



## ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 539.3; 531.37

MSC 2010: 70F40, 70E18, 70-05

### **Экспериментальное исследование движения тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой плоскости\***

**А. В. Борисов, Ю. Л. Караваев, И. С. Мамаев,  
Н. Н. Ердакова, Т. Б. Иванова, В. В. Тарасов**

В данной работе мы экспериментально исследуем динамику тела с плоским основанием (цилиндра), скользящего по горизонтальной шероховатой плоскости. Для анализа используется два подхода. В первом случае, используя машину трения, определяем зависимость силы трения от скорости движения цилиндров. Во втором случае, используя цифровую скоростную камеру для видеосъемки и метод представления траекторий на фазовой плоскости для обработки результатов, исследуем качественные и количественные характеристики движения цилиндров по горизонтальной плоскости. Полученные результаты сравниваем с ранее известными теоретическими и экспериментальными данными. Кроме того, в работе приводится подробный систематический обзор известных теоретических и экспериментальных результатов в этой области.

Ключевые слова: сухое трение, линейное распределение давления, плоское движение, закон Кулона

---

\*Перевод статьи “Experimental Investigation of the Motion of a Body with an Axisymmetric Base Sliding on a Rough Plane”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 518–541.

Получено 10 июля 2015 года

После доработки 24 августа 2015 года

---

Работа А. В. Борисова, И. С. Мамаева и Т. Б. Ивановой выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания вузам. Работа Ю. Л. Караваева Поддержана грантом РФФИ № 15-38-20879 мол\_а\_вед. Работа Н. Н. Ердаковой поддержана грантом РФФИ № 15-08-09261-а. Работа Т. Б. Ивановой поддержана грантом РФФИ № 14-01-00289-а. Работа И. С. Мамаева поддержана также грантом президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2964.2014.1.

---



## Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	549
0.1. Развитие науки о трении . . . . .	549
0.2. Динамика тела с плоским основанием и теоретические модели трения . . . . .	550
0.3. Скольжение и качение выпуклых тел по поверхности и применимость неголономной механики . . . . .	552
0.4. Критический обзор экспериментальных результатов . . . . .	554
<b>1. Постановка задачи</b> . . . . .	556
<b>2. Экспериментальное исследование применимости модели трения со стационарным распределением нагрузки</b> . . . . .	560
2.1. Методика проведения эксперимента и схема экспериментальной установки . . . . .	560
2.2. Обсуждение результатов экспериментов . . . . .	562
<b>3. Экспериментальное исследование свободного движения цилиндра</b> . . . . .	564
3.1. Схема экспериментальной установки и методика проведения эксперимента . . . . .	564
3.2. Обсуждение результатов экспериментов . . . . .	567
<b>4. Дискуссия</b> . . . . .	569

---

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

115409, Россия, г. Москва, Каширское ш., д. 31

Караваев Юрий Леонидович

karavaev\_yury@istu.ru

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Мамаев Иван Сергеевич

mmaev@rcd.ru

Ердакова Надежда Николаевна

enn@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Иванова Татьяна Борисовна

tbsp@rcd.ru

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Тарасов Валерий Васильевич

valeratarasov@bk.ru

Институт механики УрО РАН

426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34



## Введение

### 0.1. Развитие науки о трении

Исследование систем с трением является одним из важных разделов теоретической и прикладной механики. Наиболее изученными на сегодняшний день являются процессы, связанные со статическим трением, изнашиванием и смазкой материалов, где имеется обширная экспериментальная база, построены различные феноменологические теории [1–3]. Данные исследования группируются в отдельный раздел механики — трибологию. Основы этой науки заложены в работах Кулона, Рейнольдса, Штрибека, Петрова, Крагельского и др. [4–7].

Рассматриваемые в трибологии закономерности стабильно работают только в рамках стационарных или циклических режимов движения. Влияние же трения на существенно динамические процессы исследовано менее детально. Исследования в этом направлении начались с работ [8–11] и были инициированы в основном попытками объяснить закономерности бильярдной игры. Иоганн Эйлер [8] в 1758 году теоретически обосновал феномен скольжения однородного шара по параболе, хорошо известный любителям бильярда. Более тщательному анализу движение шара по шероховатой поверхности подвергли Кориолис [9] в книге «Математические основы теории бильярдной игры» (1835 г.) и Резаль [10] в работе «Комментарии к математической теории явлений бильярдной игры» (1883 г.), в которых они предлагают свои геометрические приемы игры, анализируют процесс удара, рассматривают переходные стадии скольжение-качение в динамике шаров. Движение бильярдного шара при наличии трения верчения и качения рассмотрено Аппелем в работе [11] (1911 г.)

Как показывают наблюдения, именно переходные процессы между скольжением и качением имеют особое значение во многих задачах о движении тел с трением. Однако в основе теоретических исследований динамических процессов скольжения, качения и переходных стадий чаще всего лежат простые нединамические модели статических законов сухого трения Кулона, трения качения и вязкого трения. Кроме того, в системах с кулоновским трением при переходе динамики от скольжения к качению, а также при отрывах, в сочетании с предположением об абсолютной твердости тела и поверхности могут возникать различные парадоксальные ситуации, когда решение либо не существует, либо неединственно при одних и тех же начальных условиях. Такого рода парадоксы впервые были указаны Пенлеве [38].

Кроме бильярда следует упомянуть еще несколько классических и более новых задач, где трение играет ключевую роль.

- **Однородный шар на равномерно вращающемся столе.** Данная система, наиболее важная для исследования качения тел, восходит к Ирншоу [32]: в своем учебнике по динамике 1844 года он использовал модель абсолютно шероховатой плоскости и показал, что траектории центра шара в абсолютном пространстве представляют собой окружности, положение центра которых зависит от начальных условий. Наиболее полный обзор литературы можно найти в [33] и в публикациях *American Journal of Physics* (AJP). Эксперимент с шаром, закатывающимся на равномерно вращающийся стол, показывает, что после скатывания шара со стола траектория его движения останется прямолинейной, точно совпадающей с начальной [45].

- **Волчок Томсона.** В динамике данного волчка наблюдается неожиданный эффект, когда сила трения приводит к перевороту волчка (см., например, [26, 27]).
- **Полотер.** Эффект уменьшения сопротивления движению при вращении щеток полотера, обоснованный Контенсу для случая скользящего и вращающегося волчка [66], позволяет легче управлять движением полотера.
- **Камни для керлинга.** В отличие от других описанных систем, где имеет место закон сухого трения Кулона, движение камней в керлинге сопровождается процессом таяния льда, и трение имеет так называемый «влажный» характер. Интересны эффекты отклонения траектории движения тел от прямолинейной в сторону вращения тела, замедления и ускорения движения, широко известные из реальной игры [28, 29].
- **Шары для боулинга.** Классическое движение шара по дорожке можно разбить на три этапа: скольжение, качение и хук. Хук — резкий выраженный поворот — шар совершает при переходе с качения по смазанному маслом полотну на качение по финальному сухому участку полотна дорожки перед кеглями. Помимо изменяющегося коэффициента трения на величину хука влияет также смещение центра масс шара [30, 31]. Данный эффект хорошо знаком профессиональным игрокам, использующим специальные шары.
- **Диск Эйлера.** В данном случае интересны эффекты, возникающие в системе на финальной стадии движения: возрастание частоты звука (так называемое «пение» диска, сопровождающее его движение) и внезапная остановка (см., например, [34]). Несмотря на большое количество исследований (см. также [34]), в том числе с учетом различных сил сопротивления, эффекты остаются не обоснованными теоретически.
- **Кельтский камень.** Так названы тела, которые, благодаря свойствам динамической и геометрической асимметрии, способны менять заданное направление своего вращения (эффект реверса). Исследование данного феномена восходит к работам Уолкера [14] (1895 г.) и представлено на сегодняшний день широким спектром используемых моделей движения (в частности, неголономной модели [15], модели комбинированного трения [16] и др.).

## 0.2. Динамика тела с плоским основанием и теоретические модели трения

*В данной работе мы исследуем влияние сухого трения на движение твердого тела с плоским осесимметричным основанием (далее для краткости — диска или цилиндра) по шероховатой горизонтальной плоскости.*

Данная система, являясь, на первый взгляд, одной из самых простых в динамике систем с трением, до сих пор остается не исследованной до конца. Несмотря на большое количество работ (в том числе и экспериментальных), которые мы здесь обсудим, все еще не построена и не верифицирована модель движения, адекватно описывающая поведение такой системы вплоть до момента остановки.

*Основная трудность в описании движения соприкасающихся тел (в частности, движения диска и цилиндра по плоскости) в рамках действия сил сухого трения заключается в том, что в этой задаче проблематично определить динамическое распределение нормального давления тела по площадке контакта, а имеющиеся в литературе*

теоретические исследования и предложенные модели, как правило, еще не прошли необходимой экспериментальной проверки (хотя бы в лабораторных условиях).

Далее обсудим известные результаты теоретических исследований динамики тела с плоским основанием. Прежде всего отметим работы, в которых рассмотрены условия равновесия подобных тел. Первоначально общие условия равновесия тела с плоским основанием для случая произвольного распределения давления были сформулированы в заметке Шиллера [64] (1892 г.). В статье Жуковского [49] (1897 г.) для произвольного статического распределения давления тела на плоскость обсуждаются свойства силы и момента трения для тел и формулируются условия равновесия при наличии внешних сил. Мак-Миллан в книге [39] (1936 г.) из предположения о незначительной деформации плоскости под давлением покоящегося тела, согласно закону Гука, показал, что *распределение нормального давления является линейной функцией*. В случае кругового основания Мак-Миллан выразил силу и момент трения через эллиптические интегралы.

Значительно позже в работе Ишлинского с соавторами [56] (1982 г.) получены уравнения движения диска в предположении *равномерного распределения давления тела на плоскость*, построены и проанализированы фазовые траектории движения дисков, показано, что вращение и скольжение дисков (кроме чистого скольжения и чистого вращения) прекращаются одновременно, и в момент остановки диска  $k^* = \frac{v}{R\omega} = 0.71$ , где  $R$  — радиус круговой площадки контакта,  $v$  — линейная скорость движения центра масс,  $\omega$  — угловая скорость. В 1985 году Военли и Эриксен [48] независимо повторили результаты, полученные в [56], и несколько уточнили значение  $k^* = 0.65$ . В работе Гойяла с соавторами [69] (1991 г.) с использованием геометрических методов и введением некоторой предельной поверхности, возникающей при учете трения, показано, что *для плоского диска в предположении равномерного распределения давления тела на плоскость предельное значение в момент остановки движения  $k^* = 0.653$* .

Очевидно, что модель трения, основанная на равномерном распределении давления тела на плоскость, противоречит условию равенства нулю момента сил относительно осей, параллельных плоскости, что для тела ненулевой высоты (цилиндра) может привести к опрокидыванию или перевороту во время движения. Для учета влияния вышеупомянутого условия на моменты сил необходимо, чтобы *модель давления тела на плоскость имела не менее трех свободных параметров, то есть в простейшем виде можно предположить давление тела линейной функцией* [55].

Динамика тела (цилиндра высотой  $h \neq 0$ ) в предположении *линейной модели распределения давления* рассматривалась в работах [40, 61, 67, 70]. В работе Шегельского с соавторами [70] (2002 г.) показано, что траектория цилиндра отклоняется вправо по ходу движения, если при взгляде сверху тело вращается против часовой стрелки, и что вращение и скольжение прекращаются одновременно. В работе Фаркаша с соавторами [67] (2003 г.) дана некоторая оценка величины этой отклоняющей силы. В статье Трещева с соавторами [61] (2012 г.) рассмотрен эффект отклонения траектории и показано, что значение предельного отношения  $k^*$  в момент остановки зависит от коэффициента трения  $f$  и высоты центра масс цилиндра  $h$ . В работе Борисова с соавторами [40] (2014 г.) уравнения движения цилиндра по горизонтальной и по наклонной плоскости получены в явном виде и выражены через эллиптические интегралы, с помощью метода дескриптивной функции (аналогичного используемому в задачах гамильтоновой динамики с одной степенью свободы), а также выполнен качественный анализ динамики цилиндра без явного интегрирования уравнений движения.

Зависимость силы и момента трения от скорости вращения для тела с плоским основанием была показана при равномерном распределении давления в работах [41, 67], а при распределении давления по Бусинеску (в российской литературе — Галину) — в работе [59], что вполне доказывает независимость данного явления от модели распределения давления тела на плоскость.

В статье Журавлева [52] (1998 г.) выражения для силы и момента трения для распределения давления Герца были получены в явном виде, а для решения задач с сухим трением был предложен метод дробно-линейной аппроксимации Паде. Позднее данный метод совместно с предположением о распределении давления по Бусинеску [65] был применен в работе Киреенкова [59] (2002 г.) для задачи о движении диска с круглым основанием, и получено предельное отношение в момент остановки  $k^* = 1$ . Отметим, что данное значение не совпадает с результатами других работ [40, 41, 56, 61, 67], полученных в предположении равномерного и линейного распределения давления тела на плоскость. Кроме того, метод аппроксимаций Паде был использован для решения задач о движении шара [53] и кельтского камня [54]. Результаты, полученные в этих работах, как и любые другие исследования динамики систем с трением, требуют в первую очередь экспериментальной верификации.

Отметим также работу [71], в которой рассмотрены задачи динамики, использующие модель абсолютно твердого шара, движущегося по деформируемой плоскости.

### 0.3. Скольжение и качение выпуклых тел по поверхности и применимость неголономной механики

В предыдущем разделе мы рассматривали движение тел с плоским основанием, а здесь остановимся на динамике тела, имеющего точечный контакт с поверхностью при условии качения (то есть скорость точки контакта равна нулю). Базовой моделью для описания движения подобных тел является неголономная модель, в которой непосредственно не рассматриваются различные силы трения, а их действие заменяется связями и возникающими силами реакции. Динамика неголономных систем хорошо разработана, начиная с работ Рауса, Чаплыгина, Аппеля и др., и развита в современных работах [12, 33, 36, 43] (см. также библиографию данных работ). Особый интерес это направление получило в последнее время в связи с развитием роботостроения и мобильной робототехники (подробный обзор можно найти в [12, 13, 35–37]).

Приводимые нами результаты экспериментальных исследований непосредственно не связаны с динамикой катящихся тел, однако ниже будет пояснено, почему мы остаемся на этом моменте.

*С момента появления первых неголономных моделей возникают вопросы о применимости такого моделирования для описания движения тел. Однако мы считаем, что правильность выбора модели определяется экспериментальным подтверждением и ценой, которую инженеры, занимающиеся, например, созданием мобильных роботов, готовы заплатить в стремлении добиться максимальной точности и быстродействия своих разработок.* Впрочем, еще Кирхгоф и Герц, будучи известными физиками, хорошо представляющими экспериментальную базу механики, выдвигали в своих классических трактатах по механике [50, 51] требования простоты теории и согласованности теоретических результатов с экспериментами. И именно неголономные модели позволили получить достоверные результаты при описании движения выпуклых тел.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим также интересную дискуссию о правомерности использования вакономной механики для описания динамики с неинтегрируемыми связями [57, 58], в результате которой сделан вывод о возможности адекватного использования как неголономной, так и вакономной модели, но с учетом физических условий их применимости.

Оценка правомерности использования неголономной модели в динамике восходит к работам Бобылева [17] (1892 г.) и Жуковского [18] (1893 г.). Решая задачу о движении без скольжения по горизонтальной плоскости полого шара с гироскопом внутри, Бобылев записал уравнения траекторий, которые описывает точка опоры шара на плоскости, а затем воспроизвел их экспериментально, используя установку (шар, катящийся по плоскости, покрытой порошком ликоподия), сделанную им для механического кабинета Петербургского университета. Вопрос о применимости модели точечного контакта в уравнениях неголономной механики для задач с качением рассматривался Фуфаевым [47] (1966 г.) (см. также книгу Неймарка и Фуфаева [23]), который показал, что при стремлении площади контакта с равномерно распределенным давлением к нулю качественные особенности динамики системы сохраняются и это условие не влияет на траекторию движения шара. В работе [46] Фуфаев проанализировал движение однородного шара по вращающемуся столу и показал, что при добавлении к неголономной модели силы трения качения движение шара происходит по раскручивающейся спирали, а при добавлении сил вязкого трения об окружающую среду происходит остановка шара; однако экспериментальное подтверждение было получено только для движения по скручивающейся спирали к неподвижной точке.

Контенсу в работе [66] (1963 г.) применил модель точечного контакта при рассмотрении задачи динамики волчка с учетом его проскальзывания, предполагая (в отличие от работы [47]), что распределение контактных напряжений происходит по Герцу. Для этих моделей, как показано Козловым [42] (2010 г.) и Ивановым [44] (2010 г.), при неограниченном уменьшении пятна контакта и стремлении к бесконечности коэффициента трения существует предельный переход к неголономной модели. Отметим, что сам Контенсу не делает никаких далеко идущих выводов о несостоятельности неголономной модели и в конечном счете обосновывает простую модель вязкого сопротивления, возникающего при больших скоростях вращения.

Несмотря на это, в отечественных научных журналах существует большое количество работ, инициированных российскими академиком Д. М. Климовым и В. Ф. Журавлевым, которые (пользуясь своим авторитетом и статусом в научном сообществе) утверждают, что неголономную модель стоит изъять из курсов механики, так как она имеет только методический интерес, заменив ее более общей и правильной моделью Контенсу [66] (в русскоязычной литературе можно встретить название «модель Контенсу – Журавлева»). Эта точка зрения нам представляется неверной по нескольким причинам. Во-первых, предложенная модель также использует различные предположения (например, статический контакт Герца), которые нуждаются в дополнительном обосновании. Во-вторых, она сложна и плохо подходит для теоретического анализа (то есть не удовлетворяет основным принципам, сформулированным Кирхгофом и Герцем [50, 51]), и необходимо ясно указать, какие эффекты такая модель способна описать в отличие от известных фундаментальных моделей. В-третьих, результаты экспериментальных исследований последователей данного подхода (см. [25] (2002 г.), [60] (2015 г.)) не дают никаких достоверных доводов в пользу этой модели при описании динамики тел, а скорее, еще более запутывают ситуацию. Подробное описание работы [25] представлено в следующем разделе, так как она ближе к нашим исследованиям, а в работе [60] дана экспериментальная оценка для использования нескольких модификаций метода аппроксимаций Паде при описании динамики алюминиевого кельтского камня

на резиновой поверхности. Авторы показывают, что одна из модификаций достаточно хорошо описывает динамику кельтского камня, что большую роль при описании движения играют взаимосвязь между силой и моментом трения и ортотропия трения качения, не уделив, на наш взгляд, должного внимания реверсу кельтских камней. Недостаточно полно описанные условия экспериментов и методы верификации данных не дают возможности полноценно понять и удостовериться в истинности полученных результатов.

В защиту неголономной модели приведем также эксперименты, демонстрирующие задачу Ирншоу о качении шара по вращающемуся столу [45] и эксперименты Р. Кросса (см. [74] и другие работы автора), которые достаточно убедительно свидетельствуют о том, что более простая неголономная модель вполне может применяться для анализа и позволяет сделать разумные предсказания для инженеров. В экспериментальных работах Р. Кросса с помощью скоростной видеокамеры проанализированы особенности движения кельтского камня, волчков, диска Эйлера. Автор отмечает, что занимательные динамические эффекты, например, реверс кельтского камня и переворот волчка, вопреки распространенному мнению, могут происходить и без влияния трения скольжения. Для описания особых эффектов динамики движения тел можно дополнить существующие две базовые неголономные модели качения с учетом верчения и без учета верчения (модель «резинового» тела): например, введение вязкого трения от сопротивление воздуха в задаче о кельтском камне [22] или в задаче качении однородного шара по вращающемуся столу [46] (подробный обзор других работ, реализующих данный подход, можно найти в [33]).

Важно также отметить, что *применимость той или иной модели сильно зависит не только от параметров движения, но и от характеристик соприкасающихся тел: материалов, из которых они изготовлены, и качества обработки их поверхностей*. Это обстоятельство требует создания фундаментальных моделей поведения при сочетании различных характеристик тел.

В заключение отметим общепризнанный успех неголономной механики, связанный с изучением кельтских камней [15, 19, 20], с развитием теории велосипеда [21] и с управлением мобильными роботами (робот-колесо, робот-шар [35–37]).

#### 0.4. Критический обзор экспериментальных результатов

Приведем результаты современных экспериментальных исследований динамики тел с плоским основанием, скользящих по шероховатой плоскости. Попутно будем обсуждать замечания к экспериментам, которые были выявлены при проведении предварительных и основных опытов, вошедших в данную работу.

Наиболее интересны с точки зрения теоретического и экспериментального анализа закономерностей движения цилиндров работы [41, 67]. Фаркаш с соавторами [67] (2003 г.) провели эксперименты по запуску пластмассового цилиндра радиусом 8 см и толщиной 2 см по горизонтальной поверхности из полиамидной ткани. С помощью скоростной видеокамеры они получили зависимости положения и ориентации цилиндра от времени, по которым приближенно вычисляли линейную и угловую скорость и ускорение, что в итоге позволило получить экспериментальные зависимости силы  $F(k)$  и момента  $M(k)$  трения. Экспериментальные зависимости  $F(k)$  и  $M(k)$  они сравнивали с теоретическими зависимостями, полученными в предположении закона сухого трения Кулона и равномерного распределения давления цилиндра на плоскость. *Результаты экспериментов подтвердили, что сила и момент трения взаимосвязаны, а сила трения уменьшается за счет вращательного движения цилиндра*. Тем не менее, в работе [67] нет экспериментальных оценок для

предсказанных теорией явлений отклонения траектории цилиндра от прямолинейной, одновременной остановки скольжения и вращения цилиндра, значения отношения  $k^* = 0.653$  в момент остановки движения цилиндра, хотя авторы пишут, что наблюдали эти эффекты в опытах (кроме последнего).

Работа Вайдмана и Мальотры [41] (2007 г.) посвящена в основном экспериментальному анализу динамики составных неоднородных цилиндров, но некоторое внимание динамике однородного цилиндра было все же уделено. Авторы запускали ПВХ-цилиндры на плексигласовом листе, обтянутом нейлоновой тканью, и ими было отмечено отличие экспериментально полученного отношения от предсказанного теорией предельного значения  $k^* = 0.653$ , а кроме того, они заметили, что на 10% отличается и время остановки цилиндра.

Сделаем несколько замечаний, касающихся методик проведения экспериментов в [41, 67]. Во-первых, авторы обеих статей в качестве материалов образцов выбрали синтетические материалы. Мы проделали многочисленные предварительные опыты с ПВХ и капролоновыми материалами образцов цилиндров и поверхностей. Сложности, возникшие при проведении предварительных экспериментов и связанные в основном с присутствием дополнительных электростатических сил, приводили к сильной зависимости получаемых данных от внешних условий (влажности воздуха, предварительной обработки контактирующих поверхностей и пр.), как следствие, к неповторяемости результатов. Повторяемых результатов в эксперименте удалось достичь только после начала опытов с парой материалов пластик/железо, где с помощью предварительного или постоянного заземления удавалось снять силы электростатики.

Во-вторых, авторы работ [41, 67] не приводят подробную методику обработки экспериментальных данных, а предлагают уже обработанные усредненные значения, подтверждающие ту или иную зависимость. Таким образом, отсутствует возможность оценить закономерности, разброс и повторяемость исходных экспериментальных данных. Обращает на себя внимание и тот факт, что экспериментальные зависимости от времени, полученные в [41], представлены слишком гладкими кривыми, что скорее характерно для аналитических зависимостей и не типично для экспериментальных данных.

Среди экспериментальных работ следует отметить статью Киреевкова и соавторов [73] (2010 г.), где сделана попытка верификации теории о взаимосвязи трения скольжения и трения вращения. Авторы [73] приводят выражения аппроксимаций Паде для момента и силы трения, задаются целью экспериментально получить параметры для точного определения этих выражений, но в опытах измеряют только силу трения от безразмерного параметра  $k$  для цилиндрических инденторов из стали, дюралюминия, латуни и дуба, движущихся по стали. Для этого используют специально разработанную установку, конструкция которой давно известна, реализована и проверена ранее в различных моделях существующих машин трения, имеющих метрологические сертификаты. В результате в [73] представлены лишь результаты отдельных экспериментов, дающих качественную оценку исследуемой зависимости, а в затем описаны недостатки установки и причины разброса значений силы трения, которые можно было бы минимизировать проведением серии экспериментов с одинаковыми условиями и последующей статистической обработкой; кроме того, авторы не проанализировали погрешность собранной ими установки, которая может быть много больше регистрируемых эффектов.

*Описанные выше теоретические и экспериментальные результаты по исследованию динамики систем с трением показывают, что полученного на сегодняшний день экспериментального материала недостаточно для определения применимости той или иной модели и существует реальная необходимость проведения подробных экспериментальных*

работ для дальнейшего феноменологического уточнения существующих или введения новых моделей трения.

В частности, при исследовании динамики цилиндра, скользящего под действием сил сухого трения по шероховатой горизонтальной плоскости, можно сформулировать следующие цели и задачи:

- расширить экспериментальные сведения о влиянии сухого трения на движение твердого тела с плоским осесимметричным основанием (цилиндра) по шероховатой горизонтальной плоскости;
- верифицировать теорию движения цилиндра, основанную на линейном распределении давления тела на поверхность скольжения;
- экспериментально проверить линейный характер силы трения  $F(k)$  при  $k < 1$  и стремление силы трения к постоянному значению  $F(k) \rightarrow fN$ , при  $k > 1$ , где  $f$ ,  $N$  — коэффициент трения и реакция опоры соответственно;
- экспериментально проверить отклонение траектории движения тела вправо от прямой при вращении тела против часовой стрелки;
- экспериментально проверить и оценить эффект одновременного прекращения скольжения и вращения и предельное значение безразмерного параметра  $k^* = \frac{v}{R\omega}$  в момент остановки цилиндра.

## 1. Постановка задачи

Напомним более подробно основные элементы существующих теорий о движении тел с плоским основанием по горизонтальной плоскости и обозначим цели и задачи данной работы.

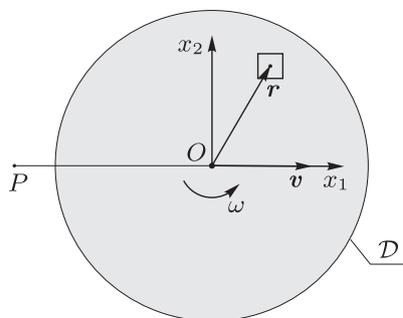


Рис. 1. Вид сверху площадки контакта  $\mathcal{D}$  и связанной с ней системы координат.

Рассмотрим скольжение по горизонтальной плоскости тела с круглой площадкой контакта (радиусом  $R$ ), сбалансированного таким образом, что центр масс находится над геометрическим центром площадки контакта на высоте  $h$ . Выберем подвижную систему координат  $Ox_1x_2$ , связанную с движущимся основанием, начало системы координат совпадает с центром площадки контакта, ось  $Ox_1$  направим вдоль скорости центра масс  $\mathbf{v}$  (рис. 1). Скорость каждой точки с радиус-вектором  $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$  площадки контакта  $\mathcal{D}$  выражается по формуле Эйлера через скорость  $\mathbf{v}$  начала координат  $O$  и угловую скорость вращения тела  $\omega$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} + \omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r} = (v - \omega x_2, \omega x_1),$$

где  $\mathbf{e}_3$  — нормаль к плоскости контакта.

В выбранной системе координат сила трения  $F$  и момент силы трения  $M$  относительно начала координат  $O$  определяются законом распределения нормального давления  $p(\mathbf{r}, \mathbf{V})$  и представляются в виде

$$F = -f \int_{\mathcal{D}} p(\mathbf{r}, \mathbf{V}) \frac{V}{|\mathbf{V}|} dx_1 dx_2, \quad M = -f \int_{\mathcal{D}} p(\mathbf{r}, \mathbf{V}) \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{V}, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{V}|} dx_1 dx_2, \quad (1.1)$$

где  $f$  — коэффициент трения.

Для построения динамически согласованных моделей трения можно использовать закон распределения нормального давления  $p(\mathbf{r}, \mathbf{V})$  в общем виде

$$p(\mathbf{r}, \mathbf{V}) = p_c^{(0)}(\mathbf{r})(1 + a_1x_1 + a_2x_2),$$

где коэффициенты  $a_1, a_2$  зависят от распределения скоростей и определяются из уравнений для моментов сил и реакции на горизонтальную плоскость [40]. Зависимость  $p_c^{(0)}(\mathbf{r})$  — распределение, полученное из решения стационарной контекстной задачи, например, закон Буссинеска [65]

$$p_c^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{p_0}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \quad p_0 = \text{const}, \quad (1.2)$$

или закон Герца [66]

$$p_c^{(0)}(\mathbf{r}) = p_0\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}, \quad p_0 = \text{const}. \quad (1.3)$$

Наиболее простая зависимость соответствует равномерному распределению:

$$p_c^{(0)}(\mathbf{r}) = p_0 = \text{const}. \quad (1.4)$$

В случае распределения (1.4) в работе [40] показано, что тангенциальная  $F_\tau^f$  (направленная вдоль скорости  $\mathbf{v}$ ) и нормальная  $F_n^f$  составляющие силы трения и момент силы трения  $M_3^f$  зависят от безразмерного параметра  $\eta = \frac{4fh}{\pi R}$  и имеют вид

$$\begin{aligned} F_\tau^f &= -fp_0R^2 \frac{B}{1 - \eta^2 A_{12}A_{21}}, & F_n^f &= -fp_0R^2 \frac{\eta A_{21}B}{1 - \eta^2 A_{12}A_{21}}, \\ M_3^f &= -fp_0R^3 \left( A_{21} - A_{12} + \frac{\eta^2 A_{21}BC}{1 - \eta^2 A_{12}A_{21}} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь коэффициенты  $A_{12}, A_{21}, B, C$  зависят от безразмерного параметра  $k = \frac{v}{R\omega}$  и имеют вид

$$\begin{aligned} A_{12}(k) &= \frac{2}{45k^2} \left( (k+1)(8k^4 - 13k^2 + 3)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)(8k^4 - 5k^2 - 3)\mathbf{K}(k_e) \right), \\ A_{21}(k) &= \frac{2(k+1)}{45k^2} \left( (2k^2 - 3)(k-1)^2\mathbf{K}(k_e) - (2k^4 - 7k^2 - 3)\mathbf{E}(k_e) \right), \\ B(k) &= \frac{2(k+1)}{3k} \left( (k^2 + 1)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)^2\mathbf{K}(k_e) \right), \\ C(k) &= \frac{4}{15k} \left( (k^5 - k^4 - k + 1)\mathbf{K}(k_e) - (k^5 + k^4 - k^3 - k^2 + k + 1)\mathbf{E}(k_e) \right), \end{aligned}$$

где  $k_e = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}$ ,  $\mathbf{K}, \mathbf{E}$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно:

$$\mathbf{K}(z) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-z^2x^2)}}, \quad \mathbf{E}(z) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-z^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Анализ (1.5), выполненный в работе [40], показал, что ненулевая нормальная составляющая силы трения приводит к отклонению траектории от прямолинейной, причем направление отклонения противоположно отклонению камней в керлинге и отклонению тела



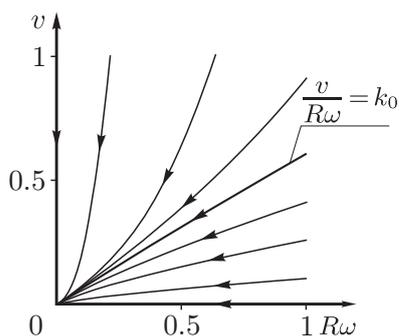


Рис. 2. Фазовые траектории на плоскости  $(R\omega, v)$ , соответствующие различным начальным условиям. Асимптота соответствует  $k_0 \approx 0.659$ .

в случае эффекта Магнуса. Кроме того, в [40] указаны еще две особенности движения тела с круглым основанием:

- все траектории системы на плоскости  $(R\omega, v)$  не пересекают координатные оси  $\omega = 0, v = 0$  и заканчиваются в точке  $\omega = 0, v = 0$ ; следовательно, верчение и поступательное движение прекращаются одновременно,
- траектории при  $\omega \rightarrow 0$  касаются прямой  $\frac{v}{R\omega} = k_0$  (рис. 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. При нулевой высоте цилиндра при приближении к остановке предельное отношение величины поступательной скорости  $v$  и угловой скорости  $\omega$  тела не зависит от начальных условий и определяется только геометрией площадки контакта; в случае однородного диска радиуса  $R$

$$\frac{v}{R\omega} = k_0 \approx 0.653. \quad (1.6)$$

В случае более сложных зависимостей нормального распределения давления (1.2), (1.3) получить в явном виде аналитические выражения для силы трения и момента (1.1) не представляется возможным, поэтому, как правило, используются упрощенные законы — со стационарным распределением нагрузки, когда распределение нормального давления не зависит от скоростей:

$$p(\mathbf{r}) = p_c^{(0)}(\mathbf{r}), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0. \quad (1.7)$$

Приведем некоторые известные результаты для стационарных распределений вида (1.7).

- В работах [41, 56] предполагается, что распределение давления равномерное

$$p(\mathbf{r}) = \text{const}, \quad (1.8)$$

площадка контакта плоская (см. также результаты работы [40] при нулевой высоте тела). В этом случае составляющая силы трения, направленная вдоль вектора линейной скорости, выражается через эллиптические интегралы, и для круглого основания радиусом  $R$  имеет вид

$$F = -\frac{2fN(k+1)}{3k\pi} \left( (k^2+1)\mathbf{E}(k_e) - (k-1)^2\mathbf{K}(k_e) \right), \quad (1.9)$$

где  $k$  and  $k_e$  — определенные выше безразмерные параметры,  $N$  — нормальная составляющая активных сил, действующих на систему.

- В работе [59] выполнен анализ движения однородного диска на горизонтальной плоскости в предположении, что распределение нагрузки стационарно и описывается законом Буссинеска (1.2). В этом случае выражение для силы трения имеет вид

$$F = fN \begin{cases} \frac{\pi k}{4}, & k \leq 1, \\ \frac{k}{2} \arcsin(1/k) + \frac{1}{2k} \sqrt{k^2 - 1}, & k > 1. \end{cases} \quad (1.10)$$

- В работах [52, 66, 72] для локально сферической площадки контакта предполагается, что распределение нормальных напряжений подчиняется теории контакта Герца (1.3). Соотношение для силы трения  $F(k)$ , полученное в [66] в интегральном виде, в работе [52] выражено в элементарных функциях:

$$F = fN \begin{cases} \frac{3\pi k}{32}(4 - k^2), & k \leq 1, \\ \frac{3}{64k} \left( 4k^2 \arcsin(1/k)(4 - k^2) + 4(k^2 + 2)\sqrt{k^2 - 1} \right), & k > 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Таким образом, при использовании модели сухого трения Кулона во всех описанных моделях *стационарного* распределения нормального давления наблюдаем следующие общие закономерности (см. рис. 3):

- сила трения зависит от безразмерного параметра  $k = \frac{v}{R\omega}$  (линейная и угловая скорость входят в выражение для силы трения только в указанной комбинации),
- при  $k \rightarrow 0$  наблюдается линейный характер зависимости  $F(k)$ , что соответствует закону вязкого трения при малых поступательных скоростях движения,
- при больших значениях  $k$  функция  $F(k)$  стремится к некоторой постоянной величине, не зависящей от скорости движения, что соответствует закону сухого трения при прямолинейном движении ( $F \rightarrow fN$ ).

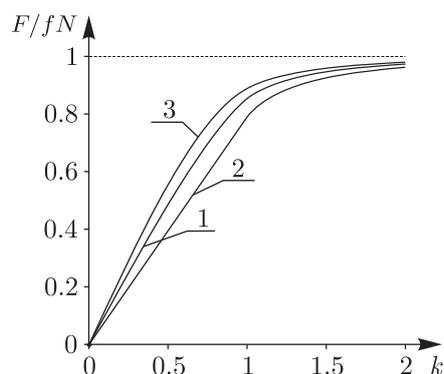


Рис. 3. Графики зависимости силы трения  $F$ , отнесенной к  $fN$ , от  $k = \frac{v}{R\omega}$ : 1 — в предположении о равномерном распределении давления тела на опору (1.9), 2 — в предположении о распределении давления по Буссинеску (1.10), 3 — в предположении о распределении давления по Герцу (1.11). Численные значения  $F(k)/fN$ , соответствующие различным законам  $p(\mathbf{r})$ , отличаются не более чем на 0.1 от кривой для равномерного распределения давления (максимально при  $k \sim 0.7$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Во всех случаях при  $k \rightarrow 0$  сила трения стремится к нулю как линейная функция, при этом для плоской площадки контакта угол наклона этой функции уменьшается с увеличением неравномерности распределения давления.

Целью данной работы является экспериментальное качественное (возможно, и количественное) подтверждение (или опровержение) указанных теоретических закономерностей в предположении о *стационарном* распределении нормального давления (раздел 2), а также экспериментальная проверка закономерностей, указанных в [40] для ненулевой высоты

цилиндра, и выяснение условий применимости динамически согласованной модели (1.4) (материалы тел и поверхностей, их размеры, степень обработки и т. д.) как на качественном, так и на количественном уровне (раздел 3).

## 2. Экспериментальное исследование применимости модели трения со стационарным распределением нагрузки

### 2.1. Методика проведения эксперимента и схема экспериментальной установки

Для определения экспериментальной зависимости силы трения  $F(k)$  будем использовать схему эксперимента, в которой реализуется стационарное вращение горизонтальной платформы относительно неподвижного индентора (см. рис. 4). Согласно известной теореме (Бернулли – Шаля), самое общее плоское-параллельное перемещение тела можно представить как вращение вокруг мгновенного центра скоростей. Поэтому вращение опорного диска (платформы) с угловой скоростью  $\omega$  относительно неврещающегося индентора аналогично вращению индентора с той же угловой скоростью  $\omega$  относительно неподвижного диска в противоположную сторону вокруг мгновенного центра скоростей, совпадающего с центром диска (см. рис. 4).

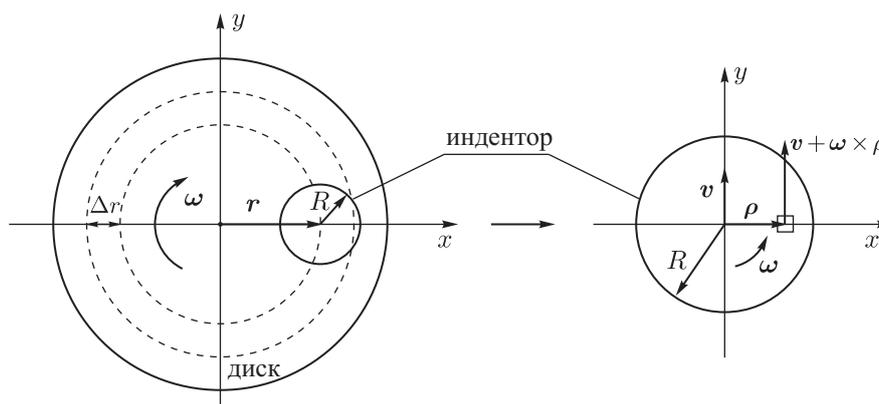


Рис. 4. Схема, поясняющая относительное движение диска и индентора.

Линейная скорость  $v$  центра индентора, зафиксированного на расстоянии  $r$  от центра диска, связана с угловой скоростью диска простым соотношением  $v = r\omega$ , откуда получаем

$$k = \frac{v}{R\omega} = \frac{r}{R}.$$

При этом расстояние  $r$  от центра диска в ходе эксперимента может изменяться с некоторым шагом  $\Delta r$ . Таким образом, зная расстояние от центра диска до центра индентора  $r$  и соответствующее значение силы трения  $F$ , мы можем определить необходимую нам зависимость  $F(k)$ .

Для реализации описанной схемы эксперимента был использован ротационный модуль машины трения SRV-III Test System (Германия, рис. 5а). Скольжение нагруженного верхнего образца (индентора, рис. 5б) по поверхности вращающейся с постоянной угловой скоростью платформы имитирует свободное движение тела с круглой площадкой контакта по горизонтальной плоскости.

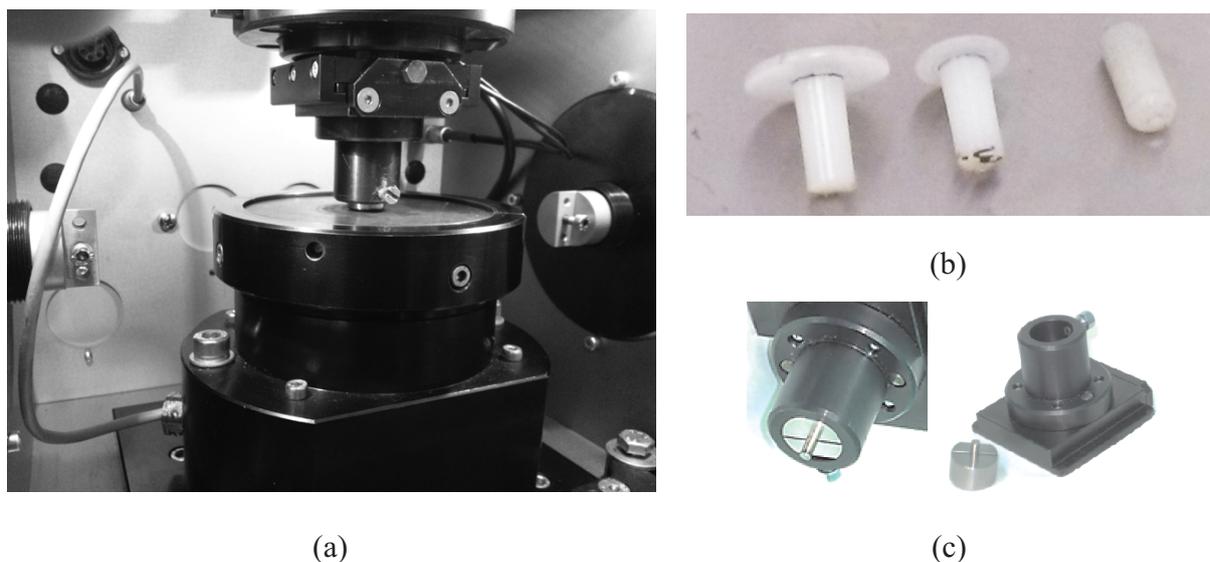


Рис. 5. Внешний вид ротационного модуля машины трения SRV-III (а), варианты образцов инденторов (б) и цанговый узел их крепления (с).

Частота вращения диска задавалась равной  $150 \text{ мин}^{-1}$ . Нагрузка на индентор поддерживалась постоянной и составляла  $10 \text{ Н}$  (что соответствует минимально возможной силе в осевом направлении индентора для данной машины трения) или  $20 \text{ Н}$  (для оценки силы трения при несвободном движении). Для изготовления инденторов использовался капролон (СТО 00203803-001-2009). Диск изготавливался из высокопрочной легированной стали 20Х17Н2 (ГОСТ 5632-72), применяемой для тяжело нагруженных деталей, работающих на истирание и удар, что исключило влияние износа на результаты экспериментов. Предварительная очистка образцов перед испытаниями проводилась в ультразвуковой ванне Sindy Eltrosonic Ultracleaner в этиловом спирте при частоте  $52 \text{ КГц}$  в течение 10 минут. Испытания проводились без смазочного материала в режиме сухого трения.

Траектория движения индентора по вращающемуся диску задавалась набором концентрических кольцевых участков (рис. 4). Расстояние между участками  $\Delta r$  для малых значений радиуса  $r$  составляло  $0.2 \text{ мм}$ , для более детального исследования фрикционных характеристик при малых скоростях. При удалении индентора от центра вращающегося диска величина  $\Delta r$  достигала  $0.5 \text{ мм}$ . Между участками индентор перемещался без остановок, а время движения индентора на каждом из участков определялось временем стабилизации силы трения. При этом количество оборотов для каждой радиусной дорожки диска составляло от 25 до 150. Во всех испытаниях температура окружающей среды поддерживалась равной  $23 \text{ }^\circ\text{C}$ .

При проведении экспериментов варьировались нагрузка ( $N$ ), угловая скорость вращения диска ( $n, \text{ мин}^{-1}$ ), расстояние от оси вращения диска до центра индентора ( $r$ ). Значения данных параметров приведены в таблице 1.

Для сравнения полученных экспериментальных данных с теоретическими результатами, полученными в рамках различных моделей трения, на всех графиках зависимости силы трения  $F(k)$  будем представлять не в абсолютных значениях, а соотношенными с величиной  $F_0 = fN$ .

## 2.2. Обсуждение результатов экспериментов

В ходе проведения экспериментов были установлены следующие характерные особенности.

1. В начальный период времени имеет место приработка контактирующих поверхностей за счет интенсивного износа торцевой поверхности индентора, изготовленного из более мягкого материала, чем диск. Время приработки сокращается при уменьшении шероховатости поверхностей контактной пары, поэтому перед проведением экспериментов все образцы предварительно притирались на тонкой наждачной бумаге.
2. Низкая скорость вращения диска, а также малый диаметр индентора (менее 5 мм) приводят к выраженной нестабильности протекания процесса, скачкообразным колебаниям (изменениям) силы трения (см. рис. 6). Движение на каждом радиусе  $r$  (в соответствии со схемой эксперимента на рисунке 4) в течение 2 минут приводит почти к двукратному изменению силы трения. Кроме того, процесс менее стабилен при низкой нагрузке индентора (менее 10 Н). Похожие явления и характерные зависимости силы трения от нагрузки, полученные для различных пар материалов, в том числе и неметаллических, приведены в работе [1]. Главная причина подобной зависимости от нагрузки — высокая адгезия между контактирующими поверхностями при отсутствии смазочного материала.

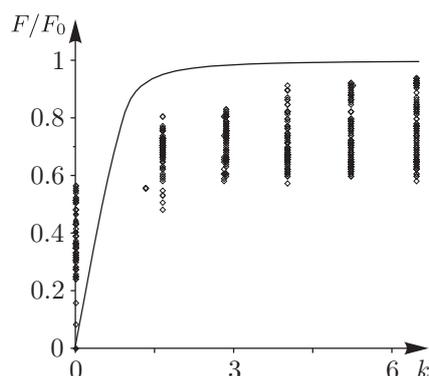


Рис. 6. Зависимость значений относительной силы трения  $F/F_0(k)$  для алюминиевого индентора диаметром 5 мм при нагрузке 10 Н и скорости вращения диска  $15 \text{ мин}^{-1}$ : точками обозначены экспериментальные значения, а сплошной линией — зависимость, полученная в предположении о равномерном распределении давления (1.9). Время движения на каждом радиусе 2 мин, шаг  $\Delta r = 2 \text{ мм}$ .

3. Повышение скорости вращения диска до  $120 \text{ мин}^{-1}$ , удвоение нагрузки (20 Н) и/или увеличение диаметра индентора до 10 мм приводит к снижению амплитуды колебания силы трения и к существенной стабилизации процесса трения.
4. Во всех представленных результатах (рис. 7) экспериментальная зависимость  $F(k)$  стремится асимптотически к оси ординат. Скачки силы трения при  $k = 0$  соответствуют процессу приработки трущихся поверхностей на начальной стадии движения. Дальнейшие колебания силы трения (при увеличении  $k$ ) незначительны.

Далее рассмотрим более подробно результаты измерения силы трения, полученные при различных скоростных режимах, диаметрах индентора и нагрузках.

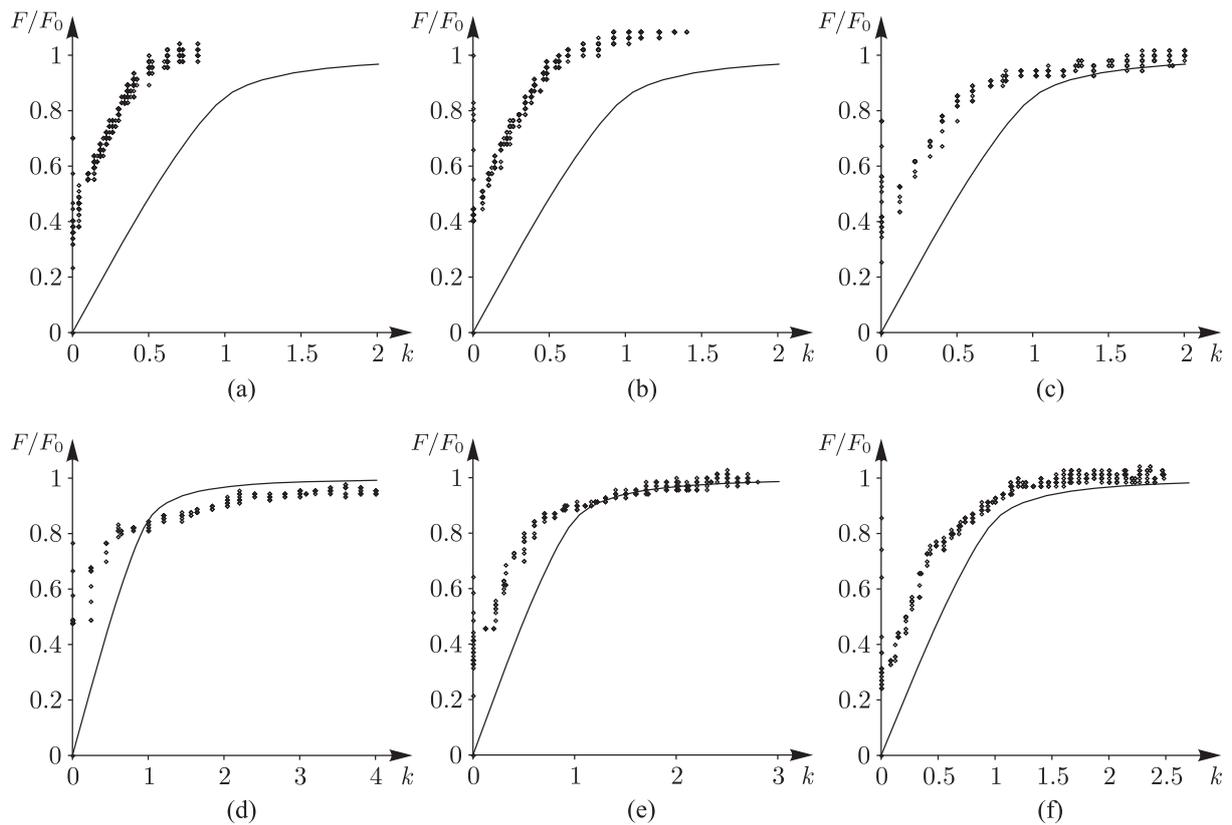


Рис. 7. Зависимости относительных значений силы трения  $F/F_0(k)$ : точками обозначены значения, полученные экспериментально, а сплошной линией — в предположении о равномерном распределении давления (1.9). Соответствующие характеристики экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики экспериментов при движении индентора по диску

№	Рисунок	Радиус индентора $R$ , мм	Частота вращения диска $n$ , мин <sup>-1</sup>	Нагрузка $N$ , Н	Время опыта, мин	Диапазоны радиуса, мм	Шаг $\Delta r$ , мм	Коэф. трения $f$	Время на каждом радиусе, мин	Количество оборотов на радиусе
1	7а	5	150	10	15	0–2	0.2	0.47	1	150
						2–4	0.5			
2	7б	5	150	10	12	0–3	0.2	0.47	0.5	75
						3–12	0.5			
3	7с	5	150	10	7	0–12	0.25	0.55	0.5	37.5
4	7д	2.5	150	20	7	0–14	0.5	0.45	0.167	25
5	7е	5	150	20	5	0–14	0.5	0.35	0.25	25
6	7ф	7.5	150	20	7	0–14	0.5	0.35	0.167	25

На рисунках 7а, б, с представлены результаты экспериментов, выполненных при одинаковых скоростных режимах (150 мин<sup>-1</sup>) и нагрузке (10 Н). Соответствующие характе-



ристики экспериментов представлены в таблице 1, опыты № 1–3. Отличие состоит только во времени «задержки на каждой ступени» (60 с, 30 с и 15 с соответственно) и величине расстояния между радиусными участками  $\Delta r$ . Отметим, что все полученные экспериментальные кривые имеют идентичный характер без каких-либо особенностей. И как видно из графиков на рисунках 7а, б, выбранных диапазонов изменения скорости достаточно для исследования характера зависимости силы трения  $F(k)$ , который при  $k \sim 0.5$  изменился с «вязкого» на «сухой».

В опытах 4, 5 и 6 испытания отличаются только диаметром верхнего образца. Соответствующие графики представлены на рисунках 7d, e, f. Характеристики экспериментов приведены в таблице 1, опыты № 4–6. Характер полученных кривых, так же как и в опытах № 1–3, идентичен. Максимальный коэффициент трения для опыта № 4 — 0.45, для № 5 и № 6 — 0.35, то есть с ростом нагрузки величина коэффициента трения падает. Причины такого поведения силы трения описаны в работе [1]. Кроме того, как видно из рисунка 7, значение  $k$ , при котором происходит смена характера зависимости силы трения, увеличивается с увеличением площади взаимодействующих тел: от  $k \sim 0.7$  при  $R = 2.5$  мм до  $k \sim 0.9$  при  $R = 7.5$  мм. Практическое совпадение величин силы трения при одинаковых нагрузках указывает на хорошую воспроизводимость (повторяемость) результатов.

Основываясь на полученных результатах, можно сформулировать следующие выводы.

- При  $k > 1$  экспериментальные зависимости  $F(k)$  выходят на стационарный участок, на котором сила трения асимптотически стремится к величине  $F_0 = fN$ .
- При уменьшении  $k$  сила трения также уменьшается. Но при приближении к нулю сила трения асимптотически стремится к оси ординат, а не к некоторой линейной функции, что противоречит теоретическим результатам.
- Кроме того, в описанных экспериментах используются сравнительно большие скорости, так как было установлено, что при малых скоростях проявляются эффекты, приводящие к существенной неустойчивости процесса. Таким образом, оценить применимость полученных результатов к скольжению тел при малых скоростях оказалось невозможным.

### 3. Экспериментальное исследование свободного движения цилиндра

#### 3.1. Схема экспериментальной установки и методика проведения эксперимента

Напомним ранее обозначенные цели экспериментального исследования свободного движения цилиндра:

- верифицировать теорию движения цилиндра, основанную на линейном распределении давления тела на поверхность скольжения;
- экспериментально проверить отклонение траектории движения тела вправо от прямой при вращении тела против часовой стрелки;
- экспериментально проверить и оценить эффект одновременного прекращения скольжения и вращения и предельное значение безразмерного параметра  $k^* = \frac{v}{R\omega}$  в момент остановки цилиндра.



Таблица 2. Характеристики экспериментов при свободном движении цилиндров с плоским круглым основанием

№ эксперимента	1	2	3
Материал поверхности	Нерж. сталь	Пластик	Нерж. сталь
Материал цилиндра	Капролон	Сталь 45	Капролон
Радиус цилиндра, $R$ , мм	40	30	30
Высота цилиндра, $h$ , мм	50	35	35
Масса цилиндра, $m$ , кг	0.814	0.871	0.497

Для проверки данных предположений и сопоставления результатов численного и натурного экспериментов были проведены опыты по свободному движению цилиндров с плоским круглым основанием различных радиусов и высот по горизонтальным поверхностям (таблица 2). Отметим, как уже было указано во введении, что в ходе многочисленных предварительных опытов для дисков и поверхностей использовались ПВХ- и капролоновые материалы. Сложности, возникшие при проведении предварительных экспериментов и связанные в основном с присутствием дополнительных электростатических сил, приводили к сильной зависимости получаемых данных от внешних условий (влажности воздуха, предварительной обработки контактирующих поверхностей и пр.), как следствие, к неповторяемости результатов. Повторяемых результатов в эксперименте удалось достичь только после начала опытов с парой материалов пластик/сталь, где с помощью предварительного или постоянного заземления удавалось снять силы электростатики. Также для каждого цилиндра проверялось выполнение условия положительности давления на всем основании  $\frac{fh}{R} < \frac{1}{4}$ , полученного в [40, 55] в рамках использования модели линейного распределения давления.

Для проведения экспериментов использовался стенд, схема которого представлена на рисунке 8а. На горизонтальной платформе установлен листовой тщательно очищенный материал — поверхность скольжения. Одна часть листа, с которой производился запуск тел, приподнималась на угол от  $5^\circ$  до  $45^\circ$  так, чтобы в зоне съемки видеокамеры (горизонтальный участок  $50 \times 50$  см) можно было наблюдать движение цилиндра вплоть до полной остановки.

Для определения положения и ориентации тела на его верхнюю поверхность наклеивался рисунок, содержащий семь светлых меток диаметром 5 мм (рис. 8б). Закручивание цилиндра осуществлялось путем предварительной намотки на его боковую поверхность шнура, свободный конец которого закреплялся перед запуском в верхней точке наклонной плоскости.

Как и в работах [41, 67], чтобы не вносить неконтролируемое возмущение, измерения выполнялись при помощи скоростной видеосъемки. Съемка проводилась видеокамерой IDT Y4-S1 на максимальном разрешении  $1024 \times 1024$  с частотой 200 кадров в секунду. Опыт с каждым цилиндром был проведен не менее двадцати раз, после чего все данные экспериментов подвергались обработке и анализу: при помощи специально разработанного вычислительного модуля с использованием библиотек OpenCV анализировались полученные изображения и определялись координаты *центров* всех семи меток на поверхности

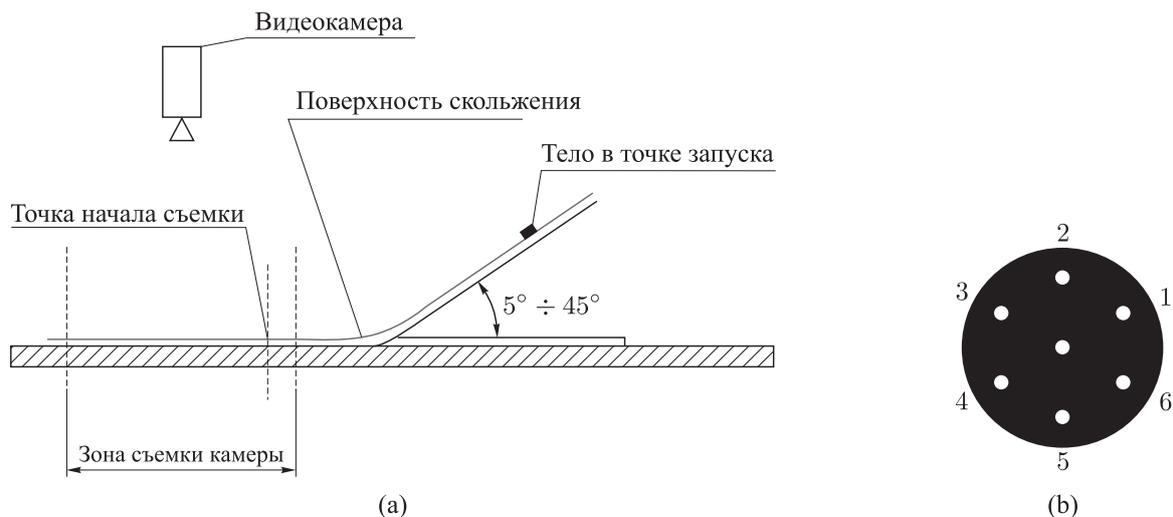


Рис. 8. Схема экспериментального стенда для исследования скольжения тел по горизонтальной плоскости (а) и рисунок, наносимый на верхнюю поверхность тела (b).

тела. Тем самым на выходе выдавались семь численных массивов, задающих траектории точек, жестко связанных с телом.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Размеры, форма и количество меток, а также их расположение были подобраны экспериментально в процессе настройки программы по распознаванию меток с учетом условий освещения рабочей поверхности при съемке.

Для определения кинематических характеристик исследуемых тел данные, полученные с видеокамеры, подвергались упорядочению и обработке. Для этого каждому видеокадру был присвоен номер с индексом  $i = 1, \dots, N$ , а каждой метке на верхней грани цилиндра был присвоен номер с индексом  $j = 0, \dots, 6$ , где  $j = 0$  соответствует центральной метке, а остальные нумеровались по порядку против часовой стрелки (рис. 8b). Таким образом, радиус-вектор  $i$ -ой метки на  $j$ -ом видеокadre имеет координаты  $\mathbf{r}_i^{(j)} = (x_i^{(j)}, y_i^{(j)})$ . Поскольку временной интервал между кадрами видеосъемки в эксперименте фиксирован ( $\Delta t = 1/200$  с) для определения скоростей и ускорений мы воспользовались стандартными формулами конечных разностей с постоянным шагом [63]. Так, поступательная скорость центра тела в момент времени  $t = i\Delta t$ , соответствующего  $i$ -ому кадру видеосъемки, определялась из соотношений

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_i^{(0)} &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{(0)} - \mathbf{r}_{i-1}^{(0)}}{2\Delta t} + o(\Delta t^2), \quad 1 < i < N, \\
 \mathbf{v}_1^{(0)} &= \frac{\mathbf{r}_2^{(0)} - \mathbf{r}_1^{(0)}}{\Delta t}, \quad \mathbf{v}_N^{(0)} = \frac{\mathbf{r}_N^{(0)} - \mathbf{r}_{N-1}^{(0)}}{\Delta t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Напомним, что эти соотношения возникают из аппроксимации зависимости  $\mathbf{r}^{(0)}(t)$  в точке  $t = t_i$  при помощи квадратичных полиномов. Несложно получить аналогичные формулы для аппроксимаций более высокой степени.

Для определения угловой скорости  $\omega_i \mathbf{e}_z$  движущегося цилиндра использовалось соотношение  $\mathbf{v}_i^{(j)} = \mathbf{v}_i^{(0)} + \omega_i \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}_i^{(j)} - \mathbf{r}_i^{(0)})$ , откуда

$$\omega_i \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{R}_i^{(j, l)} \times \mathbf{V}_i^{(j, l)}}{|\mathbf{R}_i^{(j, l)}|^2}, \quad \mathbf{R}_i^{(j, l)} = \mathbf{r}_i^{(j)} - \mathbf{r}_i^{(l)}, \quad \mathbf{V}_i^{(j, l)} = \mathbf{v}_i^{(j)} - \mathbf{v}_i^{(l)}.$$

Выбирая три пары противоположащих меток на цилиндре, для которых  $j = 1, 2, 3$ ,  $l = j + 3$ , можно вычислить скорости  $\mathbf{V}_i^{(j, l)}$  по тем же разностным формулам (3.1), в качестве угловой скорости цилиндра выбиралось среднее:

$$\omega_i = \frac{\omega_i^{(1, 4)} + \omega_i^{(2, 5)} + \omega_i^{(3, 6)}}{3}.$$

Для получения аналитических зависимостей  $v(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $y(x)$ , графики которых приводятся далее для сравнения с экспериментальными результатами, использовались уравнения движения, приведенные в [40]. При этом в качестве начальных данных для интегрирования уравнений движения использовались параметры тела и поверхности, а также начальные линейная  $v(0)$  и угловая  $\omega(0)$  скорости, полученные из экспериментальных данных.

Для удобства вычислений и анализа переопределим угловую скорость, умножив ее на радиус цилиндра  $u(t) = R\omega(t)$ .

### 3.2. Обсуждение результатов экспериментов

В ходе проведения экспериментов в первую очередь было установлено, что свободное движение цилиндра даже в специальных лабораторных условиях очень чувствительно к любым внешним факторам и воздействиям. Кроме эффекта электростатического прилипания, описанного во введении, большое количество «отбракованных» экспериментов (около 30 %) было связано с неконтролируемым влиянием микронеровностей на поверхности скольжения. Типичные траектории движения в таких экспериментах представлены на рисунке 10. Движение характеризуется внезапным изменением направления вращения, что не соответствует ни одной теоретической модели. Данные таких экспериментов отсеивались и не обрабатывались.

Далее, следуя методике проведения эксперимента, при которой каждый отдельный опыт в серии подвергался численной обработке и анализу, были получены графики (см. рис. 11 и 12), описывающие эволюцию движения цилиндров № 1 и № 2 из таблицы 2, где

- на рисунках (a), (b), (c) представлены экспериментальные и численно рассчитанные (для модели линейного распределения давления) зависимости *линейной*  $v(t)$  и *угловой*  $u(t)$  скоростей от времени для трех отдельных экспериментов,
- на рисунке (d) представлены экспериментальные *траектории*  $y(x)$ , соответствующие экспериментам (a), (b), (c), и одна из численно рассчитанных траекторий в предположении линейного распределения давления,
- на рисунке (e) экспериментальные зависимости *безразмерного параметра*  $k(t) = \frac{v(t)}{u(t)}$  от времени для экспериментов (a), (b), (c).

Как видно из рисунков 11а, b, с и 12а, b, с линейная  $v(t)$  и угловая  $u(t)$  скорости заметно отличаются от численно рассчитанных в предположении о линейном распределении давления цилиндра на поверхность скольжения. Также *неочевиден* эффект одновременного обращения в нуль скоростей в момент остановки цилиндра, что подтверждается и на графиках эволюции безразмерного параметра  $k(t)$  (рис. 11е и рис. 12е). В экспериментах с цилиндрами №1 и №2 из таблицы 2 не удалось подтвердить стремление параметра  $k(t)$  к единому предельному значению в момент остановки. Кроме того, очевиден разброс в значениях параметра  $k(t)$  в момент остановки цилиндра.

На рисунках 11d и 12d наряду с общей тенденцией отклонения движения цилиндра в сторону, противоположную вращению, видно существенное расхождение экспериментальных и численно построенных траекторий. Дополнительные эксперименты с цилиндром №3 из таблицы 2 показали, что цилиндр отклоняется в сторону, противоположную вращению (согласно теории о линейном распределении давления), в 85 % случаев (см. рис. 13). Здесь особо показательными оказались опыты с цилиндрами, имеющими относительно большую начальную угловую скорость, соответствующую значениям  $k(0) < 1.3$  (см. рис. 13b), когда направление движения цилиндра становится непредсказуемым и может смениться несколько раз до момента остановки.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Также в ходе экспериментов не удалось подобрать единый коэффициент трения для пары материалов пластик/сталь. Моделирование движения показало, что коэффициент трения в натурном эксперименте, как правило, лежит вблизи нижней границы диапазона коэффициентов трения для данной пары материалов  $0.2 < f < 0.3$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что метод, основанный на обработке и анализе каждого отдельного эксперимента, не дает возможности качественно и количественно оценить характеристики свободного движения цилиндра.

Тем не менее, в данной ситуации можно использовать другой метод представления и обработки экспериментальных данных, позволяющий получить не только качественные, но и более точные количественные оценки динамики цилиндра. Во-первых, в эксперименте перейдем к серии многократных запусков одного цилиндра №3 из таблицы 2. Во-вторых, откажемся от представления результатов в виде зависимостей от времени, а будем использовать метод фазовых портретов, то есть будем откладывать траектории на фазовой плоскости  $(u, v)$ .

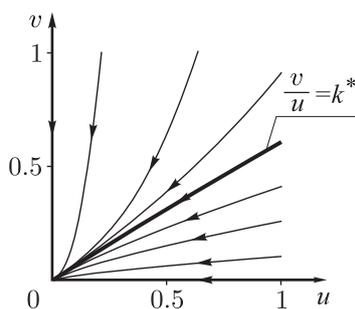


Рис. 9. Фазовые траектории и асимптота на плоскости  $(u, v)$ .

На рисунке 14 представлены результаты данной серии экспериментов, на одном графике изображены все зависимости  $v(u)$ , полученные в отдельных запусках. Из рисунка 14 видно, что

1. все траектории асимптотически стремятся к началу координат, что подтверждает предположения об одновременном прекращении скольжения и вращения в момент остановки цилиндра;
2. асимптотическое поведение траекторий при  $u, v \rightarrow 0$  группируется вокруг некоторой прямой  $v = k^*u$  (что совпадает с теоретическими предсказаниями, см. рис. 9).

Используя метод наименьших квадратов для нахождения асимптотической линейной зависимости отношения линейной и угловой скоростей цилиндра  $k^* = \frac{v}{u}$  вблизи нуля, получаем для данной серии экспериментов асимптоту, соответствующую значению коэффициента  $k^* = 2.12$  (со среднеквадратичным отклонением  $\sigma = 0.237$ ). Данное значение

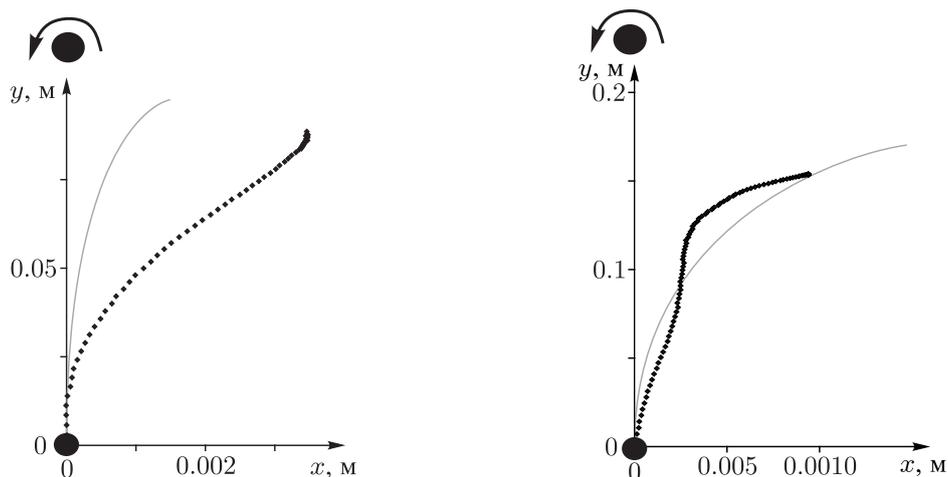


Рис. 10. Типичные экспериментальные траектории цилиндра (обозначены пунктиром), отнесенные к группе «экспериментального брака». Сплошные линии — численно рассчитанные траектории при значении коэффициента трения  $f = 0.2$  из начальных условий, определенных из экспериментальных данных. Точка начала движения  $(x_0, y_0)$  совмещена с началом координат  $(0, 0)$ , ось ординат направлена вдоль начального вектора линейной скорости  $v(0)$ , направление вращения цилиндра обозначено над осью ординат (против часовой стрелки).

значительно отличается от предельных коэффициентов, рассчитанных для модели постоянного давления  $k_0 = 0.653$  и для модели линейного распределения давления для данной пары цилиндр/поверхность  $k'_0 = 0.67$ .

Таким образом, метод представления экспериментальных данных на фазовой плоскости  $(u, v)$  дает более точные качественные и количественные оценки закономерностей свободного движения цилиндра и показывает, что ни одна из моделей распределения давления не дает полного описания свободного движения тела с плоским основанием.

#### 4. Дискуссия

Кратко изложим содержание и результаты численного и натурального экспериментов по динамике тела с плоским осесимметричным основанием (цилиндра высоты  $h$  и радиуса  $R$ ), описанные выше.

1. В эксперименте по определению зависимости силы трения  $F(k)$  от безразмерного отношения линейной  $v$  и угловой  $\omega$  скоростей тела  $k = \frac{v}{R\omega}$  был использован ротационный модуль машины трения SRV-III Test System (Германия). Данный модуль хорошо себя зарекомендовал в предшествующих аналогичных экспериментах. Предварительная настройка модуля и подготовка поверхностей образцов и опорного диска позволяют получить объективные повторяемые результаты. Однако в ходе проведения экспериментов была отмечена нестабильность измерительного процесса при низких скоростях вращения опорного диска.

Эксперимент показал, что при  $k > 1$  зависимости  $F(k)$  для различных образцов выходят на стационарный участок, на котором сила трения асимптотически стремится к величине  $F_0 = fN$ , где  $f$  — коэффициент трения,  $N$  — нагрузка на образец, что соответствует закону сухого трения. Не нашло подтверждения предположение о «вязком»

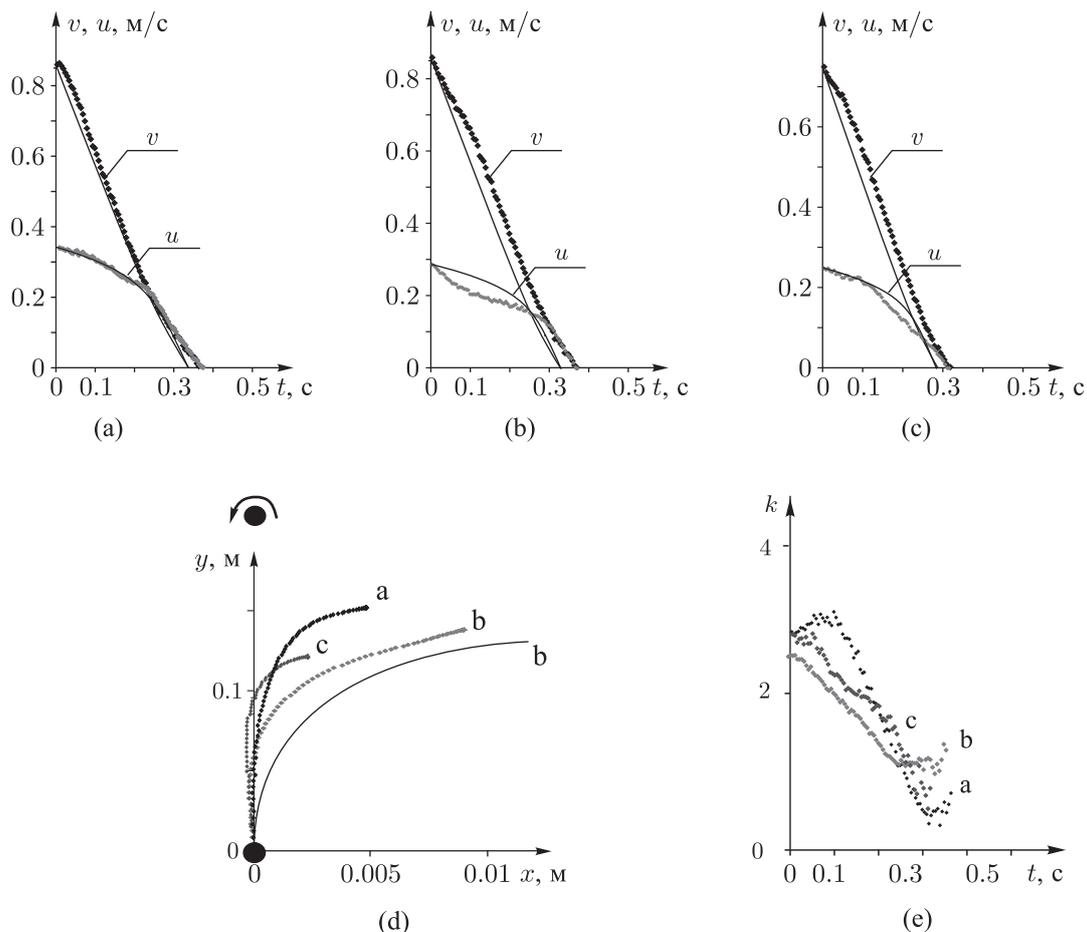


Рис. 11. Результаты численного и натурального экспериментов, полученные при скольжении цилиндра из капрлона массой  $m = 0.814$  кг, радиусом  $R = 0.04$  м, высотой  $h = 0.05$  м по листу нержавеющей стали (№ 1, табл. 2).

(a), (b), (c) Аналитические и экспериментальные зависимости линейной  $v(t)$  и угловой  $u(t)$  скоростей от времени для трех типовых экспериментов. Сплошные линии — численно полученные скорости для коэффициента трения  $f = 0.2$ .

(d) Траектории цилиндра, полученные в экспериментах (a, b, c). Сплошная линия — численно полученная траектория для коэффициента трения  $f = 0.2$  в эксперименте (b). Точка начала движения  $(x_0, y_0)$  совмещена с началом координат  $(0, 0)$ , ось ординат направлена вдоль начального вектора линейной скорости  $v(0)$ , направление вращения цилиндра обозначено над осью ординат (против часовой стрелки).

(e) Экспериментальные зависимости безразмерного параметра  $k(t) = \frac{v(t)}{u(t)}$  для экспериментов (a, b, c).

характере трения при  $k < 1$ . Эксперимент показал, что при  $k \rightarrow 0$  зависимости  $F(k)$  стремятся к некоторым значениям  $F(0) \neq 0$ . Эксперименты в данном диапазоне требуют более тщательной подготовки и проверки.

- В эксперименте по свободному движению цилиндра по горизонтальной плоскости измерения выполнялись с помощью скоростной видеосъемки камерой IDT Y4-S1 с частотой 200 кадров в секунду. Собранный экспериментальный стенд позволяет избежать возмущений в измерительном процессе, однако остается неконтролируемым влияние

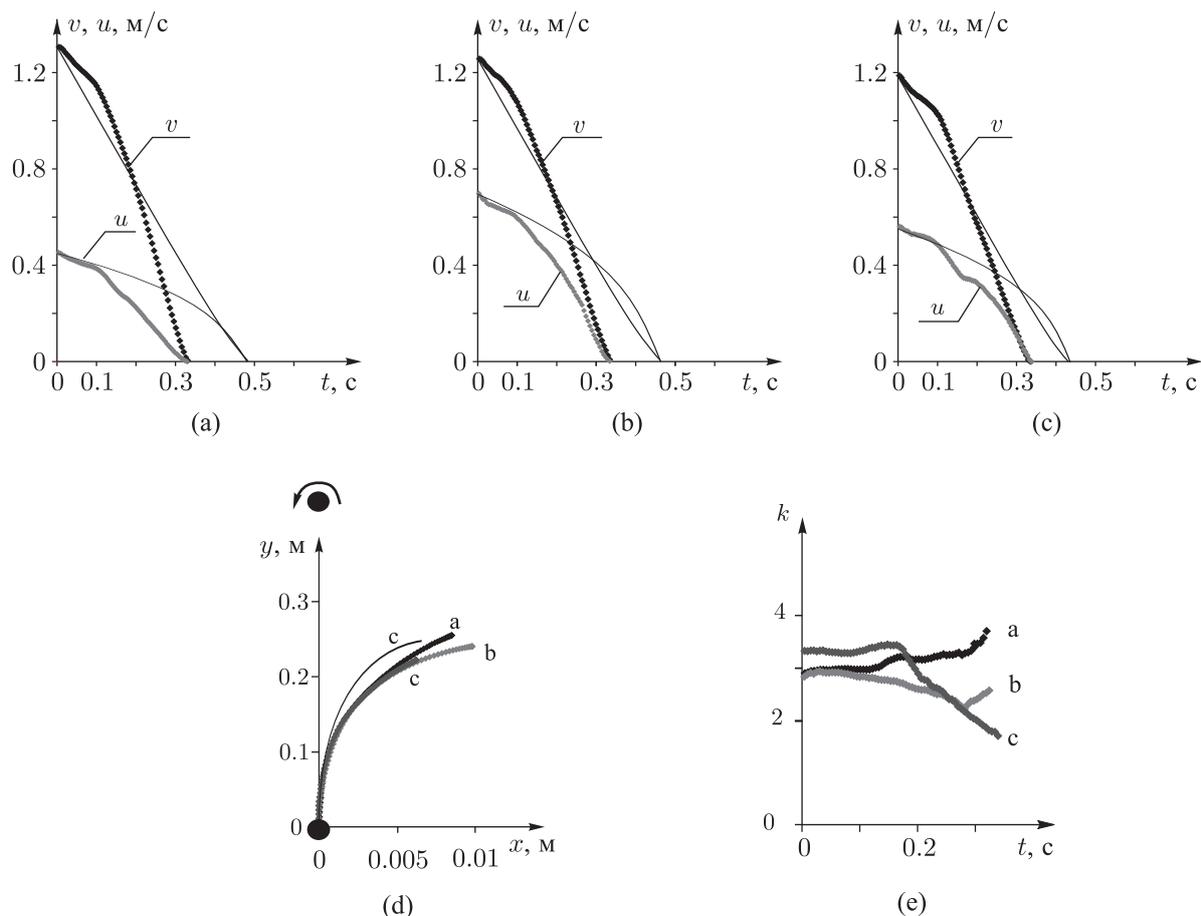


Рис. 12. Результаты численного и натурального экспериментов, полученные при скольжении цилиндра из стали массой  $m = 0.871$  кг, радиусом  $R = 0.03$  м, высотой  $h = 0.035$  м по листу капрлона (№ 2, табл. 2).

(a), (b), (c) Аналитические и экспериментальные зависимости линейной  $v(t)$  и угловой  $u(t)$  скоростей от времени для трех типовых экспериментов. Сплошные линии — численно полученные скорости для коэффициента трения  $f = 0.2$ .

(d) Траектории цилиндра, полученные в экспериментах (a, b, c). Сплошная линия — численно полученная траектория для коэффициента трения  $f = 0.2$  в эксперименте (c). Точка начала движения  $(x_0, y_0)$  совмещена с началом координат  $(0, 0)$ , ось ординат направлена вдоль начального вектора линейной скорости  $v(0)$ , направление вращения цилиндра обозначено над осью ординат (против часовой стрелки).

(e) Экспериментальные зависимости безразмерного параметра  $k(t) = \frac{v(t)}{u(t)}$  для экспериментов (a, b, c).

внешних условий (влажность воздуха, микронеровности поверхности образцов и поверхности скольжения и др.). Также оказалось невозможным оценить повторяемость получаемых результатов вследствие трудностей, связанных с запуском образцов с одинаковыми начальными скоростями вращения и скольжения.

Эксперимент показал, что в большинстве проведенных запусков (около 85 %) действительно наблюдается эффект отклонения траектории от прямолинейной в сторону, противоположную вращению, что предсказано в модели трения, основанной на линейном распределении давления тела на плоскость. Используемый в обработке результатов

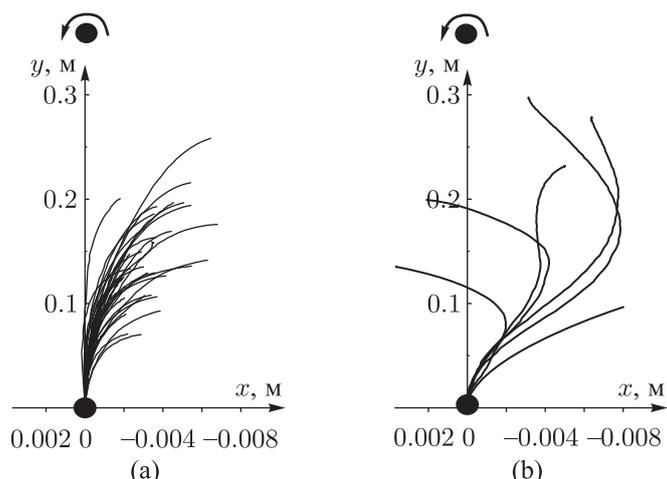


Рис. 13. Экспериментальные траектории цилиндра из капрлона ( $m = 0.497$  кг,  $R = 0.03$  м,  $h = 0.035$  м), скользящего по листу из нержавеющей стали (№ 3, табл. 2): а) с начальными скоростями, соответствующими условию  $k(0) > 2.5$ , б) с начальными скоростями, соответствующими условию  $k(0) < 1.3$ . Точка начала движения  $(x_0, y_0)$  совмещена с началом координат  $(0, 0)$ , ось ординат направлена вдоль начального вектора линейной скорости  $v(0)$ , направление вращения цилиндра обозначено над осью ординат (против часовой стрелки).

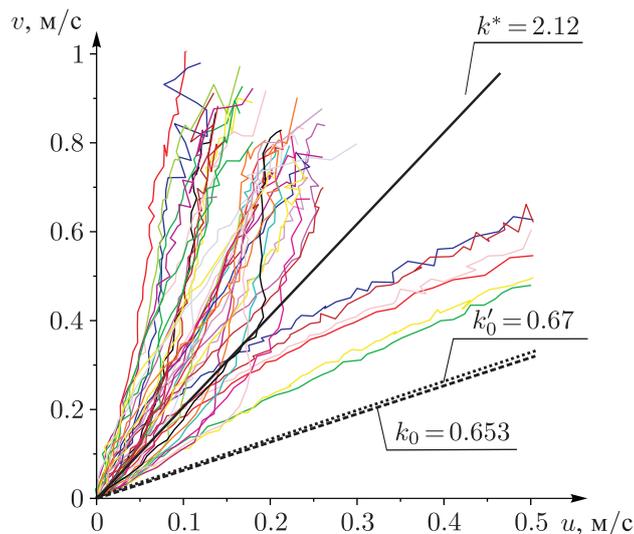


Рис. 14. Фазовые траектории цилиндра из капрлона ( $m = 0.497$  кг,  $R = 0.03$  м,  $h = 0.035$  м) на плоскости  $(u, v)$ , скользящего по листу из нержавеющей стали (№ 3, табл. 2). Черная сплошная линия — асимптота к экспериментальным зависимостям  $v(u)$  вблизи нуля  $v = k^*u$ ,  $k^* = 2.12$ , пунктирные линии — асимптоты, соответствующие коэффициенту  $k_0 = 0.653$ , полученному для модели равномерного давления, и коэффициенту  $k'_0 = 0.67$ , полученному для модели линейного распределенного давления.

метод представления траекторий на фазовой плоскости показал, что поступательное и вращательное движение цилиндра прекращаются одновременно, но значение параметра  $k^* = 2.12$  в момент остановки существенно отличается от значений, полученных в рамках известных моделей распределения нагрузки.

Результаты, полученные в ходе данной работы, расширяют экспериментальные сведения о влиянии сухого трения на движение твердого тела и показывают необходимость дальнейшего серьезного исследования влияния трения на динамические процессы. Тем не менее, остаются открытыми многие интересные проблемы: например, доработка установки и методики эксперимента для проведения измерения момента силы трения, исследование влияния влажного трения, в частности на примере динамики камней для керлинга, расширение экспериментальной базы динамики тел с точечным пятном контакта для оценки адекватности и правомерности использования существующих моделей трения в таких задачах как качение шара, волчка и кельтского камня.

## Список литературы

- [1] Крагельский И. В. Трение и износ. Москва: Машиностроение, 1968. 480 с.
- [2] Bowden F. P., Tabor D. The friction and lubrication of solids. Oxford: Oxford Univ. Press, 2001. 374 pp.
- [3] Dowson D. History of tribology. London: Longman, 1979. 677 pp.
- [4] Reynolds O. On rolling friction // Philos. Trans. R. Soc. Lond., 1876, vol. 166, pp. 155–174.
- [5] Coulomb Ch. A. Theorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages. Paris: Bachelier, 1821. 390 pp.
- [6] Stribeck R. H. Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager // Z. Ver. dt. Ing., 1902, vol. 46, no. 38, pp. 1341–1348; no. 39, pp. 1463–1470.
- [7] Гидродинамическая теория смазки / П. Н. Петров, О. Рейнольдс, А. Зоммерфельд, А. Мичель, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин; под ред. Л. С. Лейбензона. Москва – Ленинград: ГТТИ, 1934. 576 с.
- [8] Euler J. A. Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent // Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin, 1758, vol. 12, pp. 165–234.
- [9] Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. Москва: Гостехиздат, 1956. 235 с.
- [10] Резаль А. Комментарии к математической теории явлений бильярдной игры // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 2, с. 415–438.
- [11] Appell P. Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement // J. Math. Pures Appl. (6), 1911, vol. 7, pp. 85–96.
- [12] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.
- [13] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [14] Walker G. T. On a curious dynamical property of celts // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.
- [15] Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. Нелинейная динамика кельтского камня: Неголономная модель // УФН, 2014, т. 184, № 5, с. 493–500.
- [16] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Глобальное движение кельтского камня // МГТ, 2008, № 3, с. 8–16.
- [17] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения // Матем. сб., 1892, т. 16, № 3, с. 544–581.
- [18] Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева // Тр. отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1893, т. 6, № 1, с. 352–369.

- [19] Borisov A. V., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [20] Markeev A. P. On the dynamics of a solid on an absolutely rough plane // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 153–160.
- [21] Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. L. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: A benchmark and review // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2007, vol. 463, no. 2084, pp. 1955–1982.
- [22] Takano H. Spin reversal of a rattleback with viscous friction // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 1, pp. 81–99.
- [23] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. 519 с.
- [24] Журавлёв В. Ф. Понятие связи в аналитической механике // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 853–860.
- [25] Киреенков А. А., Семендяев С. В., Филатов В. Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // МТТ, 2010, № 6, с. 192–202.
- [26] Ciocci M. C., Langerock B. Dynamics of the tippe top via Routhian reduction // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 6, pp. 602–614.
- [27] Zobova A. A. Comments on the paper by M. C. Ciocci, B. Malengier, B. Langerock, and B. Grimonprez «Towards a prototype of a spherical tippe top» // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 367–369.
- [28] Jensen M. T., Shegelski M. R. A. The motion of curling rocks: Experimental investigation and semi-phenomenological description // Can. J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 1–19.
- [29] Ivanov A. P., Shuvalov N. D. On the motion of a heavy body with a circular base on a horizontal plane and riddles of curling // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 1, pp. 97–104.
- [30] Frohlich C. What makes bowling balls hook? // Amer. J. Phys., 2004, vol. 72, no. 9, pp. 1170–1177.
- [31] Erdakova N. N., Ivanov A. P. On a mechanical lens. arXiv:1509.01413 (2015).
- [32] Earnshaw S. Dynamics, or An elementary treatise on motion. 3rd ed. Cambridge: Deighton, 1844. 396 pp.
- [33] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Jacobi integral in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 383–400.
- [34] Borisov A. V., Mamaev I. S., Karavaev Yu. L. On the loss of contact of the Euler disk // Nonlinear Dynam., 2015, vol. 79, no. 4, pp. 2287–2294.
- [35] Karavaev Yu. L., Kilin A. A. The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 2, pp. 134–152.
- [36] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272. См. также: Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.
- [37] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158. См. также: Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76.
- [38] Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: ГИТТЛ, 1954. 316 с.
- [39] MacMillan W. D. Dynamics of rigid bodies. New York: McGraw-Hill, 1936. 478 pp.
- [40] Borisov A. V., Erdakova N. N., Ivanova T. B., Mamaev I. S. The dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 6, pp. 607–634.

- [41] Weidman P. D., Malhotra Ch. P. On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // *Phys. D*, 2007, vol. 233, no. 1, pp. 1–13. *См. также:* Вайдман П. Д., Мальотра Ч. О финальном движении скользящих и вращающихся дисков с однородным кулоновым трением // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 2, с. 339–365.
- [42] Козлов В. В. Замечания о сухом трении и неголономных связях // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 903–906.
- [43] Kozlov V. V. On the integration theory of equations of nonholonomic mechanics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 191–176.
- [44] Иванов А. П. Сравнение моделей трения в динамике шара на плоскости // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 907–912.
- [45] Lévy-Leblond J.-M. The ANAIS billiard table // *Eur. J. Phys.*, 1986, vol. 7, no. 4, pp. 252–258.
- [46] Фуфаев Н. А. Катание шара по горизонтальной вращающейся плоскости // *ПММ*, 1983, т. 47, № 1, с. 43–47.
- [47] Фуфаев Н. А. Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // *ПММ*, 1966, т. 30, № 1, с. 67–72.
- [48] Voyerli K., Eriksen E. On the motion of an ice hockey puck // *Amer. J. Phys.*, 1985, vol. 53, pp. 1149–1153.
- [49] Жуковский Н. Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Полное собр. соч.: В 16 тт.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский; ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, Комис. по изданию трудов Н. Е. Жуковского, Ред. коллегия: С. А. Чаплыгин, А. И. Некрасов, В. А. Архангельский и др. Москва – Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1937. С. 433–449. (Первоначально напечатана в «Трудах Отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии», 1897, т. 9, вып. 1, с. 339–354.)
- [50] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. Москва: АН СССР, 1959. 386 с.
- [51] Кирхгоф Г. Механика. Москва: АН СССР, 1962. 402 с.
- [52] Журавлёв В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // *ПММ*, 1998, т. 62, № 5, с. 762–767.
- [53] Журавлёв В. Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // *МТТ*, 2006, № 6, с. 3–9.
- [54] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // *МТТ*, 2005, № 6, с. 157–168.
- [55] Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // *ПММ*, 2009, т. 73, № 2, с. 189–203.
- [56] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // *МТТ*, 1981, № 4, с. 17–28.
- [57] Харламов П. В. Критика некоторых математических моделей механических систем с дифференциальными связями // *ПММ*, 1992, т. 56, № 4, с. 683–692.
- [58] Козлов В. В. К вопросу о реализации связей в динамике // *ПММ*, 1992, т. 56, № 4, с. 692–698.
- [59] Киреенков А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // *МТТ*, 2002, № 1, с. 60–67.
- [60] Kudra G., Awrejcewicz J. Application and experimental validation of new computational models of friction forces and rolling resistance // *Acta Mech.*, 2015, vol. 226, no. 9, pp. 2831–2848.
- [61] Сальникова Т. В., Трещев Д. В., Галлямов С. Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 1, с. 83–101.
- [62] Самсонов В. А. О трении при скольжении и верчении тела // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ.*, 1981, № 2, с. 76–78.
- [63] Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. Москва: Физматлит, 2004. 400 с.



- [64] Шиллер Н. Н. Заметка о равновесии твердого тела при действии трения на некоторую плоскую часть его поверхности // Тр. Отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания, 1892, т. 5, № 1, с. 17–19.
- [65] Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885. 721 pp.
- [66] Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии: Сб. научн. ст. / Г. Циглер (ред.). Москва: Мир, 1967. С. 60–77.
- [67] Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol. 90, no. 24, 248302, 4 pp. См. также: Фаркаш З., Бартельс Г., Унгер Т., Вольф Д. О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 1, с. 139–146.
- [68] Goyal S. Planar sliding of a rigid body with dry friction: Limit surfaces and dynamics of motion: PhD Thesis. Ithaca, N.Y., Cornell University, 1989. 99 pp.
- [69] Goyal S., Ruina A., Papadopoulos J. Planar sliding with dry friction: P. 2: Dynamics of motion // Wear, 1991, vol. 143, pp. 331–352.
- [70] Shegelski M. R. A., Hohenstein R. Rapidly rotating sliding cylinders: Trajectories with large lateral displacements // Can. J. Phys., 2002, vol. 80, pp. 141–147.
- [71] Зобова А. А., Трещев Д. В. Шар на вязкоупругой плоскости // Современные проблемы механики: Сб. ст.: К 80-летию со дня рождения акад. А. Г. Куликовского / В. В. Козлов, А. Г. Сергеев (ред.). (Тр. МИАН, т. 281.) Москва: МАИК, 2013. С. 98–126.
- [72] Erismann Th. Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes // Z. Angew. Math. Phys., 1954, vol. 5, no. 5, pp. 355–388.
- [73] Киреенков А. А., Семендяев С. В., Филатов В. Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // МТТ, 2010, № 6, с. 192–202.
- [74] Cross R. The rise and fall of spinning tops // Amer. J. Phys., 2013, vol. 81, no. 4, pp. 280–289.

### On the dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Yury L. Karavaev<sup>2</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>3</sup>, Nadezhda N. Erdakova<sup>4</sup>,  
Tatiana B. Ivanova<sup>5</sup>, Valery V. Tarasov<sup>6</sup>

<sup>1,5</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, 141700 Russia

<sup>1</sup>National Research Nuclear University MEPhI

Kashirskoe sh. 31, Moscow, 115409 Russia

<sup>2</sup>Izhevsk State Technical University

Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069 Russia

<sup>2,3,4,5</sup>Udmurt State University

Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

<sup>6</sup>Institute of Mechanics UB RAS

ul T. Baramzinoi 34, Izhevsk, 426067 Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>karavaev\_yury@istu.ru, <sup>3</sup>mamaev@rcd.ru, <sup>4</sup>enn@rcd.ru, <sup>5</sup>tbesp@rcd.ru,

<sup>6</sup>valeratarasov@bk.ru

In this paper we investigate the dynamics of a body with a flat base (cylinder) sliding on a horizontal rough plane. For analysis we use two approaches. In one of the approaches using a friction machine we determine the dependence of friction force on the velocity of motion of cylinders. In the other approach using a high-speed camera for video filming and the method of presentation of trajectories on a phase plane for analysis of results, we investigate the qualitative and quantitative behavior of the motion of cylinders on a horizontal plane. We compare the



results obtained with theoretical and experimental results found earlier. In addition, we give a systematic review of the well-known experimental and theoretical results in this area.

MSC 2010: 70F40, 70E18, 70-05

Keywords: dry friction, linear pressure distribution, two-dimensional motion, planar motion, Coulomb law

Received July 10, 2015, accepted August 24, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 547–577 (Russian)