Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 613–620.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. ОБЗОРЫ

О вихревом движении в сжимаемой жидкости

А. Фридман

Как показано в работах Бьеркнеса [1] и Зильберштейна [2], в противоположность законам Лагранжа для несжимаемых жидкостей при движении *для сжимаемой жидкости*, даже если действуют одни только консервативные силы, *вихри* могут *возникать и исчезать*, потому что давление уже зависит не только от плотности, но и от температуры. С другой стороны, наблюдения за атмосферой позволяют утверждать [3], что в ней поверхности с постоянным давлением и с постоянной температурой могут пересекаться, из чего следует, что в этом случае давление действительно зависит не только от плотности. Таким образом, исследование таких движений сжимаемой жидкости, при которых давление не будет определенной функцией плотности, оказывается фундаментальной задачей динамической метеорологии.

Когда плотность постоянна или представляет собой определенную функцию давления, в фундаментальных уравнениях классической гидромеханики приходится иметь дело с четырьмя неизвестными: это три компоненты скорости и давление. В общем случае три уравнения движения вместе с уравнением непрерывности дают нам возможность найти значения компонент скорости и давления при известных начальных и граничных условиях. При исследовании общего движения сжимаемой жидкости количество искомых неизвестных возрастает до пяти, поскольку к вышеуказанным четырем неизвестным добавляется еще и плотность. Поэтому введенных ранее четырех уравнений уже недостаточно и, чтобы задать движение сжимаемой жидкости, мы должны воспользоваться еще одним соотношением — так называемым уравнением притока энергии, которое следует из первого основного закона термодинамики.

Записать уравнение подаваемой энергии довольно нелегко; это обстоятельство усложняет полное решение задачи о движении сжимаемой жидкости до такой степени, что кажется целесообразным сначала исследовать особенности движения сжимаемой жидкости, не используя это уравнение. Мы пойдем примерно тем же путем, которым шел Гельмгольц, когда выводил законы вихрей.

Как известно, Гельмгольц получил свои уравнения и вытекающие из них фундаментальные теоремы о вихревых линиях, исключив из уравнений гидродинамики давление. Обобщая данную идею Гельмгольца, разделим все неизвестные, входящие в наши уравнения, на две группы. В первую группу включим компоненты скорости и их производные

Friedmann A. Über Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit // Z. Angew. Math. Mech., 1924, vol. 4, no. 2, pp. 102–107.
Перевод с немецкого под ред. Е. В. Ветчанина

различных порядков по времени и по координатам, во вторую — давление, плотность и их производные различных порядков по времени и по координатам; величины, попавшие в первую группу, мы будем называть *кинематическими элементами*, во вторую — *динамическими элементами*. Исключая из четырех уравнений гидродинамики динамические элементы, мы получим серию соотношений между кинематическими элементами, аналогичных уравнениям Гельмгольца. Мы можем рассматривать эти соотношения как условия динамической осуществимости движения сжимаемой жидкости, потому что из всех мыслимых с точки зрения кинематики движений они позволяют выделить как раз те, которые осуществимы с точки зрения динамики.

Практическое значение данных соотношений состоит в следующем. Очень часто свойства изучаемого движения таковы, что его можно представить в некоторой общей форме, содержащей ряд произвольных констант или функций. Чаще всего эти константы и произвольные функции удается определить, исходя из условий динамической осуществимости. Кроме того, дифференцирование условий динамической осуществимости всегда позволяет нам определить давление и плотность жидкости, осуществляющей данное осуществимое с точки зрения динамики движение.

1. Законы Гельмгольца

Прежде чем вкратце описать, как выводятся вышеупомянутые условные уравнения, рассмотрим необходимые и достаточные условия, эквивалентные выполнению обеих известных теорем Гельмгольца для векторных трубок в поле вектора $\mathfrak{A}$.

Как известно, первая теорема Гельмгольца состоит в том, что частицы жидкости, которые в произвольный момент времени лежат на вихревой линии, останутся на этой линии и в любой следующий момент времени. Вторая теорема утверждает, что интенсивность вихревой трубки не изменяется с течением времени. Необходимые и достаточные условия того, что обе теоремы Гельмгольца справедливы для векторных трубок или векторных линий в поле вектора $\mathfrak{A}$ со скоростью $\mathfrak{B}$, впервые установлены в работах Журавского [4] и Бьеркнеса [5]; они сводятся к выполнению следующего уравнения:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \tag{1.1}$$

где $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ обозначает векторное произведение векторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$; остальные символы мы предполагаем известными. Если каждой частице жидкости сопоставить вектор $\mathfrak{A}$, то уравнение (1.1) должно выполняться, когда для векторных линий, образованных из вектора $\mathfrak{A}$, справедливы обе теоремы, найденные Гельмгольцем при $\mathfrak{A} = \operatorname{rot} \mathfrak{B}$ (в случае несжимаемой жидкости).

С точки зрения кинематики обе теоремы Гельмгольца полностью независимы друг от друга; более того, динамически осуществимы такие движения сжимаемой жидкости, при которых одна теорема Гельмгольца верна, а другая — нет.

Левая часть уравнения (1.1) играет очень важную роль в вопросах кинематики векторных трубок, которые не подчиняются законам Гельмгольца, а также в вопросах, связанных с условиями динамической осуществимости движений сжимаемой жидкости. Мы будем обозначать левую часть уравнения (1.1) символом $\operatorname{helm} \mathfrak{A}$:

$$\operatorname{helm} \mathfrak{A} \equiv \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A}. \tag{1.2}$$

Очень легко убедиться, что у этого символа есть следующее свойство:

$$\operatorname{rot}\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \operatorname{helm}\operatorname{rot}\mathfrak{V}. \tag{1.3}$$

Как будет ясно из дальнейшего, с помощью этого свойства можно доказать обе теоремы Гельмгольца для несжимаемой жидкости.

Если обозначить через ω удельный объем (величину, обратную удельной массе, $\omega = 1/\rho$), а через $\mathfrak{F}$ — внешнюю силу, действующую на единицу массы жидкости, то мы можем переписать гидродинамические уравнения сжимаемой жидкости следующим образом (ср., например, с [6] или [7]):

$$\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = -\omega\operatorname{grad}p + \mathfrak{F}, \quad \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\ln\omega}{dt} = \operatorname{div}\mathfrak{V}. \tag{1.4}$$

Теперь рассмотрим $\mathfrak{F}$ как консервативную силу ($\operatorname{rot}\mathfrak{F} = 0$); если одновременно учитывать несжимаемость жидкости ($\omega = \text{const}$), то из уравнений (1.4) можно исключить p, находя вихрь (rot) от обеих частей первого уравнения. В итоге мы получим следующее уравнение:

$$\operatorname{rot}\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \operatorname{helm}\operatorname{rot}\mathfrak{V} = 0. \tag{1.5}$$

Тем самым обе теоремы Гельмгольца при $\omega = \text{const}$ можно считать доказанными.

2. Вывод первого условия

Теперь перейдем к рассмотрению динамической осуществимости движения сжимаемой жидкости. С этой целью введем векторы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$, задав их с помощью следующих равенств:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} - \frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \omega\operatorname{grad}p, \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{H} = -\operatorname{rot}\mathfrak{G} = [\operatorname{grad}p,\, \operatorname{grad}\omega]. \tag{2.2}$$

Первый из этих векторов, в соответствии с его хорошо известным метеорологическим смыслом, мы будем называть *динамическим градиентом*. Принимая во внимание роль второго вектора в образовании вихря, назовем его *вектором турбулентности*.

Разрешая первое из уравнений (1.4) относительно $\operatorname{grad}p$ и учитывая формулу (2.1), получаем

$$\operatorname{grad}p = \frac{\mathfrak{G}}{\omega}. \tag{2.3}$$

Исключая из уравнений (1.4) давление p и принимая во внимание (2.1) и (2.2), приходим к следующим уравнениям, служащим для определения $\varphi = \ln\omega$, без которого невозможно задать p, удовлетворяющее уравнениям (1.4):

$$[\mathfrak{G},\, \operatorname{grad}\varphi] = \mathfrak{H}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{div}\mathfrak{V}. \tag{2.4}$$

Если φ удовлетворяет системе (2.4), то и p можно найти из уравнения (2.3).

Уравнения (2.4) дают нам первое условие на кинематические элементы; это условие можно выразить в форме

$$(\mathfrak{G},\, \mathfrak{H}) = 0; \tag{a}$$

здесь символ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Равенство (a) означает, что *динамический градиент перпендикулярен своему вихрю*, следовательно, принадлежит к тем векторам, которые проф. Жуковский называет незакручивающимися[1]. Поэтому условие (a) можно назвать условием незакручиваемости.

3. Второе условное уравнение

Чтобы получить другие условия динамической осуществимости движения сжимаемой жидкости, введем в рассмотрение величину μ, задав ее с помощью равенства

$$\mu = (\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) = \omega(\mathfrak{B}, \operatorname{grad} p) = \omega\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right). \tag{3.1}$$

Эта величина соответствует мгновенной работе, которую выполняют силы давления при действительном перемещении. Если эта мгновенная работа не обращается в нуль, то соответствующие движения принято называть *нормальными*, а если $\mu = 0$, то движения, обладающие данным свойством, будут обозначаться как *полуконсервативные*. В дальнейшем мы будем рассматривать только нормальные движения; однако следует заметить, что изучение полуконсервативных движений не представляет никаких существенных сложностей.

Условие незакручиваемости позволяет утверждать, что в случае нормальных движений система уравнений (2.4) равносильна следующей:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{3.2}$$

где

$$\mathfrak{a} = \frac{[\mathfrak{H}, \mathfrak{B}] + \Theta\mathfrak{G}}{\mu}, \quad \mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{G}}{\mu}, \quad \Theta = \operatorname{div} \mathfrak{B}. \tag{3.3}$$

Чтобы из уравнений (2.4) получить (3.2), достаточно умножить векторно оба вышеупомянутых уравнения на $-\mathfrak{B}$ и, соответственно, на $\mathfrak{G}$, а затем сложить. Наоборот, чтобы из уравнения (3.2) получить первое уравнение в системе (2.4), надо (3.2) векторно умножить на $\mathfrak{G}$; наконец, чтобы получить второе уравнение (2.4), надо (3.2) скалярно умножить на $\mathfrak{B}$.

Мы будем называть вектор $\mathfrak{a}$ *турбомоментом*, а вектор $\mathfrak{b}$ — *редуцированным градиентом*.

Находя вихрь (rot) от обеих частей уравнения (3.2), получаем уравнение

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{d}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{3.4}$$

в котором векторы $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ определены из соотношений

$$\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{a} + \left[\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}, \mathfrak{b}\right], \quad \mathfrak{d} = \operatorname{rot} \mathfrak{b} + \left[\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t}, \mathfrak{b}\right]. \tag{3.5}$$

[1]Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений: Т. 2: Гидродинамика. Москва–Ленинград: ГИТТЛ, 1949. С. 78. — *Прим. ред.*

Выражая оба этих вектора через динамические элементы, находим

$$\mu^2\mathfrak{c} = -\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}\left[\operatorname{grad}\frac{dp}{dt}, \operatorname{grad}p\right], \quad \mu^2\mathfrak{d} = \omega^2\left[\operatorname{grad}\frac{dp}{dt}, \operatorname{grad}p\right]. \tag{3.6}$$

Тесная связь этих векторов с количеством тепла, переносимым единицей объема сжимаемой жидкости, дает нам право называть их *первым* и *вторым термическими векторами* соответственно.

Как показывает уравнение (3.4), термические векторы должны удовлетворять следующему соотношению:

$$[\mathfrak{c}, \mathfrak{d}] = 0. \tag{b}$$

Иначе говоря, *оба термических вектора должны быть параллельны друг другу.* Соотношение (b) — это еще один шаг на пути отыскания условий динамической осуществимости движения сжимаемой жидкости. Мы будем называть соотношение (b) *термическим условием.* И хотя термическое условие, очевидно, можно свести к двум скалярным уравнениям, на самом деле второе из этих уравнений следует из первого, а также из условия незакручиваемости; поэтому термические условия сводятся всего лишь к одному скалярному уравнению, которое можно записать следующим образом:

$$(\mathfrak{B}, [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}]) + \mu(\mathfrak{H}, \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{B}) - \left(\mathfrak{H}_1 + [\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{B}, \mathfrak{G}], \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial t} + \operatorname{grad}\mu\right) = 0, \tag{3.7}$$

где $\mathfrak{H}_1 = \operatorname{helm}\mathfrak{H}$.

4. Другие условия

Нормальные движения сжимаемой жидкости распадаются на два класса: 1) *нормальные движения общего вида*, когда $\mathfrak{d}$ отлично от нуля, и 2) *особые нормальные движения*, когда $\mathfrak{d} = 0$. Мы ограничимся изучением нормальных движений общего вида.

Введем скалярную величину λ и вектор $\mathfrak{s}$ с помощью следующих уравнений:

$$\mathfrak{c} + \lambda\mathfrak{d} = 0, \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{b}. \tag{4.2}$$

Учитывая ту роль, которую играют эти величины при определении удельных объемов, будем называть их *стереоскаляр* и *стереовектор* соответственно.

Уравнения (3.4) и (3.2) позволяют нам задать величину φ с помощью следующих соотношений:

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathfrak{s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \lambda. \tag{4.3}$$

Для того чтобы мы могли найти φ из уравнений (4.3), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{s} = 0, \quad \frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial t} = \operatorname{grad}\lambda. \tag{c}$$

В то же время данные условия можно понимать как условия динамической осуществимости движения; мы будем называть их *условиями объема.* Как показывает простая проверка, первое уравнение (c) следует из второго, так что условия объема дают нам всего лишь три скалярных уравнения.

Таким образом, условия динамической осуществимости сжимаемой жидкости состоят из 1) условия незакручиваемости (уравнение (a)), 2) термического условия (уравнение (b)) и 3) условий объема (уравнения (c)). В целом получаем 5 скалярных условий. Если эти условия выполняются, величину φ можно определить из уравнений (4.3) с точностью до аддитивной произвольной постоянной (это означает, что в равенстве $\omega = e^{\varphi}$ участвует, как множитель, еще одна произвольная постоянная, и давление p определяется из уравнения (2.3) с точностью до произвольной аддитивной функции времени).

Теперь из уравнений (4.3) и (2.3) легко увидеть, что ω и p задаются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 e^{\int (s_x\,dx + s_y\,dy + s_z\,dz + \lambda\,dt)}, \\ p &= \int \frac{G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz}{\omega} + p_0(t), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где ω_0 и $p_0(t)$ обозначают произвольную постоянную и произвольную функцию времени, а A_x, A_y, A_z — компоненты вектора $\mathfrak{A}$ относительно осей координат.

5. Пример горизонтального движения ветра

Чтобы продемонстрировать практическое применение вышеупомянутого метода, необходимо привести какой-нибудь пример. Будем предполагать, что движение жидкости задаются с помощью следующих уравнений кинематики:

$$\mu = 0, \quad v = v(t,\, z), \quad \omega = 0.$$

Эти уравнения соответствуют часто встречающемуся в метеорологической практике случаю горизонтального ветра, направление которого не меняется при изменении высоты, и небольшие отклонения возникают только в связи с изменением географических координат. Записывая вместе все необходимые для предполагаемого движения векторы, получаем

$$G_x = 0, \quad G_y = -\frac{\partial v}{\partial t}, \quad G_z = -g, \quad \mathfrak{H}_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}, \quad \mathfrak{H}_y = 0, \quad \mathfrak{H}_z = 0,$$

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}}{\dfrac{\partial v}{\partial t}}, \quad b_x = 0, \quad b_y = -\frac{1}{v}, \quad b_z = -\frac{g}{v\dfrac{\partial v}{\partial t}},$$

$$\mu = -v\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \mu^2 c_x = v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\,\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}\right), \quad \mu^2 c_y = 0, \quad \mu^2 c_z = 0,$$

$$\mu^2 d_x = g\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2, \quad \mu^2 d_y = 0, \quad \mu^2 d_z = 0,$$

где ось z направлена вертикально вверх, а g обозначает ускорение силы тяжести.

Из записанных выше уравнений нетрудно увидеть, что условие незакручиваемости и термическое условие выполняются сами по себе. Условия объема приводят нас к следующему уравнению третьего порядка, которому должна удовлетворять функция $v(t, z)$:

$$g\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{g}{2\beta}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^3}{\partial z\,\partial t^2}\right) = \frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2, \tag{5.1}$$

где β — произвольная постоянная.

Стереоскаляр и стереовектор определяются по формулам

$$s_x = 0, \quad s_y = \frac{2c}{g}, \quad s_z = \frac{2\beta + \dfrac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}}{\dfrac{\partial v}{\partial t}}, \quad \lambda = -\frac{2\beta}{g}v. \tag{5.2}$$

Отсюда следует, что в случае, когда v удовлетворяет уравнению (5.1), давление и удельный объем можно легко выразить в квадратурах из уравнений (5.2) и (4.4).

У уравнения (5.1) имеется несколько особых решений; например, одно из них соответствует случаю, когда ветер определенной силы, дувший на известной высоте, так сказать, постепенно спадает. В этом случае функция v зависит от $z + nt$ (где n — константа) и задачу можно решить с помощью цилиндрических функций с дробным индексом. Функцию v можно записать по формуле

$$v = -\frac{g}{2\beta}F(t + z).$$

Тогда, в силу уравнения (5.1), функция $F(x)$ определяется следующим образом:

$$F(x) = -\frac{2\beta^2}{g}\frac{1}{\beta_1 + \dfrac{2\beta^2}{g}x} - 2\sqrt{\beta_1^2 + \frac{2\beta^2}{g}x}\,\frac{Z'_{1/3}\left(\dfrac{g}{3\beta^2}\left(\beta_1 + \dfrac{2\beta^2}{g}x\right)^{3/2}\right)}{Z_{1/3}\left(\dfrac{g}{3\beta^2}\left(\beta_1 + \dfrac{2\beta^2}{g}x\right)^{3/2}\right)} - \alpha,$$

где α, β и β_1 обозначают известные константы, тогда как Z_n представляет собой общее решение уравнения Бесселя с индексом n (см., например, [8]).

Из формул (4.4) следует, что давление и удельный объем выражаются через функцию F с помощью указанных ниже соотношений:

$$\omega = \omega_0 e^{\frac{2c}{g}y + \int\limits_0^{t+z} F(\tau)d\tau + \alpha z},$$

$$p = -\frac{g^2}{4\beta^2}\frac{F'(t + z)}{\omega} + p_0(t),$$

где ω_0 и α — константы, а $p_0(t)$ — произвольная функция времени[2].

Небольшой объем статьи не позволяет нам рассмотреть еще один случай движения сжимаемой жидкости; однако все такие случаи можно изучать с помощью рассмотренного выше метода.

Петербург, ноябрь 1922 года

[2]Вышеупомянутому движению посвящена моя статья, опубликованная в «Comptes Rendus», Paris, 1916, том 163, с. 219.

Список литературы

[1] Bjerknes V. Meteorol. Ztschr., 1900, vol. 17, pp. 97, 145; 1902, vol. 19, p. 97.

[2] Silberstein L. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1896, p. 280.

[3] Bjerknes V. Dynamische Meteorologie und Hydrographie, vol. II, p. 90.

[4] Żórawski K. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1900, p. 335.

[5] Bjerknes V., l. c.

[6] Mises B. R. v. Technische Hydromechanik, I, Leipzig, 1914, § 2, § 3.

[7] Lamb H. Hydrodynamik, Leipzig, 1907, § 6, § 7.

[8] Jahnke E., Emde F. Funktionentafeln, p. 167.

Über Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit

A. Friedmann

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 613–620 (Russian)