1.5) означает, что поле симметрий в каждой точке конфигурационного пространства есть возможное перемещение нашей системы. В частности, если система движется по инерции $F = 0$, то уравнения движения допускают интеграл

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, w\right) = \text{const}.$$

С качественной точки зрения системы с сервосвязями ведут себя сложнее, чем более привычные нам неголономные системы. Обсуждение этого круга вопросов, а также рассмотрение динамики систем с сервосвязями на группах Ли составляют содержание настоящей работы.

2. Системы на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией и левоинвариантной сервосвязью

Пусть G — n-мерная группа Ли, g — ее алгебра Ли. Пусть T — левоинвариантная риманова метрика на G. С точки зрения динамики эту метрику можно интерпретировать как кинетическую энергию некоторой механической системы. Согласно Пуанкаре [4], динамические уравнения (уравнения Лагранжа) отделяются и представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений на алгебре g (или на коалгебре — двойственном линейном пространстве g^*):

$$\dot{m}_k = \sum c^i_{jk} m_i \omega_j, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Здесь $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (декартовы координаты на алгебре g) — квазискорости рассматриваемой системы, а $m_1, \ldots, m_n$ (координаты на коалгебре g^*) — импульсы. Они связаны линейными соотношениями

$$m_k = \sum I_{kj} \omega_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.2}$$

где $\|I_{kj}\|$ — постоянный тензор инерции. Постоянные $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$ — структурные постоянные алгебры Ли; они удовлетворяют известным тождествам Якоби. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(I\omega, \omega) = \frac{1}{2}(I^{-1}m, m)$$

— первый интеграл уравнений (2.1). Для полного описания движения системы к уравнениям (2.1) следует добавить кинематические уравнения. Подробности см. в [5].

Замечание. Скорость системы $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — касательный вектор к группе G в единице. Его компоненты преобразуются по контрвариантному правилу. Поэтому (с последовательной точки зрения тензорного анализа) номера компонент скорости ω следовало бы записывать сверху. Однако это создает неудобства при рассмотрении конкретных примеров.

Пусть

$$\Phi = (a, \omega) = \sum a_i \omega_i = 0 \quad (a_i = \mathrm{const}) \tag{2.3}$$

— левоинвариантная связь, линейная по скоростям. Постоянный ненулевой ковектор a — элемент из коалгебры g^*. Предположим (согласно Бегену), что эта связь реализуется с помощью управляемой силы

$$\lambda b = (\lambda b_1, \ldots, \lambda b_n),$$

где $\lambda(t)$ — неизвестная функция времени (управление), а $b \in g^* \setminus \{0\}$. Тогда динамика системы с левоинвариантной сервосвязью принимает следующий вид:

$$\dot{m}_k = \sum c^i_{jk} m_i \omega_j + \lambda b_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \quad \sum a_i \omega_i = 0. \tag{2.4}$$

Если a и b коллинеарны, то система уравнений (2.4) задает неголономное движение со связью (2.3). В этом случае уравнения (2.4) допускают интеграл энергии $T = \mathrm{const}$. Если же ковекторы a и b не коллинеарны, то энергия, как правило, не сохраняется.

Условие реализации связи (2.3) сводится к неравенству

$$(I^{-1}a, b) \neq 0. \tag{2.5}$$

Оно означает, что ковекторы a и b не ортогональны во «внутренней» метрике на g^*, индуцированной исходной левоинвариантной метрикой на группе G. Условие (2.5) — это общее условие реализации сервосвязи (1.3), представленное в групповых переменных.

После исключения множителя λ из (2.4), систему на алгебре g (или на коалгебре g^*) можно свести к замкнутой системе из $n-1$ дифференциальных уравнений с однородными квадратичными правыми частями. Этого можно добиться разными способами. Укажем один из них. Для этого представим уравнения (2.4) как систему на коалгебре g^* (другими словами, обратим линейную систему (2.2) и заменим в (2.4) $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейными функциями от $m_1, \ldots, m_n$). Тогда уравнение связи примет вид

$$\sum A_j m_j = 0, \tag{2.6}$$

где $A = (A_1, \ldots, A_n)$ — ненулевой элемент из алгебры g. Линейной заменой переменных этот вектор приводится к виду $(0, \ldots, 0, 1)$, то есть уравнение связи (2.6) примет вид $m_n = 0$. Следовательно, последнее уравнение в динамической системе (2.4) сведется к алгебраическому, из которого множитель λ находится как квадратичная форма от $m_1, \ldots, m_n$. Подставляя это выражение для λ в первые $n-1$ уравнений, получаем требуемое.

Замкнутую систему из $p = n-1$ дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями будем называть *приведенной*.

3. Общие свойства приведенных систем

Итак, рассмотрим замкнутую систему дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^p = \{x_1, \ldots, x_p\}$

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \ldots, x_p), \quad 1 \leqslant j \leqslant p, \tag{3.1}$$

причем $v_1, \ldots, v_p$ — однородные квадратичные многочлены от p независимых переменных.

Случай $p = 1$ тривиальный. При $p = 2$ система (3.1) интегрируется в квадратурах. Это следствие более общего результата об интегрируемости автономных систем на плоскости с однородными правыми частями (восходящего еще к Лейбницу). Поскольку случай $p = 2$ будет представлять для нас особый интерес, приведем формулы, позволяющие, с одной стороны, проинтегрировать систему (3.1), а с другой — дать качественный анализ поведения ее траекторий. Для этого положим $z = x_2/x_1$. Тогда

$$\dot{z} = \frac{v_2 x_1 - v_1 x_2}{x_1^2} = x_1 f(z), \tag{3.2}$$

где

$$f(z) = v_2(1, z) - z v_1(1, z) \tag{3.3}$$

— многочлен от z третьей степени.

Предложение 1. *Если* $t \mapsto x(t)$ *— решение системы* (3.1), *то* $t \mapsto -x(-t)$ *также решение той же системы.*

Это — простое следствие квадратичности правых частей и теоремы единственности решений. Для обычных линейных систем с постоянными коэффициентами это не так: здесь $t \mapsto -x(t)$ также будет решением. Ясно, что $-x(-t+c)$ — решение системы (3.1) при всех вещественных c.

Заметим, что нетривиальные состояния равновесия системы (3.1) (то есть точки $x^0 \neq 0$, где $v(x^0) = 0$) не могут быть изолированными. Если $v(x^0) = 0$, то $v(\lambda x^0) = 0$ для всех вещественных λ. Качественные свойства решений системы (3.1) существенно зависят от существования нетривиальных равновесных состояний.

Теорема 1. *Если $v(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то система* (3.1) *допускает инвариантную прямую $x = \lambda\xi$, где ξ — ненулевой вектор из $\mathbb{R}^p$, а параметр λ изменяется со временем согласно дифференциальному уравнению*

$$\dot\lambda = c\lambda^2, \quad c \neq 0. \tag{3.4}$$

Это утверждение и его обобщения играют существенную роль в первом методе Ляпунова для сильно нелинейных систем [6]. Укажем кратко основные моменты его доказательства.

Снабдим $\mathbb{R}^p$ «стандартной» евклидовой структурой и рассмотрим гауссово отображение

$$x \mapsto \Gamma(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|},$$

$x \in S^{p-1}$ (единичная сфера в $\mathbb{R}^p$ с центром в нуле). Имеем гладкое отображение единичной сферы в себя. Индекс векторного поля v в точке $x = 0$ равен степени отображения Γ. Степень Γ будет четной, поскольку каждый элемент из $\operatorname{Im}\Gamma$ имеет четное число прообразов. Следовательно, степень Γ отлична от $(-1)^{p-1}$ и поэтому (по известной теореме из дифференциальной топологии) Γ имеет неподвижную точку $x = \xi$. Но тогда система дифференциальных уравнений (3.1) допускает инвариантную прямую $x = \lambda\xi$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Подстановка $x = \lambda\xi$ в уравнения (3.1) дает

$$\dot\lambda\xi = v(\lambda\xi) = \lambda^2 v(\xi) = \lambda^2\|v(\xi)\|\xi.$$

Отсюда получаем уравнение (3.4), где $c = \|v(\xi)\| \neq 0$. Что и требовалось.

Из теоремы 1 вытекает ряд важных следствий.

1°. Если $x = 0$ — единственная особая точка квадратичного векторного поля v, то она неустойчива. Более того, имеется решение со сколь угодно малым начальным условием, которое уходит на бесконечность за конечное время. Последнее вытекает из вида решения уравнения (3.4):

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0}{1 - c\lambda_0 t}, \ \ \lambda_0 = \lambda(0).$$

2°. Фазовый поток такой системы определен не на всей числовой оси времени t. Однако если равновесие $x = 0$ квадратичного векторного поля v не изолировано, то оно может быть устойчивым и при этом фазовый поток определен на всей оси $\mathbb{R} = \{t\}$. Вот простой пример:

$$\dot x_1 = x_1 x_2, \ \ \dot x_2 = -x_1^2.$$

Здесь вся ось $x_1 = 0$ состоит из положений равновесия.

3°. В условиях теоремы 1 система (3.1) не допускает положительно определенного первого интеграла (в частности, в виде положительно определенной квадратичной формы по $x_1, \ldots, x_p$). В противном случае равновесие $x = 0$ было бы устойчивым. В частности, на решениях исходной динамической системы (2.4) на алгебре Ли энергия не сохраняется.

Забегая вперед, скажем, что имеются примеры систем на группах Ли с левоинвариантными связями Бегена, приведенные системы которых удовлетворяют условию теоремы 1. Наоборот, равновесные состояния приведенных неголономных систем на группах Ли никогда не бывают изолированными.

Теорема 2. *Если ковекторы a и b коллинеарны, то тривиальное равновесие $x = 0$ приведенной системы устойчиво и имеется проходящая через начало координат прямая, целиком состоящая из положений равновесия.*

Действительно, в этом случае левоинвариантная связь (2.3) будет неголономной и поэтому динамическая система допускает интеграл энергии — положительно определенную квадратичную форму на алгебре g. Ее ограничение на гиперплоскость (2.3) даст нам положительно определенный квадратичный интеграл приведенной системы. Следовательно, тривиальное равновесие $x = 0$ устойчиво по Ляпунову. Наличие прямой равновесий вытекает из теоремы 1.

Замечание. Не следует думать, что если ковекторы a и b не коллинеарны, то приведенная система имеет лишь тривиальное равновесие $x = 0$. Ответ на этот вопрос зависит (кроме всего прочего) от строения группы Ли G. Например, если группа G абелева ($c_{ij}^k = 0$), то при всех a и b приведенная система вырождается в тривиальную: $\dot{x} = 0$. Все точки $\mathbb{R}^p$ являются состояниями равновесия, притом устойчивыми.

При $p = 2$ теорема 1 сразу же выводится из формул (3.2) и (3.3), поскольку многочлен третьей степени над полем вещественных чисел всегда имеет вещественный нуль. Здесь следует дать пояснения. Если ось $x_1 = 0$ не является инвариантной, то многочлен $v_1(1, z)$ имеет вторую степень. Тогда многочлен f из (3.3), действительно, третьей степени. Кроме того, в правой полуплоскости (где $x_1 > 0$) отношение $z = x_2/x_1$ может принимать все вещественные значения.

Мы можем утверждать больше: система (3.1) на плоскости с единственным тривиальным равновесием может иметь либо одну, либо три инвариантных прямых (считая кратности). Это наблюдение можно распространить на многомерный случай. Справедлива

Теорема 3. *Пусть снова $v(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Если количество инвариантных прямых* (*считая кратности*) *системы* (3.1) *конечно, то оно нечетно и не превосходит* $2^p - 1$.

При $p = 2$ получаем, что система (3.1) имеет либо одну, либо три (с кратностями) инвариантных прямых. Теорема 1, очевидно, содержится в теореме 3 (хотя используется при ее доказательстве).

В отличие от топологического доказательства теоремы 1, доказательство теоремы 3 алгебраическое. Запишем в явном виде систему алгебраических уравнений для нахождения инвариантных прямых:

$$v_1(x_1, \ldots, x_p) - \mu x_1 = 0, \ldots, v_p(x_1, \ldots, x_p) - \mu x_p = 0. \tag{3.5}$$

Это — система p однородных уравнений степени 2 относительно $p+1$ переменных $x_1, \ldots, x_p$ и μ. Согласно теореме Безу, количество различных комплексных непропорциональных ненулевых решений системы (3.5) (считая кратности) в точности равно 2^p. Одно из вещественных решений системы (3.5)

$$x_1 = \ldots = x_p = 0, \quad \mu = 1 \tag{3.6}$$

не дает никакой инвариантной прямой. Следовательно, число инвариантных прямых не превосходит $2^p - 1$. Поскольку $v(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то остальные ненулевые решения алгебраической системы (3.5) непропорциональны решению (3.6). Одно из *вещественных* решений алгебраической системы (3.5) существует по теореме 1. Остальные решения либо вещественные, либо пары *комплексно*-сопряженных решений. В любом случае общее количество вещественных непропорциональных решений (считая их с кратностями) нечетно. Что и доказывает теорему 3.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о системах с квадратичными правыми частями на плоскости, допускающих нетривиальные положения равновесия. Такие системы, конечно, не типичны. Оказывается, после подходящей замены времени они сводятся к линейным системам.

Теорема 4. *Пусть* $p = 2$ *и система* (3.1) *имеет целую прямую* $ax_1 + bx_2 = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$, *состоящую из положений равновесия. Тогда заменой времени* $t \mapsto \tau$,

$$d\tau = (ax_1 + bx_2)dt,$$

система (3.1) *приводится к линейной системе.*

Прямой равновесий без ущерба для общности можно считать, например, ось x_2. Этого всегда можно добиться подходящей линейной заменой переменных, не меняющей структуры и вида системы (3.1). При таком выборе переменных уравнения (3.1) принимают следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_1(Ax_1 + Bx_2), \quad \dot{x}_2 = x_1(Cx_1 + Dx_2). \tag{3.7}$$

Замена времени $d\tau = x_1 dt$ приводит эту систему к линейной.

Траектории линейной системы

$$x_1' = Ax_1 + Bx_2, \quad x_2' = Cx_1 + Dx_2, \tag{3.8}$$

очевидно, состоят из траекторий исходной системы. Только направление движения в исходной системе зависит еще и от знака переменной x_1.

В качестве примера рассмотрим линейную систему (3.8) с положением равновесия в виде устойчивого узла (рис. 1a). На рисунке 1b показан фазовый портрет исходной нелинейной системы (3.7). В отличие от линейной системы, тривиальное равновесие нелинейной системы уже неустойчиво. Стоит подчеркнуть, что смена устойчивости при переходе от линейной системы к нелинейной происходит не всегда.

Теорема 5. *Пусть* $p = 2$ *и система* (3.1) *допускает первый интеграл* F *в виде невырожденной квадратичной формы. Тогда эта система имеет целую прямую равновесных состояний.*

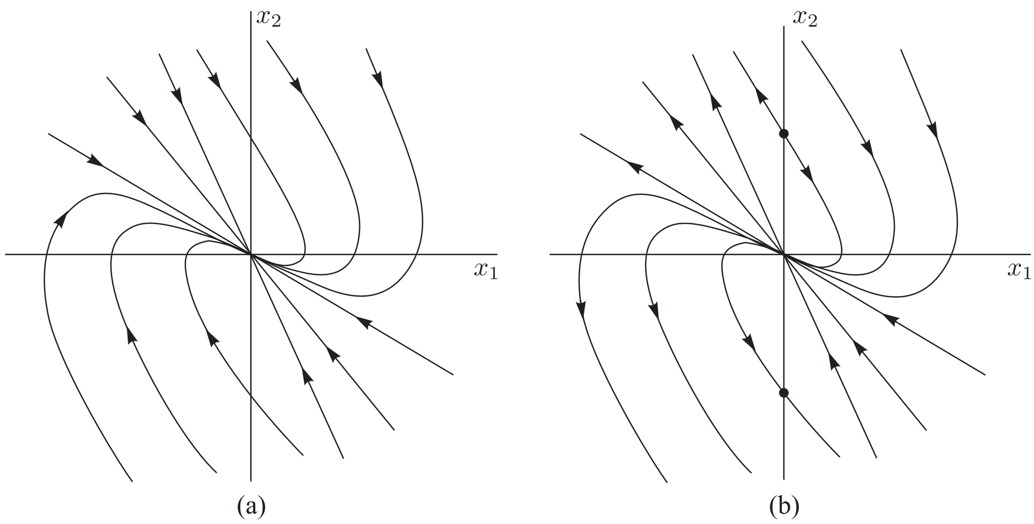


Рис. 1

Если интеграл F положительно (отрицательно) определен, то это утверждение отмечено ранее в работе [7]. В этом случае теорема 5 — простое следствие теоремы 1. Приведем доказательство теоремы 5 для квадратичного интеграла с сигнатурой $(1, 1)$. Невырожденной линейной заменой переменных интеграл F можно привести к виду

$$x_1x_2. \tag{3.9}$$

Пусть в новых переменных система (3.1) имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = a_1x_1^2 + b_1x_1x_2 + c_1x_2^2, \quad \dot{x}_2 = a_2x_1^2 + b_2x_1x_2 + c_2x_2^2. \tag{3.10}$$

Условие $\dot{F} = 0$ эквивалентно следующим соотношениям на коэффициенты этой системы:

$$a_2 = c_1 = 0, \quad a_1 + b_2 = 0, \quad b_1 + c_2 = 0.$$

Таким образом, (3.10) принимает следующий явный вид:

$$\dot{x}_1 = x_1(a_1x_1 + b_1x_2), \quad \dot{x}_2 = -x_2(a_1x_1 + b_1x_2). \tag{3.11}$$

Значит, прямая $a_1x_1+b_1x_2 = 0$ целиком состоит из положений равновесия. Если $a_1 = b_1 = 0$, то система вырождается в тривиальную $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, все решения которой — равновесные состояния. Что и требовалось.

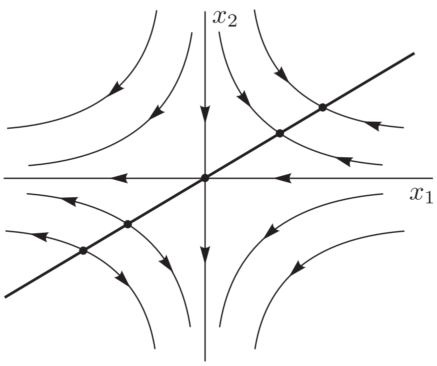


Рис. 2

Отметим, что после замены времени

$$d\tau = (a_1x_1 + b_1x_2)dt \tag{3.12}$$

система (3.11) переходит в линейную гамильтонову систему с гамильтонианом F. Фазовый портрет системы (3.11) изображен на рисунке 2 (направление движения по траекториям, конечно, может быть противоположным). Портрет фазовых траекторий для случая положительно определенного квадратичного интеграла хорошо известен (см. [8], где рассмотрена известная неголономная задача Суслова).

4. Замечания о фазовых портретах на плоскости

Рассмотрим приведенную систему на плоскости ($p = 2$); она имеет вид (3.10). В типичной ситуации система (3.10) имеет единственное равновесное состояние $x_1 = x_2 = 0$. Более точно, это свойство имеет место при выполнении следующих неравенств:

$$(a_1c_2 - c_1a_2)^2 + a_1c_1b_2^2 + b_1^2a_2c_2 - a_1b_1b_2c_2 - b_1c_1a_2b_2 \neq 0,$$
$$(a_1^2 + a_2^2)(c_1^2 + c_2^2) \neq 0.$$

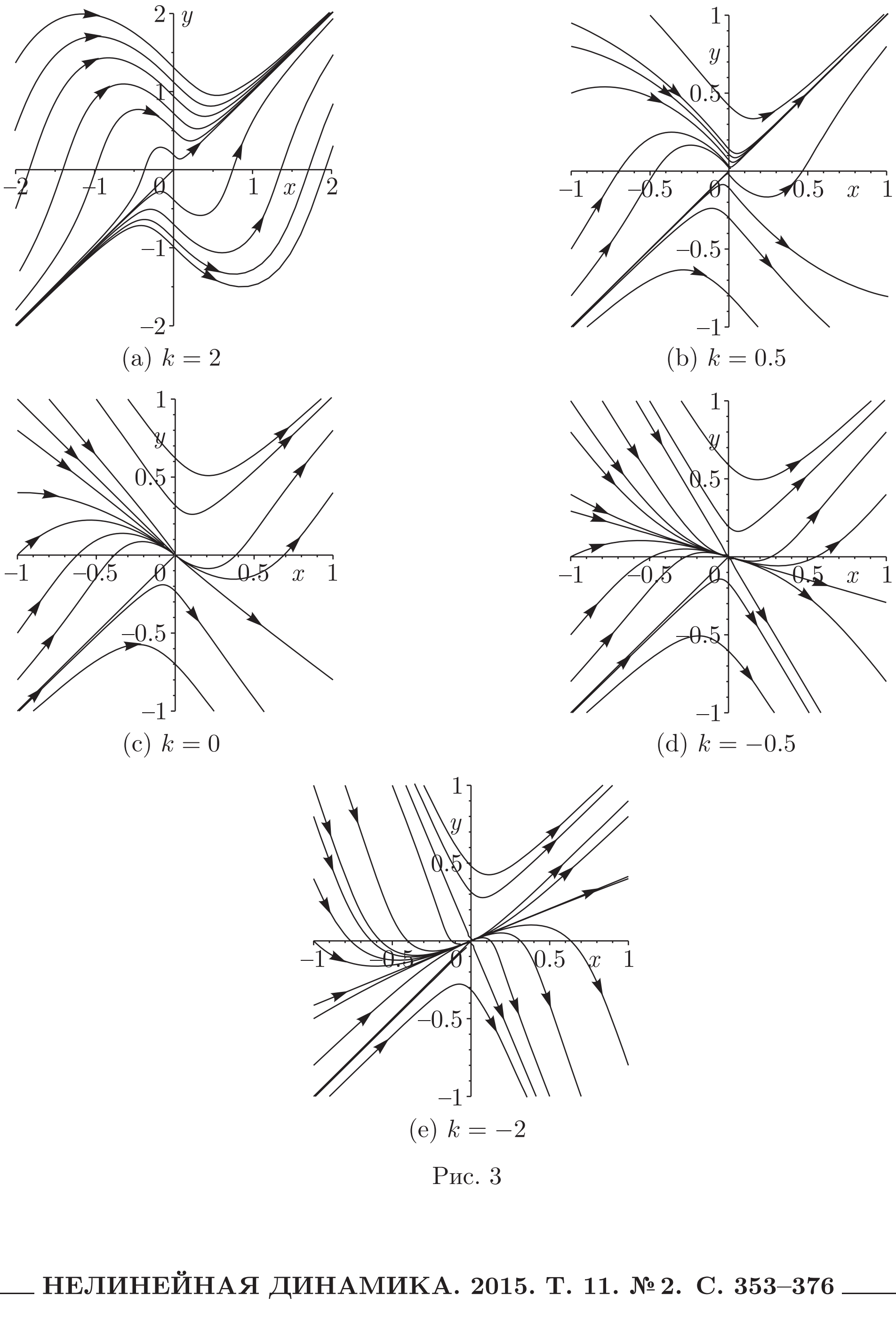
Как выглядят фазовые портреты таких систем (с единственным тривиальным равновесием)? Как мы уже видели в § 2, система (3.10) имеет либо одну, либо три (считая кратности) инвариантных прямых, проходящих через начало координат — положение равновесия.

Используя формулы (3.2)–(3.3) и их модификации, можно дать классификацию возможных видов фазовых портретов системы (3.10). Более того, используя проективные координаты, можно даже получить информацию об уходе фазовых траекторий в бесконечность (как это делалось, например, в [9] для систем на плоскости с полиномиальными правыми частями). Однако автору неизвестно, была ли проделана эта работа. Обычно исследуются более сложные системы с наличием линейных по x_1 и x_2 слагаемых (см. [9]).

Тем не менее, исчерпывающее представление о возможных видах фазовых портретов дают рисунки 3a–3e, на которых изображены фазовые портреты системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = (k+1)x_1^2 + (2-k)x_1x_2 - x_2^2, \tag{4.1}$$

содержащей вещественный параметр k.



(a) $k = 2$ (b) $k = 0.5$

(c) $k = 0$ (d) $k = -0.5$

(e) $k = -2$

Рис. 3

Система (4.1), очевидно, удовлетворяет условию теоремы 1. При всех k она имеет инвариантную прямую $x_1 = x_2$. Если $k > 0$, то других инвариантных прямых нет, а при $k < 0$ добавляются две инвариантные прямые

$$x_2 = (-1 + \sqrt{-k})x_1 \quad \text{и} \quad x_2 = (-1 - \sqrt{-k})x_1. \tag{4.2}$$

При $k = 0$ («бифуркационное» значение параметра) эти прямые совпадают. Рисунки 3a–3e дают ясное представление о перестройке фазового портрета при прохождении параметра через точку бифуркации.

При положительных значениях k фазовые траектории будут двоякоасимптотическими к инвариантной прямой $x_1 = x_2$. Они имеют вид «волны», горб которой неограниченно увеличивается при $k \to +0$. При $k < 0$ появляется новая пара инвариантных прямых (4.2), между которыми все фазовые траектории в левой полуплоскости стремятся к положению равновесия $x_1 = x_2 = 0$ при $t \to +\infty$.

5. Вращение твердого тела с левоинвариантной сервосвязью

Это простой, но важный пример развиваемой теории; его рассмотрение намечено еще в работе [3]. Здесь группа Ли G — трехмерная группа $SO(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства. Наличие евклидовой метрики на алгебре $SO(3)$ позволяет отождествлять ковекторы и векторы.

Уравнения (2.4) на алгебре $SO(3)$ принимают следующий вид:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \lambda b, \quad (a, \omega) = 0. \tag{5.1}$$

Символ «$\times$» обозначает векторное произведение, I — тензор инерции твердого тела, постоянные ненулевые векторы a и b задают направления фиксированных в теле осей l и n (которые упоминаются в [3]).

Оси подвижного ортогонального трехгранника выберем так, чтобы третья ось совпала с осью l. В этих осях вектор a имеет компоненты 0, 0, 1. Обозначим I_{ij} компоненты тензора инерции, а ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора угловой скорости ω на выбранные оси. В этих обозначениях $\omega_3 = 0$ будет уравнением связи, а уравнения (5.1) примут следующий явный вид:

$$\begin{aligned}
&I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{12}\dot{\omega}_2 + (I_{13}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_2)\omega_2 = \lambda b_1,\\
&I_{12}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - (I_{13}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_1)\omega_1 = \lambda b_2,\\
&I_{13}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_2 + (I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2)\omega_1 - (I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2)\omega_2 = \lambda b_3.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь мы уже учли уравнение связи $\omega_3 = 0$. Чтобы получить приведенную систему на плоскости, надо из (5.2) исключить множитель λ.

Если $b_1 = b_2 = 0$ (а $b_3 \neq 0$), то получим уравнения классической задачи Суслова из неголономной механики. Ее фазовый портрет хорошо известен (см. [8]). Чтобы почувствовать разницу в качественном поведении системы в общем случае (когда $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$), положим $I_{13} = I_{23} = 0$. Из последнего уравнения найдем множитель Лагранжа

$$\lambda = I_{12}\omega_1^2 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 - I_{12}\omega_2^2. \tag{5.3}$$

В общем случае эта квадратичная форма — не тождественный нуль. Из первых двух уравнений (5.2) легко выводится линейный интеграл

$$(b_2 I_{11} - b_1 I_{12})\omega_1 + (b_2 I_{12} - b_1 I_{22})\omega_2 = \text{const}.$$

Этот интеграл не вырождается при естественном условии $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ (поскольку $I_{11}I_{22} - I_{12}^2 > 0$). Его линии уровня прямые. Фазовый портрет изображен на рисунке 4. Две жирные прямые (состоящие из положений равновесия) — это прямые, на которые распадается уравнение $\lambda = 0$. Подчеркнем, что λ — нейтральная квадратичная форма от ω_1 и ω_2. Указанное направление движения по прямолинейным участкам фазовых траекторий соответствует положительному значению произведения $I_{12}(b_1I_{22} - b_2I_{12})$. Если $I_{12} = 0$, то положения равновесия (где $\lambda = 0$) будут заполнять координатные оси $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$.

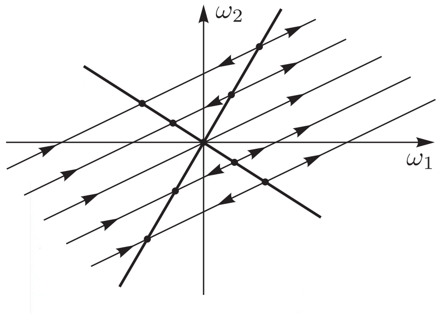


Рис. 4

Видно, что фазовый портрет на рисунке 4 радикальным образом отличается от портрета неголономной задачи Суслова (который при $I_{13} = I_{23} = 0$ сплошь состоит из положений равновесия). В частности, если $I_{11} \neq I_{22}$, то равновесие $\omega_1 = \omega_2 = 0$ всегда неустойчиво.

Перейдем теперь к обсуждению общего случая. Начиная с этого момента мы будем предполагать, что

$$b_1 = 0.$$

Этого всегда можно добиться поворотом ортогональной системы координат на подходящий угол вокруг третьей оси (совпадающей с осью l).

Согласно [3], условие реализуемости связи

$$\omega_3 = 0 \tag{5.4}$$

сводится к условию, что неподвижные в теле оси l и n не ортогональны в метрике, задаваемой кинетической энергией тела (точнее, в метрике на двойственной алгебре $(so(3))^*$, которая задается тензором I^{-1}). Это же условие можно получить по-другому, исключая из двух последних уравнений (5.2) множитель Лагранжа (первое уравнение не содержит множителя λ, так как $b_1 = 0$ по предположению). После этого получаем систему двух уравнений относительно ω_1 и ω_2, и условие реализуемости связи (5.4) сводится к условию разрешимости этой системы относительно производных $\dot\omega_1$ и $\dot\omega_2$. В итоге приходим к неравенству

$$b_3(I_{11}I_{22} - I_{12}^2) - b_2(I_{11}I_{23} - I_{12}I_{13}) \neq 0. \tag{5.5}$$

Это и есть искомое условие реализуемости связи (5.4). В (5.5), конечно, $b_2^2 + b_3^2 \neq 0$.

Если $b_2 = 0$, а $b_3 \neq 0$, то условие (5.5) заведомо выполнено. Это наблюдение — частный случай более общего результата о реализуемости обычных неголономных связей. Наоборот, если $b_3 = 0$, а $b_2 \neq 0$ (оси l и n ортогональны относительно евклидовой метрики $SO(3)$, индуцированной метрикой исходного трехмерного евклидова пространства), то условие реализуемости (5.5) принимает вид

$$I_{11}I_{23} \neq I_{12}I_{13}.$$

Это условие, конечно, может нарушаться при некоторых специальных распределениях массы твердого тела.

Найдем все равновесные состояния приведенной системы. Для этого запишем в явном виде уравнения (5.2) после исключения множителя Лагранжа:

$$I_{11}\dot\omega_1 + I_{12}\dot\omega_2 + (I_{13}\dot\omega_1 + I_{23}\dot\omega_2)\omega_2 = 0, \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered}(b_3I_{12} - b_2I_{13})\dot\omega_1 + (b_3I_{22} - b_2I_{23})\dot\omega_2 - [(b_3I_{13} + b_2I_{12})\omega_1 + (b_3I_{23} + b_2I_{22})\omega_2]\omega_1 + \\ + b_2(I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2)\omega_2 = 0.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Из уравнения (5.6) вытекает, что в состоянии равновесия либо $\omega_2 = 0$, либо

$$I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0. \tag{5.8}$$

Рассмотрим сначала первую возможность. Уравнение (5.7) дает в этом случае соотношение

$$(b_3 I_{13} + b_2 I_{12})\omega_1^2 = 0.$$

Таким образом, если

$$(b_3 I_{13} + b_2 I_{12}) \neq 0, \tag{5.9}$$

то приведенная система не допускает нетривиальных положений равновесия. Наоборот, если

$$(b_3 I_{13} + b_2 I_{12}) = 0,$$

то вся ось $\omega_2 = 0$ целиком состоит из положений равновесия. В этом случае приведенная система (5.6)–(5.7) сводится к линейной системе после замены времени

$$d\tau = \omega_2 dt.$$

Этот результат предсказывается теоремой 4.

Как выглядит фазовый поток соответствующей линейной системы? Мы ответим на него в частном случае, когда $I_{12} = I_{13} = 0$. Линейная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &I_{11}\omega_1' + I_{23}\omega_2 = 0, \\ &(b_3 I_{22} - b_2 I_{23})\omega_2' + (b_2 I_{11} - b_2 I_{22} - b_3 I_{23})\omega_1 = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Она допускает квадратичный интеграл

$$I_{11}[b_2(I_{11} - I_{22}) - b_3 I_{23}]\omega_1^2 - I_{23}(b_3 I_{22} - b_2 I_{23})\omega_2^2 = 0. \tag{5.11}$$

Фазовые траектории системы (5.10) (как и исходной нелинейной системы) состоят из линий уровня этой функции. Пусть $b_3 I_{23} \neq 0$. Тогда всегда найдутся интервалы изменения отношения b_2/b_3, на которых квадратичная форма (5.11) определенная (положительно или отрицательно), а также целые интервалы, когда форма (5.11) нейтральная. В первом случае фазовый поток схож с фазовым потоком неголономной задачи Суслова, а во втором — имеет вид, изображенный на рисунке 2.

Рассмотрим теперь вторую возможность, когда выполнено равенство (5.8). Тогда (в предположении $b_2 \neq 0$) из уравнения (5.7) вытекает соотношение

$$I_{12}\omega_1^2 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 - I_{12}\omega_2^2 = 0. \tag{5.12}$$

Общее решение уравнения (5.8) имеет вид

$$\omega_1 = kI_{23}, \quad \omega_2 = -kI_{13} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Подставляя в (5.12), получим, что при условии

$$I_{12}(I_{23}^2 - I_{13}^2) - (I_{22} - I_{11})I_{13}I_{23} \neq 0 \tag{5.13}$$

имеется только тривиальное равновесие (поскольку $k = 0$).

Сказанное можно суммировать в следующий вывод:

- если $b_2 \neq 0$ и выполнены неравенства (5.9) и (5.13), то приведенная система не допускает нетривиальных положений равновесия.

В частности, при этих условиях тривиальное равновесие $\omega_1 = \omega_2 = 0$ системы уравнений (5.6)–(5.7) неустойчиво. К исследованию этой системы можно применить общие результаты §§ 2 и 3. Отметим, в частности, что если вместо неравенства (5.13) имеем равенство, то система нелинейных уравнений (5.6)–(5.7) допускает целую прямую равновесий и, согласно теореме 4, также сводится к линейной системе после подходящей замены времени.

В заключение этого параграфа скажем кратко об условиях существования интегрального инварианта (инвариантной меры) с гладкой положительной плотностью у приведенной системы (5.6)–(5.7). Согласно [10], такой интегральный инвариант существует тогда и только тогда, когда фазовый поток такой системы сохраняет стандартную меру Лебега на плоскости. Другими словами, если представить систему (5.6)–(5.7) в стандартной форме

$$\dot{\omega}_1 = v_1(\omega_1, \omega_2), \quad \dot{\omega}_2 = v_2(\omega_1, \omega_2),$$

то это условие сведется к условию бездивергентности:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \omega_2} = 0. \tag{5.14}$$

Поскольку функции v_1 и v_2 квадратичны по ω_1 и ω_2, то левая часть (5.14) — линейная однородная функция от ω_1 и ω_2. Следовательно, в итоге (5.14) сведется к условиям равенства нулю коэффициентов при ω_1 и ω_2.

Опуская элементарные вычисления, укажем итоговый результат. Приведенная система (5.6)–(5.7) допускает интегральный инвариант с гладкой положительной плотностью только при выполнении следующих двух условий:

$$b_2(2I_{12}^2 - I_{11}I_{12} + I_{11}^2 + I_{13}^2) + b_3(I_{12}I_{13} - I_{11}I_{23}) = 0, \tag{5.15}$$

$$b_2(I_{12}I_{22} + I_{13}I_{23}) + b_3(I_{22}I_{13} - I_{23}I_{12}) = 0. \tag{5.16}$$

Таким образом, системы с интегральным инвариантом образуют подмножество коразмерности 2 в пространстве всех приведенных систем.

В частном случае, когда $I_{12} = I_{13} = 0$ (плоскость, натянутая на векторы a и b, будет инвариантной для тензора инерции твердого тела), условие (5.16) выполнено автоматически, а условие (5.15) упрощается:

$$b_2(I_{22} - I_{11}) + b_3 I_{23} = 0.$$

При условиях (5.15) и (5.16) приведенная система допускает первый интеграл в виде ненулевого однородного многочлена третьей степени. Действительно, согласно Эйлеру, дифференциальная 1-форма

$$v_2 d\omega_1 - v_1 d\omega_2 \tag{5.17}$$

будет полным дифференциалом первого интеграла dH исходной системы. После известных последовательных интегрирований формы (5.17) получаем однородный интеграл третьей степени H. Поскольку $v_1 = -\partial H/\partial \omega_2$, $v_2 = \partial H/\partial \omega_1$, то приведенная система принимает гамильтонову форму:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \omega_2}, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{\partial H}{\partial \omega_1}.$$

Замечание. Динамические системы с наличием нетривиальных равновесий, фазовые портреты которых изображены на рисунках 1b, 2 и 4, не допускают интегрального инварианта с гладкой положительной плотностью из-за того, что все их траектории являются асимптотическими (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$). Более того, они даже не допускают инвариантной меры, абсолютно непрерывной относительно обычной меры Лебега на плоскости. Тем же свойством обладает и приведенная система в неголономной задаче Суслова (обсуждение см. в [8]). Но не стоит думать, что все системы с квадратичными правыми частями (не обращающимися в тождественный нуль), допускающие нетривиальные положения равновесия, обладают этим свойством. Вот простой контрпример: $\dot{x}_1 = x_2^2$, $\dot{x}_2 = 0$. Укажем еще пример системы с единственным тривиальным равновесием, фазовый поток которой сохраняет обычную меру Лебега: $\dot{x}_1 = x_2^2$, $\dot{x}_2 = x_1^2$. Эта система является гамильтоновой; гамильтонианом служит функция

$$H = \frac{x_1^3 - x_2^3}{3}.$$

Множество $\{H = 0\}$, очевидно, инвариантно. Оно сводится к единственной прямой $x_1 = x_2$, существование которой гарантирует теорема 1.

6. Сани Чаплыгина как система с сервосвязью

Сани Чаплыгина — это твердое тело, движущееся по горизонтальной плоскости с неинтегрируемой связью: скорость некоторой его точки (обозначим ее O) всегда ортогональна фиксированной в теле горизонтальной оси l. Классический неголономный вариант этой задачи хорошо изучен (см., например, [7, 11, 12]). Мы рассмотрим динамику саней Чаплыгина в предположении, что упомянутая неинтегрируемая связь реализуется управляемыми силами (по Бегену). Для краткости такую систему будем называть *сервосанями*.

Положение твердого тела на плоскости задается тремя параметрами: декартовыми координатами x, y выделенной точки O и углом поворота φ. Введем подвижную систему отсчета с началом в точке O, причем одну из этих осей направим по выделенной оси l. Пусть u, v — проекции скорости точки O на эти оси, ω — угловая скорость. Уравнение неинтегрируемой связи имеет вид

$$v = 0. \tag{6.1}$$

Мы будем рассматривать самый простой вариант, когда центр масс твердого тела совпадает с точкой O. Неголономная динамика такой системы тривиальна: точка O движется по окружности или по прямой (окружности бесконечного радиуса) с постоянной скоростью. Динамика саней с сервосвязью более содержательная.

Конфигурационное пространство сервосаней — группа движений плоскости $E(2)$. Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m}{2}(u^2 + v^2) + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{6.2}$$

где m — масса тела, а I — момент инерции относительно вертикальной прямой, проходящей через точку O. И кинетическая энергия (6.2), и связь (6.1), очевидно, левоинвариантны. Поэтому мы можем применить общий подход, указанный в § 3.

Замечание. Ввиду известной ретракции группы $SO(3)$ к группе $E(2)$, задачу о сервосанях можно рассматривать как предельный случай задачи о вращении твердого тела со связью из § 5 (эти вопросы обсуждаются, например, в [7]). Но мы проведем независимый анализ этой задачи, дополнив его геометрическим рассмотрением движения саней по плоскости.

Уравнения (2.4) с учетом связи (6.1) имеют следующий вид:

$$m\dot{u} = m\lambda a, \quad 0 = -mu\omega + \lambda b, \quad I\dot{\omega} = \lambda c.$$

Здесь λa, λb — «следящие» силы, направленные вдоль подвижных осей, λc — дополнительный момент сил, относительно вертикальной оси, проходящей через точку O; a, b, $c = \mathrm{const}$. Если $a = c = 0$, $b \neq 0$, то имеем классическое неголономное движение. Условие реализации сервосвязи в общем случае также сводится к неравенству $b \neq 0$.

Приведенная система описывается совсем простыми дифференциальными уравнениями:

$$\dot{u} = \alpha u\omega, \quad \dot{\omega} = \beta u\omega \quad \left(\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{mc}{Ib}\right). \tag{6.3}$$

Координатные оси $u = 0$ и $\omega = 0$ сплошь состоят из равновесных состояний. Система (6.3) имеет линейный интеграл

$$\beta u - \alpha\omega = \gamma = \mathrm{const}. \tag{6.4}$$

Мы будем обсуждать общий случай, когда обе постоянные α и β отличны от нуля. Фазовый портрет системы (6.3) изображен на рисунке 5. Расположение инвариантных прямых (6.4) и направление движения по траекториям соответствуют случаю, когда $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Фазовый портрет на рисунке 5 есть частный случай более общей ситуации, изображенной на рисунке 4.

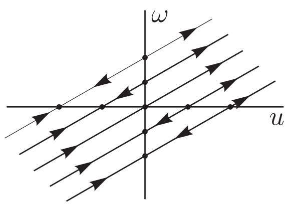


Рис. 5

Уравнения (6.3) легко интегрируются в явном виде с использованием линейного первого интеграла (6.4). Исключая переменную ω из первого уравнения, получим уравнение для отыскания линейной скорости точки O:

$$\dot{u} = u(\beta u - \gamma).$$

Предполагая, что константы β и γ положительны, укажем решение с траекторией в виде интервала $0 < u < \gamma/\beta$:

$$u(t) = \frac{\gamma}{\beta + e^{\gamma t}}. \tag{6.5}$$

Это решение двоякоасимптотическое: при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ оно стремится, соответственно, к γ/β и 0. Решения вида (6.5) отвечают траекториям системы (6.3), расположенным в четвертом квадранте на рисунке 5 (где $u > 0$, а $\omega < 0$). При этом угловая скорость ω также монотонно убывает от 0 до $-\gamma/\alpha$.

Простой анализ приведенной системы позволяет получить явное представление о скольжении сервосаней по горизонтальной плоскости. Мы по-прежнему будем считать, что все константы α, β и γ положительны.

Декартовы координаты x, y выделенной точки O, а также угол поворота φ саней могут быть найдены из следующих кинематических соотношений:

$$\dot{x} = u\cos\varphi, \quad \dot{y} = u\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Мы предполагаем, что угол φ отсчитывается от неподвижной оси x в положительном направлении; это угол между осью x и осью подвижного репера, не совпадающей с выделенной осью l.

Сосчитаем кривизну траектории точки O:

$$\frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{1}{\alpha}\left|\frac{\beta u - \gamma}{u}\right|\frac{1}{u} = \frac{e^{\gamma t}(\beta + e^{\gamma t})}{\alpha\gamma}.$$

Важно отметить, что кривизна не зависит от угла поворота саней. Кривизна всегда положительна, и при $t \to -\infty$ она экспоненциально быстро стремится к нулю, а при $t \to +\infty$, наоборот, экспоненциально возрастает. Траектория точки O изображена на рисунке 6. Ее длина от любой точки влево бесконечна, а вправо — наоборот, конечна. Это — простое следствие формулы для длины дуги

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} u(t)\, dt$$

и формулы (6.5).

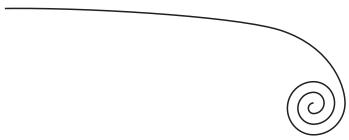


Рис. 6

Таким образом, в «отдаленном прошлом» тело практически движется по прямой не вращаясь, затем тело начинает вращаться с увеличивающейся угловой скоростью и траектория точки O начинает закручиваться по спирали. При бесконечно больших положительных значениях времени точка O становится неподвижной, а тело в итоге переходит во вращение с постоянной скоростью вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через точку O. Конечно, точка O может двигаться по «завитку», изображенному на рисунке 6, в противоположном направлении. При этом сани совершают асимптотический переход от вращения вокруг вертикальной оси к поступательному движению по прямой. Такие движения отвечают начальным данным из второго квадранта фазовой плоскости приведенной системы. Вообще, завитки получаются друг из друга преобразованиями подобия и зеркального отражения. Это — простое следствие свойства однородности системы (6.3). При зеркальном отражении сани закручиваются в противоположном направлении.

Движения, уходящие в бесконечность (или приходящие из бесконечности) за конечное время, представляют меньший интерес, и их анализ здесь не приводится.

7. Сервосани на наклонной плоскости

Усложним задачу и рассмотрим динамику сервосаней на наклонной плоскости. В отличие от § 6, теперь на твердое тело еще действует сила тяжести. Уравнения движения усложняются, и теперь динамические уравнения не отделяются от кинематических соотношений (как это было в § 3).

В обозначениях § 6 уравнения движения сервосаней имеют следующий вид:

$$m\dot{u} = \lambda a - p\sin\varphi, \quad 0 = -mu\omega + \lambda - p\cos\varphi, \quad I\dot{\omega} = \lambda c. \tag{7.1}$$

Здесь мы уже учли уравнения связи $v = 0$ и, кроме того, положили $b = 1$ (это всегда можно сделать в предположении реализуемости связи $v = 0$). Угол поворота φ отсчитывается от горизонтальной прямой на наклонной плоскости; $p > 0$ — вес тела (точнее, произведение веса тела на синус угла между наклонной и горизонтальной плоскостями).

Второе уравнение (7.1) служит для нахождения множителя λ. Подставляя формулу для λ в первое и третье уравнения (7.1), получим:

$$m\dot{u} = mau\omega + ap\cos\varphi - p\sin\varphi, \quad I\dot{\omega} = mcu\omega + cp\cos\varphi. \tag{7.2}$$

Добавляя кинематическое соотношение

$$\dot{\varphi} = \omega, \tag{7.3}$$

получим замкнутую систему автономных дифференциальных уравнений в трехмерном пространстве, 2π-периодическую по угловой переменной φ.

Если $a = c = 0$, то получим интегрируемую (и хорошо изученную) неголономную систему; для почти всех начальных данных неголономные сани не будут спускаться по наклонной плоскости, двигаясь в среднем по горизонтали. При $c = 0$ система (7.2)–(7.3) также легко интегрируется в квадратурах. Однако при $c \neq 0$ система (7.2)–(7.3) вряд ли относится к числу интегрируемых. В связи с этим становится актуальной задача ее качественного исследования. Первый шаг в этом направлении — поиск частных решений и исследование их устойчивости.

Если $c = 0$, то имеется семейство частных решений, когда $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$: сани спускаются по наклонной прямой с постоянным ускорением (если $a\cos\varphi_0 = \sin\varphi_0$, то сани движутся с постоянной скоростью). Однако все они неустойчивы.

В общем случае, когда $c \neq 0$, имеется только одно такое движение, при котором $\varphi = \pm\pi/2$: сани движутся по прямой наискорейшего спуска. Исследуем устойчивость такого движения, полагая для определенности $\varphi = \pi/2$ (случай $\varphi = -\pi/2$ ничем не отличается от этого).

Теорема 6. *Если $c > 0$, то движение сервосаней по вертикальной прямой (когда $\varphi = \pi/2$) устойчиво по отношению к $\xi = \pi/2 - \varphi$ и $\dot{\xi}$.*

При $c \leqslant 0$ такое движение неустойчиво. Обсудим физический смысл условия теоремы. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\dot{u} = -p/m$. Следовательно, при больших значениях времени линейная скорость саней отрицательна. Пусть сани движутся по инерции; тогда справа во втором уравнении (7.2) надо отбросить второе слагаемое. Если $u(t) < 0$, то положительный управляющий момент ($c > 0$) будет стабилизировать прямолинейное движение саней.

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется

Лемма. *Пусть $t \mapsto u(t)$ — решение уравнения*

$$\dot{u} = \lambda(t)u + \mu(t) \tag{7.4}$$

с начальным условием $u(0) \leqslant 0$. Тогда $u(t) < 0$ в интервале времени $(0, \tau)$, где $\mu(t) < 0$.

Действительно, функция $u(\cdot)$ (как решение (7.4)) выражается формулой

$$u(0) + \left[\exp\int\limits_0^t \lambda(s)ds\right]\left\{\int\limits_0^t \mu(s)\left[\exp\left(-\int\limits_0^s \lambda(\tau)\,d\tau\right)\right]ds\right\}.$$

Эти значения отрицательны, коль скоро отрицательны значения функции $\mu(\cdot)$.

Теорема 6 доказывается непрерывной индукцией по времени. Сначала заметим, что первое уравнение (7.2) имеет вид (7.4), где

$$\lambda = aw, \quad \mu = g(a\cos\varphi - \sin\varphi), \tag{7.5}$$

здесь $g = p/m$ — ускорение свободного падения, λ и μ — сложные функции времени (они зависят от φ и $\dot{\varphi}$, которые, в свою очередь, суть функции времени как решения рассматриваемой системы). С другой стороны, второе уравнение (7.2) можно представить в виде уравнения движения частицы по прямой $\mathbb{R} = \{\xi\}$ в потенциальном поле и сопротивляющейся среде:

$$I\dot{\xi} - (mcu)\dot{\xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0, \quad V = cp(1 - \cos\xi).$$

Так как $c > 0$, то потенциал V имеет строгий локальный минимум в точке $\xi = 0$. Если с некоторого момента времени $u(t) < 0$, то равновесное состояние $\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$ устойчиво в силу известного неравенства

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{I\dot{\xi}^2}{2} + V(\xi)\Big] = (mcu)\dot{\xi}^2 \leqslant 0. \tag{7.6}$$

Если сани движутся по вертикальной прямой ($\xi = \frac{\pi}{2} - \varphi = 0$), то, очевидно, в некоторый момент времени скорость u будет отрицательной (сани будут двигаться вниз). По непрерывности это свойство имеет место при малых начальных возмущениях ξ и $\dot{\xi}$.

Согласно (7.5), функция μ отрицательна при малых значениях ξ. Таким образом, если $\xi(t)$ мало, то (по лемме) $u(t) < 0$, начиная с некоторого момента t. Но если $u(t)$ отрицательно, то значения ξ (и $\dot{\xi}$) остаются малыми согласно неравенству (7.6). Применяя индукцию по времени, отсюда выводим заключение теоремы.

По-видимому, при $c > 0$ имеет место асимптотическая устойчивость по отношению к ξ и $\dot{\xi}$. По крайней мере это верно для линеаризованного уравнения, которое имеет вид

$$\ddot{\xi} + \alpha t\dot{\xi} + \alpha\xi = 0, \quad \alpha = \frac{pc}{I} > 0. \tag{7.7}$$

Для доказательства асимптотической устойчивости равновесия $\xi = \dot{\xi} = 0$ линейной системы можно воспользоваться разложениями в ряды решений уравнения (7.7). Представим (7.7) в виде системы

$$\begin{gathered}\dot{x}(At + B)x, \quad x = (\xi, \dot{\xi})^T,\\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\alpha & 0\end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{7.8}$$

Поскольку собственные значения матрицы A (числа 0 и $-\alpha$) различны, то (как показано в [13]) решения системы (7.8) можно искать в форме следующих рядов:

$$x(t) = t^{\varkappa}\left(x_0 + \frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t^2} + \ldots\right)\exp(\beta t^2 + \gamma t). \tag{7.9}$$

Здесь $x_0, x_1, \ldots$ — векторы из $\mathbb{R}^2$, 2β — собственное число матрицы A, а константы $\varkappa$ и γ подлежат нахождению.

Так как $\alpha > 0$, то собственному значению $2\beta = -\alpha$ отвечает решение (7.9), которое сверхэкспоненциально быстро стремится к нулю. Нулевому собственному значению матрицы A (случай $\beta = 0$) отвечает решение системы (7.8) в виде ряда по обратным степеням t ($\varkappa = -1$, $\gamma = 0$):

$$\frac{1}{t}\left(x'_0 + \frac{x'_1}{t} + \ldots\right), \quad x'_j \in \mathbb{R}^2.$$

Оно также стремится к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, равновесие линейной системы (7.7), действительно, асимптотически устойчиво.

8. Вращение твердого тела с левоинвариантной сервосвязью в поле силы тяжести

Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки с левоинвариантной линейной сервосвязью в осесимметричном силовом поле с потенциалом $V(\gamma)$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений, обобщающих систему (5.1):

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \gamma \times V'_\gamma + \lambda b, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0, \quad (a, \omega) = 0. \tag{8.1}$$

Здесь γ — единичный вектор вертикали в подвижной системе отсчета, связанной с твердым телом. Если тело вращается в поле силы тяжести, то

$$V(\gamma) = (c, \gamma), \tag{8.2}$$

где постоянный вектор c равен произведению веса тела на радиус-вектор его центра масс в подвижной системе отсчета. Без ущерба для общности можно считать, что левоинвариантная связь имеет вид $\omega_3 = 0$.

Предложение 2. *Если выполнены условия* (5.15) *и* (5.16)*, то фазовый поток системы* (8.1) *сохраняет стандартную меру в* $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3\{\omega\} \times \mathbb{R}^3\{\gamma\}$.

Доказательство состоит в непосредственной проверке следующего факта: дивергенция правой части системы дифференциальных уравнений (8.1) равна нулю, если выполнены условия (5.15)–(5.16). В отсутствие силового поля это установлено в § 5. Оказывается, добавление потенциального силового поля не влияет на величину дивергенции.

В неголономной модели (когда $b_2 = 0$, а $b_3 \neq 0$) условия (5.15) и (5.16) эквивалентны равенствам $I_{13} = I_{23} = 0$. Это в точности означает, что вектор a есть собственный вектор оператора инерции. Результат о сохранении меры в этом случае отмечен в [8].

Рассмотрим теперь некоторые аспекты задачи о вращении твердого тела в однородном силовом поле с потенциалом (8.2).

Теорема 7. *Пусть* $Ia = \mu a$ $(\mu \in \mathbb{R})$*, а вектор* c *ортогонален векторам* a *и* b*. Тогда уравнения* (8.1) *допускают линейный по скорости интеграл*

$$F = (I\omega, c). \tag{8.3}$$

В неголономной модели векторы a и b коллинеарны. В этом случае имеем одно условие $(a, c) = 0$; интеграл (8.3) получен Е. И. Харламовой в работе [21]. Подчеркнем, что если a — собственный вектор оператора инерции, то в общем случае (когда $b_2 \neq 0$) уравнения движения не допускают инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. В условиях теоремы 7 неголономные уравнения интегрируются в квадратурах, поскольку кроме инвариантной меры и интеграла (8.3) уравнения движения допускают еще три первых интеграла

$$\frac{1}{2}(I\omega, \omega) + (c, \gamma), \quad (a, \omega), \quad (\gamma, \gamma). \tag{8.4}$$

Свойство интегрируемости вытекает из классической теоремы Эйлера – Якоби об интегрирующем множителе.

Для сервосвязей общего вида интегралами являются (8.3) и две последние функции (8.4), что явно недостаточно для интегрируемости уравнений вращения твердого тела.

Линейный интеграл (8.3) имеет вид нётерова интеграла:

$$F = \left(\frac{\partial T}{\partial \omega}, c\right), \quad T = \frac{1}{2}(I\omega, \omega).$$

Покажем, что его действительно можно вывести из обобщенной (по сравнению с формулировкой из введения) теоремы Нётер. Для этого введем векторное поле

$$w = c \tag{8.5}$$

и покажем, что оно будет обобщенным полем симметрий. Оно представляет собой левоинвариантное векторное поле на группе $SO(3)$. Напомним, что поток любого *правоинвариантного* векторного поля сохраняет *левоинвариантную* кинетическую энергию. Потоки левоинвариантных полей в общем случае таким свойством не обладают.

Поскольку $(b, c) = 0$, то поле (8.5) есть поле возможных перемещений; оно удовлетворяет уравнению $(b, \delta x) = 0$. Далее, поток векторного поля (8.5) сохраняет потенциальную энергию. Действительно, поле $w = c$ порождает следующую систему дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3 = \{\gamma\}$:

$$\gamma' = \gamma \times c.$$

Следовательно, полная производная потенциала (8.2) в силу этой системы равна

$$(V'_\gamma, \gamma') = (c, \gamma \times c) = 0.$$

Осталось показать, что поток векторного поля w, продолженный в фазовое пространство, сохраняет кинетическую энергию (на гиперплоскости связи). Полная производная от кинетической энергии (функции на алгебре $so(3)$) вдоль продолженного поля w равна

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}, \omega'\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial \omega}, c \times \omega\right) = (c, \omega \times I\omega). \tag{8.6}$$

Эта квадратичная форма относительно ω, конечно, не тождественный нуль (если оператор инерции не пропорционален единичному оператору). Однако она будет равна нулю на плоскости $(a, \omega) = 0$ при выполнении условий теоремы 7 (в этом и заключается незначительное обобщение теоремы Нётер). Действительно, вектор ω ортогонален вектору a (согласно уравнению связи). Далее,

$$(I\omega, a) = (\omega, Ia) = \mu(\omega, a) = 0.$$

Следовательно, вектор $\omega \times I\omega$ будет коллинеарен вектору a. Но тогда правая часть (8.6) равна нулю, так как $(c, a) = 0$ по условию теоремы. Что и требовалось.

9. Некоторые задачи

В качестве заключения мы приведем перечень задач, которые возникают в связи с теорией движения систем с сервосвязями Бегена.

1°. Найти условия сохранения фазового объема приведенной системы (2.4) в случае когда группа G унимодулярна (то есть когда $\sum c_{ik}^k = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$; в частности, все компактные группы Ли унимодулярны). Этот вопрос упирается в вычисление дивергенции однородного векторного поля. Для классических уравнений Эйлера – Пуанкаре эта дивергенция обращается в нуль, если группа G унимодулярна [8].

2°. Было бы интересным найти многомерные обобщения теорем 4 и 5. Вот один из вариантов: если система (3.1) имеет целую плоскость равновесий $\sum a_i x_i = 0$, то заменой времени

$$d\tau = \left(\sum a_i x_i\right) dt$$

она приводится к линейной системе. Больший интерес представляют многомерные аналоги теоремы 5.

3°. Дать классификацию фазовых портретов динамических систем на плоскости с однородными квадратичными правыми частями (с учетом анализа ухода траекторий на бесконечность).

4°. В рамках этой классификации указать все типы фазовых портретов в задаче о вращении волчка с левоинвариантной сервосвязью. Первый шаг в этом направлении — найти условия, при которых соответствующая приведенная система на плоскости имеет либо ровно одну, либо три инвариантных прямых.

5°. Изучить движение сервосаней по горизонтальной плоскости в общем неуравновешенном случае, когда центр масс твердого тела не лежит на вертикальной прямой, проходящей через точку контакта.

6°. Рассмотреть движение сервосаней по наклонной плоскости и выяснить общие условия, при которых сани не спускаются вниз, а движутся в среднем по горизонтали.

7°. Исследовать интегрируемость уравнений (8.1) с потенциалом (8.2), описывающих вращение тяжелого твердого тела с сервосвязью Суслова.

Автор дружески благодарит А. В. Борисова, И. С. Мамаева за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Béghin M. H. Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry. Paris: Impr. nationale, 1921. 132 pp. *См. также:* Беген А. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями. Москва: Наука, 1967. 172 с.

[2] Appel P. Traité de Mécanique rationnelle: Vol. 2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. 6th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953. 584 pp. *См. также:* Аппель П. Теоретическая механика: Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Физматгиз, 1960. 487 с.

[3] Козлов В. В. Принципы динамики и сервосвязи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1989, № 5, с. 59–66.

[4] Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique // C. R. Acad. Sci., 1901, vol. 132, pp. 369–371.

[5] Kozlov V. V. General theory of vortices. (Encyclopaedia Math. Sci., vol. 67.) Berlin: Springer, 2003. 184 pp. *См. также:* Козлов В. В. Общая теория вихрей. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. 324 с.

[6] Козлов В. В., Фурта С. Д. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. 312 с.

[7] Kozlov V. V. Exchange of stabilities in the Euler – Poincaré – Suslov systems under the change of the direction of motion // Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics, 2014, vol. 2, no. 2, pp. 199–211.

[8] Kozlov V. V. On the integration theory of equations of nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 161–176.

[9] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. М., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1967. 487 с.

[10] Козлов В. В. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли // Функц. анализ и его прил., 1988, т. 22, № 1, с. 69–70.

[11] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. 520 с.

[12] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика саней Чаплыгина // ПММ, 2009, т. 73, № 2, с. 219–225.

[13] Coddington E. A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. New York: McGraw-Hill, 1955. 429 pp. *См. также:* Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: ИИЛ, 1958. 475 с.

[14] Киргетов В. И. О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // ПММ, 1967, т. 31, № 3, с. 433–446.

[15] Голубев Ю. Ф. Механические системы с сервосвязями // ПММ, 2001, т. 65, № 2, с. 211–224.

[16] Румянцев В. В. О движении управляемых механических систем // ПММ, 1976, т. 40, № 5, с. 771–781.

[17] Грдина Я. И. Заметки по динамике живых организмов. Екатеринослав: Екатеринославск. горн. ин-т, 1916.

[18] Blajer W., Seifried R., Kołodziejczyk K. Servo-Constraint realization for underactuated mechanical systems // Arch. Appl. Mech., 2015 (DOI 10.1007/s 00419-014-0959-2).

[19] Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. Москва: Наука, 1974. 272 с.

[20] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

[21] Харламова-Забелина Е. И. Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1957, № 6, с. 25–34.

The dynamics of systems with servoconstraints. I

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

The paper discusses the dynamics of systems with Béghin's servoconstraints where the constraints are realized by means of controlled forces. Classical nonholonomic systems are an important particular case. Special attention is given to the study of motion on Lie groups with left-invariant kinetic energy and left-invariant constraints. The presence of symmetries allows one to reduce the dynamic equations to a closed system of differential equations with quadratic right-hand sides on a Lie algebra. Examples are given which include the rotation of a rigid body with a left-invariant servoconstraint — the projection of the angular velocity onto some direction fixed in the body is equal to zero (a generalization of the nonholonomic Suslov problem) — and the motion of the Chaplygin sleigh with servoconstraints of a certain type. The dynamics of systems with Béghin's servoconstraints is richer and more varied than the more usual dynamics of nonholonomic systems.

MSC 2010: 34D20, 70F25, 70Q05
Keywords: servoconstraints, symmetries, Lie groups, left-invariant constraints, systems with quadratic right-hand sides

Received February 10, 2015, accepted March 05, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 353–376 (Russian)