



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36

MSC 2010: 70H05, 70H14, 70H15, 70K45

**О взаимодействии резонансов третьего
и четвертого порядков в гамильтоновой системе
с двумя степенями свободы**

О. В. Холостова

Рассматриваются движения периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в системе реализуются одновременно слабый комбинационный резонанс третьего и сильный резонанс четвертого порядков. Исследуется характер движений приближенной (модельной) системы в зоне устойчивости резонанса четвертого порядка. Выявлены области значений параметров (коэффициентов нормализованного гамильтониана), для которых все движения системы, начинающиеся в достаточно малой окрестности положения равновесия, ограничены, получена оценка области ограниченности. Описано возмущающее влияние двойного резонанса на движения системы в пределах области ограниченности.

Ключевые слова: гамильтонова система, каноническое преобразование, метод нормальных форм, двойной резонанс, устойчивость

Получено 18 августа 2015 года
После доработки 08 октября 2015 года

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Холостова Ольга Владимировна
kholostova_o@mail.ru
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
125993, Россия, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4



1. Введение

Характер колебаний системы в окрестности положения равновесия при наличии линейного соотношения между ее собственными частотами впервые исследован в статьях [1–3]. К настоящему времени работы, изучающие устойчивость частных решений (положений равновесия и периодических решений) механической системы и характер поведения системы в их окрестности при наличии резонансов, составляют обширную библиографию. При этом случаи, когда в системе реализуется только один резонанс, исследованы весьма полно. Подробное изложение результатов и литература по данной тематике содержатся в работах [4–6] по гамильтоновым и в обзоре [5] по негамильтоновым системам. Нелинейные колебания периодических по времени гамильтоновых систем с одной степенью свободы при резонансах и в случаях, близких к резонансным, в том числе в случае вырождения гамильтониана, подробно описаны в работе [7].

Существенно более сложной является проблема взаимодействия в механических системах двух или нескольких резонансов, здесь остается много нерешенных вопросов.

Устойчивость положения равновесия автономной негамильтоновой системы при наличии нескольких резонансов одного порядка рассмотрена в работах [8–11]. Взаимное влияние нескольких резонансов третьего порядка на устойчивость положения равновесия многомерной автономной гамильтоновой системы исследовано в работах [12, 13].

В статьях [14, 15] и монографии [16] рассмотрен вопрос об устойчивости тривиального равновесия периодической по времени линейной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях двойного параметрического резонанса, построены области устойчивости и неустойчивости. Полученные результаты применены при решении ряда задач динамики спутников [16].

В работе [17] исследовано влияние двойного резонанса третьего порядка на устойчивость положения равновесия периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Показана неустойчивость положения равновесия для любых вариантов взаимодействия резонансов, в том числе для случая двух слабых резонансов третьего порядка, проведено подробное исследование нелинейных колебаний соответствующих модельных систем.

В данной работе для периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы исследуется случай взаимодействия слабого комбинационного резонанса третьего порядка и сильного (основного) резонанса четвертого порядка, в зоне устойчивости последнего. Показано, что существуют области параметров (коэффициентов нормализованного гамильтониана), в которых все движения приближенной (модельной) системы ограничены, получена оценка области ограниченности движений. Этот результат является обобщением проведенного ранее исследования задачи о треугольных точках либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел в случае рассматриваемого кратного резонанса [18]. В работе также выявлено, что взаимодействие двух резонансов, каждый из которых не приводит к неустойчивости, оказывает возмущающее воздействие на движения модельной системы в пределах области ограниченности.

2. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана

Рассмотрим движения неавтономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Пусть начало координат фазового пространства — положение равновесия системы, устойчивое в линейном приближении. Характеристические

показатели $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) соответствующей линеаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые.

Будем считать, что величины λ_j , $2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами, тогда квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения может быть приведена к нормальной форме и гамильтониан H системы запишется в виде

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2} \lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \sigma \lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_j, p_j, t) + H_4(q_j, p_j, t) + O_5. \quad (2.1)$$

Здесь q_j и p_j ($j = 1, 2$) — обобщенные координаты и импульсы, коэффициент σ может принимать значения 1 или -1 , величины λ_j считаем положительными. Слагаемые $H_k(q_j, p_j, t)$ ($k = 3, 4$) обозначают совокупность членов k -й степени, а O_5 — совокупность членов не менее пятой степени относительно возмущений с 2π -периодическими по t коэффициентами.

Если величины λ_1 и λ_2 связаны соотношением

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = \ell, \quad (2.2)$$

где m_1, m_2, ℓ — целые числа и $|m_1| + |m_2| = k$, то в системе реализуется резонанс порядка k . Введенные ограничения на величины λ_j означают, что в системе нет резонансов первого и второго порядков.

По аналогии с определениями, принятыми при исследовании параметрического резонанса в линейных системах [19], будем называть резонанс основным, если в резонансном соотношении (2.2) присутствует только одна из величин λ_j , и комбинационным, если в (2.2) имеются обе величины λ_1 и λ_2 . Основной или комбинационный резонанс назовем сильным, если его присутствие может привести к неустойчивости в системе; комбинационный резонанс назовем слабым, если его наличие не приводит к неустойчивости [5].

Пусть пара λ_1, λ_2 определяется одним из следующих наборов соотношений:

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{n}{8}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{n+2}{4}, \quad (2.3)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{n}{8}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{n}{4}, \quad (2.4)$$

где k_1, k_2 — целые числа, а $n = 1, 3, 5, 7$.

В случае (2.3) величины $2\lambda_1 + \lambda_2$ и $4\lambda_2$ являются целыми, а в случае (2.4) — величины $2\lambda_1 - \lambda_2$ и $4\lambda_2$. Таким образом, в системе имеются одновременно комбинационный (сильный или слабый) резонанс третьего порядка и основной (сильный) резонанс четвертого порядка.

Осуществим в системе ряд канонических замен переменных, приводящих гамильтониан (2.1) к виду, главная (модельная) часть которого характерна для рассматриваемых резонансов. Сначала при помощи близкой к тождественной 2π -периодической по времени канонической замены переменных $q_j, p_j \rightarrow \tilde{q}_j, \tilde{p}_j$ ($j = 1, 2$) уничтожим в членах третьей и четвертой степеней слагаемые с нерезонансными гармониками. В «полярных» координатах $\tilde{\varphi}_j, r_j$, определяемых формулами $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \tilde{\varphi}_j, p_j = \sqrt{2r_j} \cos \tilde{\varphi}_j$ ($j = 1, 2$), преобразованный гамильтониан в случае (2.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + \alpha r_1 r_2^{1/2} \cos[2\tilde{\varphi}_1 + \sigma \tilde{\varphi}_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2)t + 2\varphi_1^* + \sigma \varphi_2^*] + \\ & + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \beta r_2^2 \cos(4\tilde{\varphi}_2 - 4\lambda_2 t + 4\varphi_2^*) + O_{5/2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\alpha, \beta, c_{ij}, \varphi_j^*$ — постоянные величин, а $O_{5/2}$ — совокупность слагаемых пятой и более высокой степеней относительно $r_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$).



Осуществим далее унивалентное каноническое преобразование $\tilde{\varphi}_j, r_j \rightarrow \Phi_j, R_j$ ($j = 1, 2$), задаваемое производящей функцией

$$S = (\varphi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t)R_1 + (\varphi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t)R_2 \quad (2.6)$$

и определяемое формулами

$$R_1 = r_1, \quad R_2 = r_2, \quad \Phi_1 = \varphi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \Phi_2 = \varphi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t. \quad (2.7)$$

В преобразованном гамильтониане пропадет линейная по R_j часть, а в резонансных гармониках в слагаемых третьей и четвертой степеней уничтожится время:

$$H^* = \alpha R_1 R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \sigma \Phi_2) + c_{20} R_1^2 + c_{11} R_1 R_2 + (c_{02} + \beta \cos 4\Phi_1) R_2^2 + O_{5/2}. \quad (2.8)$$

Здесь $O_{5/2}$ — совокупность слагаемых, период которых по времени равен 16π .

Резонансные коэффициенты α и β в гамильтониане (2.8) считаем положительными, чего всегда можно добиться сдвигом по Φ_j . Коэффициент c_{20} также считаем положительным; если это не так, то делаем каноническое преобразование (с валентностью -1), меняя Φ_j на $-\Phi_j$. Величины c_{11} и c_{02} могут принимать произвольные значения.

В случае (2.4), аналогично, уничтожим в членах третьей и четвертой степеней гамильтониана (2.1) слагаемые с нерезонансными гармониками и приведем его к виду (2.5), в котором изменен на противоположный знак перед λ_2 в первой резонансной гармонике. Делая затем замену переменных (2.7), получим гамильтониан вида (2.8), в котором надо поменять σ на $-\sigma$.

Осуществим в найденных гамильтонианах еще одну каноническую замену переменных $\Phi_j, R_j \rightarrow \varphi_j, \varrho_j$ ($j = 1, 2$) и введем новое «время» τ по формулам

$$\Phi_j = \varphi_j, \quad R_j = k \varrho_j \quad (k = (\alpha/c_{20})^2), \quad \tau = (\alpha^2/c_{20})t.$$

Придавая величине σ значения, равные 1 и -1 , получим два гамильтониана, характерных для рассматриваемых резонансных случаев (2.3) и (2.4):

$$\Gamma_1 = \varrho_1 \varrho_2^{1/2} \cos(2\varphi_1 + \varphi_2) + \varrho_1^2 + \gamma_{11} \varrho_1 \varrho_2 + (\gamma_{02} + \xi \cos 4\varphi_1) \varrho_2^2 + O_{5/2}, \quad (2.9)$$

$$\Gamma_2 = \varrho_1 \varrho_2^{1/2} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \varrho_1^2 + \gamma_{11} \varrho_1 \varrho_2 + (\gamma_{02} + \xi \cos 4\varphi_1) \varrho_2^2 + O_{5/2}. \quad (2.10)$$

Здесь константы $\gamma_{11} = c_{11}/c_{20}$ и $\gamma_{02} = c_{02}/c_{20}$ произвольны, а $\xi = \beta/c_{20} > 0$.

Резонанс третьего порядка в системе с гамильтонианом (2.9) сильный, и тривиальное положение равновесия неустойчиво независимо от членов более высоких порядков. Эту систему далее не рассматриваем.

В системе с гамильтонианом (2.10) резонанс третьего порядка слабый, так как при отсутствии резонанса четвертого порядка в ней имеется положительно определенный формальный интеграл. Резонанс четвертого порядка в этой системе сильный: при условии $|\gamma_{02}| < \xi$ тривиальное положение равновесия неустойчиво как при отсутствии резонанса третьего порядка [4], так и при его наличии. В последнем случае система имеет частное решение $\varrho_1 \equiv 0$, а изменение второй пары переменных соответствует неавтономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы при резонансе четвертого порядка в области неустойчивости ее тривиального решения (см., например, [7]).

Пусть выполняется неравенство

$$|\gamma_{02}| > \xi. \quad (2.11)$$



Тогда, при отсутствии резонанса третьего порядка, исследуемое равновесие устойчиво при учете в гамильтониане членов не выше второго порядка относительно ϱ_j ($j = 1, 2$) [4].

Далее будем считать, что параметры задачи удовлетворяют условию (2.11). Отбрасывая в формуле (2.10) последнее слагаемое, получим приближенный (модельный) гамильтониан. Отвечающую ему систему также будем называть модельной. Цель работы — исследование взаимного влияния слабого резонанса третьего порядка и сильного резонанса четвертого порядка, в зоне его устойчивости, на движения модельной системы в окрестности положения равновесия $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$.

3. Исследование модельного гамильтониана

Система с гамильтонианом (2.10) (без последнего слагаемого) автономна и имеет первый интеграл — интеграл энергии. Будем исследовать движения системы на фиксированных уровнях энергии $h = \text{const}$. Перепишем интеграл энергии, рассматривая его как квадратное уравнение относительно величины ϱ_1 , в виде

$$F(\varrho_1) = \varrho_1^2 + (\gamma_{11}\sqrt{\varrho_2} + \cos\psi_1)\sqrt{\varrho_2}\varrho_1 + (m(\psi_2)\varrho_2^2 - h) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь введены обозначения $\psi_1 = 2\varphi_1 - \varphi_2$, $\psi_2 = 4\varphi_2$, $m(\psi_2) = \gamma_{02} + \xi \cos\psi_2$. В силу условия (2.11) величина $m(\psi_2)$ сохраняет на движениях системы постоянный знак, обозначим через $m_{\pm} = \gamma_{02} \pm \xi$ ее граничные значения.

Дискриминант уравнения (3.1) равен

$$f(u) = (\gamma_{11}^2 - 4m(\psi_2))u^4 + 2\gamma_{11}\cos\psi_1 u^3 + \cos^2\psi_1 u^2 + 4h \quad (u = \varrho_2^{1/2} > 0). \quad (3.2)$$

В свою очередь, производная функции $f(u)$ определяется выражением

$$f'(u) = 2u[2(\gamma_{11}^2 - 4m(\psi_2))u^2 + 3\gamma_{11}\cos\psi_1 u + \cos^2\psi_1],$$

а дискриминант стоящего в скобках квадратного относительно u трехчлена равен $\cos^2\psi_1(\gamma_{11}^2 + 32m(\psi_2))$. При выполнении неравенства $m(\psi_2) < -\gamma_{11}^2/32$ функция $f(u)$ имеет одну точку экстремума в начале координат (точку минимума), в противном случае — три точки экстремума: $u = 0$ и

$$u^{\pm} = \frac{-3\gamma_{11} \pm \sqrt{\gamma_{11}^2 + 32m(\psi_2)}}{4(\gamma_{11}^2 - 4m(\psi_2))} \cos\psi_1. \quad (3.3)$$

При этом на положительной полуоси $u > 0$ функция $f(u)$ может иметь одну или две точки экстремума и от нуля до трех корней. Подробный алгебраический анализ этой функции был проведен во всем допустимом диапазоне изменения параметров задачи и константы энергии.

Для существования движений модельной системы при заданном значении константы h необходимо, чтобы уравнение (3.1) имело положительные вещественные корни. Для этого достаточно потребовать, чтобы либо удовлетворялась система неравенств

$$m(\psi_2)u^4 - h > 0, \quad \gamma_{11}u + \cos\psi_1 < 0, \quad f(u) > 0, \quad (3.4)$$

либо было выполнено условие

$$m(\psi_2)u^4 - h < 0. \quad (3.5)$$

В случае (3.4) уравнение (3.1) имеет два вещественных положительных корня (две ветви решения)

$$\varrho_1^\pm = \frac{1}{2} [-(\gamma_{11} \sqrt{\varrho_2} + \cos \psi_1) \sqrt{\varrho_2} \pm \sqrt{f(\varrho_2^{1/2})}]. \quad (3.6)$$

В случае (3.5) уравнение имеет единственный положительный корень (одну ветвь решений), описываемый соотношением (3.6), в котором выбран верхний знак.

В остальных случаях движения модельной системы невозможны.

Не вдаваясь в детали, перечислим возможные варианты решения неравенств (3.4) и (3.5). Анализ показал, что для всех допустимых значений параметров задачи решение системы (3.4) сводится к рассмотрению первого и третьего неравенств. В области, задаваемой условием $hm(\psi_2) > 0$, введем обозначение

$$\tilde{u} = \left(\frac{h}{m(\psi_2)} \right)^{1/4} \quad (3.7)$$

для корня левой части в первом неравенстве (3.4). Отметим, что точка $u = \tilde{u}$ лежит в области неотрицательных значений функции $f(u)$, так как $f(\tilde{u}) = \tilde{u}^2(\gamma_{11}\tilde{u} + \cos \psi_1)^2 \geq 0$.

3.1. Случаи одной ветви решений. Из неравенства (3.5) сразу следует, что при $m(\psi_2) > 0$ случай одной ветви реализуется, если $h > 0$, а величина u удовлетворяет условию

$$u < \tilde{u}. \quad (3.8)$$

Если же $m(\psi_2) < 0$, то неравенство (3.5) удовлетворяется при $h \geq 0$ и любых положительных u , а также при $h < 0$ и условии $u > \tilde{u}$.

3.2. Случаи двух ветвей решений. При $m(\psi_2) < 0$ случаи двух ветвей решений возможны только при отрицательных значениях h . Если $\gamma_{11} < 0$, то h может принимать любые отрицательные значения. Если же $\gamma_{11} > 0$, то диапазон h ограничен интервалом $h_1 < h < 0$ в области $m_- < -\gamma_{11}^2/32$ и интервалом $\min(h_1, h'_1) < h < 0$ в области $-\gamma_{11}^2/32 < m_- < 0$, где

$$h_1 = \frac{m_-}{\gamma_{11}^4}, \quad h'_1 = -\frac{1}{4}g_*, \quad g_* = \frac{\gamma_{11}^4 - 80\gamma_{11}^2 m_- - 128m_-^2 + \gamma_{11}(\gamma_{11}^2 + 32m_-)^{3/2}}{32(\gamma_{11}^2 - 4m_-)^3}. \quad (3.9)$$

Величина g_* здесь и в рассматриваемых далее случаях положительна.

Для этих значений h функция $f(u)$ имеет один или три положительных вещественных корня, а решение системы (3.4) задается одним или двумя интервалами, лежащими внутри интервала (3.8).

При $m(\psi_2) > 0$ в области, задаваемой условиями $\gamma_{11} < 0$, $m_+ < \gamma_{11}^2/4$, константа энергии может принимать любые вещественные значения. Диапазон возможных значений величины u неограничен и, в зависимости от h , задается либо интервалом $u > \tilde{u}$, либо содержит точки, лежащие правее наибольшего из вещественных положительных корней многочлена $f(u)$.

В областях

$$\gamma_{11} < 0, \quad m_+ > \gamma_{11}^2/4, \quad (3.10)$$

$$\gamma_{11} > 0, \quad m(\psi_2) > 0 \quad (3.11)$$

множества допустимых значений h задаются неравенствами $h \geq h'_1$ и $h'_1 \leq h \leq h_2$ соответственно, где граница h'_1 ($h'_1 < 0$) определена в (3.9), а $h_2 = m_+/\gamma_{11}^4 > 0$. Графики



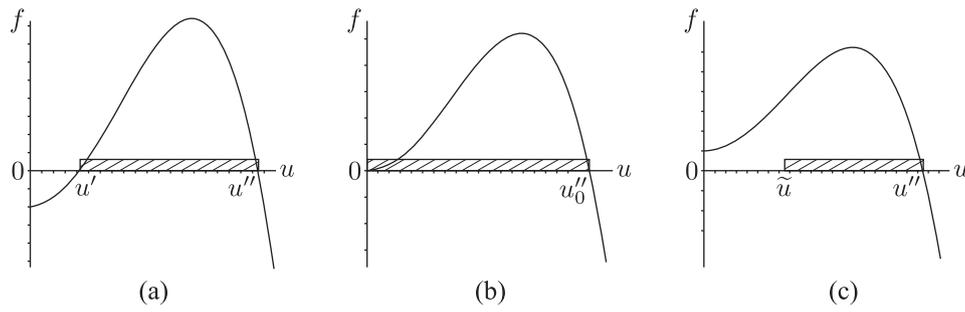


Рис. 1

функции $f(u)$ для точек из области (3.10) и симметричной ей (при замене γ_{11} на $-\gamma_{11}$) части из области (3.11) показаны на рисунках 1а–с для случаев отрицательных, нулевого и положительных значений h соответственно. Штриховкой показаны интервалы оси Ou , точки которых удовлетворяют системе (3.4). Для оставшейся части области (3.11) графики функции $f(u)$ и интервалы решений системы (3.4) совпадают при $u < u''$ с изображенными на рисунке 1, а при $u > u''$, где эти графики могут различаться, дополнительных решений нет.

Укажем, что в точке максимума на рисунке 1 имеем $u = u^+$ и

$$f(u^+) = 4h + g(m(\psi_2)) \cos^4 \psi_1, \tag{3.12}$$

$$g(m(\psi_2)) = \frac{\gamma_{11}^4 - 80\gamma_{11}^2 m(\psi_2) - 128m^2(\psi_2) + \gamma_{11}(\gamma_{11}^2 + 32m(\psi_2))^{3/2}}{32(\gamma_{11}^2 - 4m(\psi_2))^3}.$$

В рассматриваемой области $g(m)$ — монотонно убывающая функция m , ее наибольшее значение достигается в точке $m = m_-$ и равно g_* (см. формулу (3.9)).

Из результатов разделов 3.1 и 3.2 следует, что для значений параметров гамильтониана вне областей (3.10), (3.11) существуют интервалы изменения h и диапазоны начальных условий, для которых величина u может либо оставаться в ограниченном диапазоне, либо (при фиксированном h) принимать сколь угодно большие значения. В то же время для точек областей (3.10), (3.11) величина u всегда ограничена (вместе с h). Тогда, в силу соотношения (3.6), ограниченными оказываются и допустимые значения величины r_2 , а значит, и соответствующие движения модельной системы.

3.3. Область ограниченности движений для областей (3.10), (3.11). На нулевом уровне энергии имеем (см. рис. 1b) $0 < u < u_0''$, где

$$u_0'' = \frac{-\cos \psi_1}{\gamma_{11}^2 + 2\sqrt{m(\psi_2)}} \leq \frac{1}{\gamma_{11} + 2\sqrt{m_-}} = u_*'' \tag{3.13}$$

и, следовательно,

$$\varrho_2 \leq (u_*'')^2. \tag{3.14}$$

В рассматриваемом диапазоне величины u функция $f(u)$ меняется в интервале $0 \leq f(u) \leq f(u^+)|_{h=0} \leq g_*$. Отсюда, анализируя соотношения (3.6), найдем, что в случае (3.10) для двух ветвей функции ϱ_1 можно дать оценки вида

$$\varrho_1^+ \leq \frac{1}{2}(u_*''(1 - \gamma_{11}u_*'') + \sqrt{g_*}), \quad \varrho_1^- \leq \frac{1}{2}u_*''(1 - \gamma_{11}u_*''), \tag{3.15}$$



а в случае (3.11) справедливы неравенства

$$\varrho_1^+ \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\gamma_{11}} + \sqrt{g_*} \right), \quad \varrho_1^- \leq \frac{1}{8\gamma_{11}}. \quad (3.16)$$

Для движений, соответствующих *отрицательным уровням энергии*, величина u меняется в интервале $u' < u < u''$ (рис. 1а). Так как, очевидно, справедливо соотношение $u'' < u''_0$, на рассматриваемых движениях величина ϱ_2 удовлетворяет неравенству (3.14). При этом величина ϱ_1^- для значений параметров из областей (3.10) и (3.11) может быть оценена вторыми соотношениями в формулах (3.15) и (3.16) соответственно, величина ϱ_1^+ — соотношениями

$$\varrho_1^+ \leq \frac{1}{2} (u''_*(1 - \gamma_{11}u''_*) + \sqrt{g_* + 4h}), \quad \varrho_1^+ \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\gamma_{11}} + \sqrt{g_* + 4h} \right). \quad (3.17)$$

Из выписанных оценок следует, что все движения модельной системы на неположительных уровнях энергии происходят в области, оцениваемой неравенствами (3.14) и (3.15) (или (3.16)).

Рассмотрим *положительные уровни энергии*. В исследуемых областях в случае двух ветвей имеем $\tilde{u} < u < u''$ (см. рис. 1с). Для оценки правой границы u'' заметим, что корень $u = u''$ многочлена $f(u)$, рассматриваемый как функция величин $m(\psi_2)$ и $\cos \psi_1$, монотонно убывает с ростом этих величин. Поэтому при фиксированном значении h справедливо неравенство $u'' \leq u''_{**}(h)$, где $u''_{**}(h)$ — меньший (или единственный) вещественный положительный корень уравнения

$$(\gamma_{11}^2 - 4m_-)u^4 - 2\gamma_{11}u^3 + u^2 + 4h = 0. \quad (3.18)$$

При этом для малых положительных значений константы h имеем

$$u''_{**}(h) = u''_* + \frac{h}{\sqrt{m_-}} (\gamma_{11} + 2\sqrt{m_-})^2 + O(h^2).$$

В случае одной ветви решений должно быть выполнено условие (3.8), поэтому

$$u < \tilde{u}_{max} = \left(\frac{h}{m_-} \right)^{1/4}. \quad (3.19)$$

Если ограничить положительные значения h интервалом $0 < h \leq h_2$, то $\tilde{u}_{max} < u''_{**}(h)$ и на рассматриваемых движениях имеем для величины ϱ_2 оценку

$$\varrho_2 < (u''_{**}(h))^2. \quad (3.20)$$

Далее, в области (3.10) и симметричной ей части области (3.11) для функции $f(u)$ имеем

$$f(u) \leq g'_{max}. \quad (3.21)$$

Величина g'_{max} (верхний предел для значений функции $f(u)$ в точке максимума) получается из введенной в (3.9) величины g_* путем замены γ_{11} на $|\gamma_{11}|$ в последнем слагаемом числителя. На нижних ветвях решений для ϱ_1 при $\gamma_{11} < 0$ и $\gamma_{11} > 0$ справедливы вторые соотношения (3.15) и (3.16) соответственно, а на верхних ветвях решений — соотношения (3.17), в которых сделана замена g_* на g'_{max} .



Рассмотрим оставшуюся часть области (3.10). Если функция $f(u)$ имеет два вещественных положительных корня (в случаях двух ветвей и части случаев одной ветви решений), то на рассматриваемых движениях она также может быть ограничена величиной g'_{\max} . При отсутствии корней на положительной полуоси (в другой части случаев одной ветви решений) следует считать наибольшее значение выражения $f(\tilde{u})$ в точке $u = \tilde{u}$, равное $\tilde{g} = \tilde{u}_{\max}^2(\gamma_{11}\tilde{u}_{\max} + 1)^2$. Взаимное расположение величин g'_{\max} и \tilde{g} зависит от параметров задачи и выбранного значения константы h . Так, при малых положительных h имеем $g'_{\max} > \tilde{g}$, в то время как для наибольшего рассматриваемого значения $h = h_2$ выполняется неравенство с противоположным знаком.

Таким образом, в рассматриваемой области имеем оценку

$$f(u) \leq g''_{\max} = \max(g'_{\max}, \tilde{g}), \tag{3.22}$$

а область ограниченности величины ϱ_1 для нижних и верхних ветвей описывается вторыми соотношениями (3.16) и (3.17), причем в последнем из них сделана замена g_* на g''_{\max} .

Из полученных оценок следует, что область движений модельной системы, оставаясь конечной, может составлять достаточно малую окрестность точки $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, этого можно добиться соответствующим подбором параметров.

4. Область ограниченности движений в задаче о треугольных точках либрации в случае двойного резонанса

Рассмотрим исследуемый случай двойного резонанса в задаче об устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. Пусть m_1 и m_2 — массы основных притягивающих тел ($m_1 > m_2$), e — эксцентриситет их эллиптических орбит. Положение пассивно гравитирующей точки зададим при помощи переменных Нехвила ξ, η , сопряженные с ними импульсы обозначим через p_ξ, p_η . Треугольной точке либрации отвечает частное решение

$$\xi_0 = \frac{1 - 2\mu}{2}, \quad \eta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{\xi_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{\eta_0} = \frac{1 - 2\mu}{2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

соответствующей канонической системы уравнений.

В допустимой части плоскости (e, μ) параметров задачи имеется точка $e_0 = 0.1218928$, $\mu_0 = 0.03871614$ пересечения кривой $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2$ слабого резонанса третьего порядка и кривой $4\lambda_1 = 3$ резонанса четвертого порядка; для всех точек последней имеет место устойчивость в четвертом приближении [4].

При указанных значениях параметров нормализованный до членов четвертой степени гамильтониан возмущенного движения имеет вид, аналогичный (2.5) (за независимую переменную принята истинная аномалия ν) [18]:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= 3/4 r_1 - 5/8 r_2 + \alpha\sqrt{r_1}r_2 \cos[(\varphi_1 - 2\varphi_2) - 2\nu + (\varphi_1^* - 2\varphi_2^*)] + \\ &+ c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \beta r_1^2 \cos(4\varphi_1 - 3\nu + 4\varphi_1^*) + O_{5/2}, \\ c_{20} &= 33.163288, \quad c_{11} = 177.906428, \quad c_{02} = 45.864546, \\ \alpha &= 1.865459, \quad \beta = 9.432877, \quad \varphi_1^* = -0.340400, \quad \varphi_2^* = -0.449319. \end{aligned} \tag{4.1}$$



После проведения преобразований, описанных в разделе 2, гамильтониан принимает характерный вид (2.10), в котором индексы 1 и 2 у величин ρ_j и φ_j следует поменять местами и принять

$$\gamma_{11} = 3.878953, \quad \gamma_{02} = 0.723070, \quad \xi = 0.205668. \quad (4.2)$$

Параметры (4.2) лежат в области (3.11), откуда следует, что все движения модельной системы ограничены.

Рассмотрим приближенную систему с гамильтонианом (4.1) (с отброшенным последним слагаемым). Интервалы возможных значений соответствующей константы энергии h в случае двух ветвей решений имеют вид

$$-0.115991 \cdot 10^{-6} \leq h \leq 0.514929 \cdot 10^{-6}.$$

Случай одной ветви (реализуемый при любых $h > 0$) ограничим тем же интервалом положительных значений.

Воспользовавшись результатами раздела 3 (см. также [18]), найдем, что на отрицательных и нулевом уровнях энергии величины r_1 и r_2 меняются в пределах интервалов

$$r_1 \leq 0.585048 \cdot 10^{-4}, \quad r_2 \leq 0.103599 \cdot 10^{-3}. \quad (4.3)$$

На положительных уровнях энергии имеем оценки

$$r_1 \leq 0.147306 \cdot 10^{-3}, \quad r_2 \leq 0.585833 \cdot 10^{-3}. \quad (4.4)$$

Таким образом, область движений приближенной системы в окрестности исследуемого решения оказывается весьма малой.

5. О характере движений модельной системы внутри области ограниченности

Для выявления характера движений модельной системы в пределах области ограниченности было проведено численное интегрирование дифференциальных уравнений движения.

Рисунок 2 иллюстрирует типичное поведение функции $\rho_2 = \rho_2(t)$ при фиксированном значении параметров γ_{11} и γ_{02} и различных значениях резонансного коэффициента ξ . Принято, что $\gamma_{11} = 4$, $\gamma_{02} = 2$, а $\xi = 0$ (рис. 2а), $\xi = 0.4$ (рис. 2б), $\xi = 0.8$ (рис. 2с), $\xi = 1.2$ (рис. 2д), $\xi = 1.5$ (рис. 2е), $\xi = 1.9$ (рис. 2ф). Исследуемые движения соответствуют верхней ветви нулевого уровня энергии и исходят из одной и той же начальной точки $(\phi_1(0), \phi_2(0), \rho_2(0))$. Горизонтальные прямые на рисунке 2 отвечают максимальным значениям величины ρ_2 , определенным в (3.14).

При отсутствии резонанса четвертого порядка (рис. 2а) движения модельной системы в окрестности (устойчивого) тривиального равновесия периодические, «плавные». При появлении второго резонанса (случай $\xi > 0$) свойство периодичности утрачивается, возникают «всплески» (рис. 2б), сначала небольшие, их амплитуда растет с ростом ξ . При $\xi = 0.8$ (рис. 2с) «всплески» становятся весьма выраженными («пики»), они достаточно близко подходят к верхней границе возможных значений ρ_2 . С последующим ростом ξ характер движения уже существенно не меняется (рис. 2д–ф). Совершенно аналогично поведение функции $\rho_1 = \rho_1^+(t)$ на этих движениях.

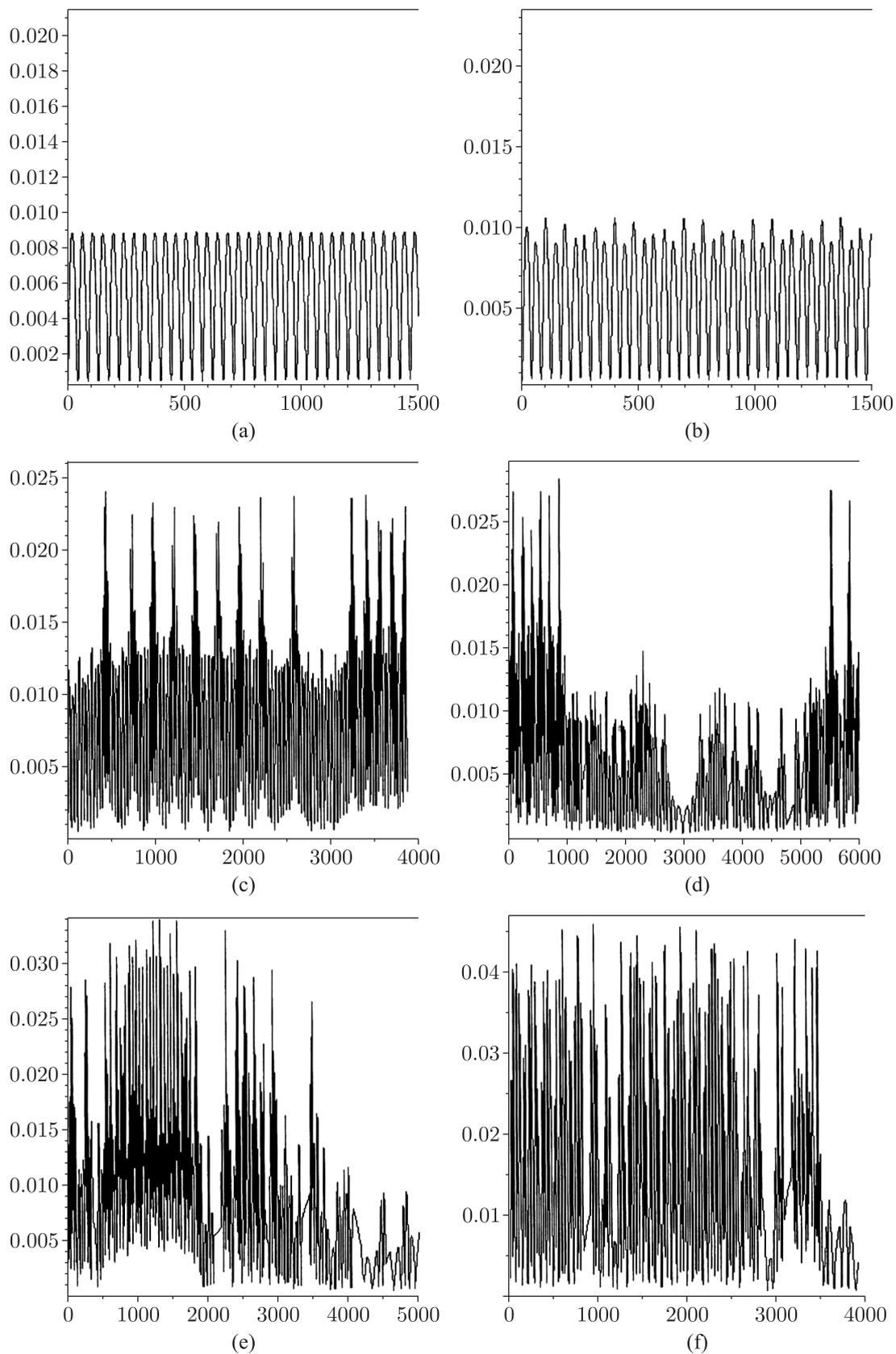


Рис. 2

Для движений, отвечающих нижней ветви $\rho_1 = \rho^{-1}$, характер движений модельной системы схож, однако переход к «пикообразному» характеру происходит при больших значениях величины ξ .

Отметим, что в обоих случаях «всплески» с большой амплитудой появляются для значений ξ , достаточно удаленных от границы области устойчивости резонанса четвертого порядка. Их появление вызвано взаимодействием двух имеющихся в системе резонансов; каждый из них по отдельности не приводит к неустойчивости, однако их взаимное влияние в целом «возмущает» движения модельной системы.

Описанный характер движений наблюдается не всегда: при другом выборе начальных условий и (или) уровня энергии характер движений модельной может оставаться достаточно «плавным» вплоть до значений ξ , близких к граничному.

Численные расчеты были проведены и в тех областях параметров модельной системы, в которых ограниченность движений не была установлена аналитически. Для проверенных случаев движения системы оказались ограниченными и имели схожий с предыдущим описанием характер поведения.

Список литературы

- [1] Korteweg D. J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale — vibrations de relations, — dans les mécanismes à plusieurs degrés de liberté // Arch. Néerl. sci. exactes et natur. Sér. 2, 1898, vol. 1, pp. 229–260.
- [2] Beth H. I. E. Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires // Arch. Néerl. sci. exactes et natur. Sér. 2, 1910, vol. 15, pp. 246–283.
- [3] Beth H. I. E. Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite) // Arch. Néerl. sci. exactes et natur. Sér. 3A, 1912, vol. 1, pp. 185–213.
- [4] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.
- [5] Куницын А. Л., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4.) Москва: ВИНТИ, 1979. С. 58–139.
- [6] Маркеев А. П. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика / В. М. Матросов, В. В. Румянцев, А. В. Карапетян. Москва: Физматгиз, 2001. С. 114–130.
- [7] Холостова О. В. Исследование нелинейных колебаний гамильтоновых систем с одной степенью свободы при резонансах: Учебн. пособ. Москва: МАИ, 2011. 96 с.
- [8] Куницын А. Л. Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 9, с. 1704–1706.
- [9] Хазина Г. Г. Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов // ПММ, 1974, т. 38, № 1, с. 56–65.
- [10] Куницын А. Л., Медведев С. В. Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // ПММ, 1977, т. 41, № 3, с. 422–429.
- [11] Куницын А. Л., Ташимов Л. Т. Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 196 с.
- [12] Хазин Л. Г. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем дифференциальных уравнений: (Взаимодействие резонансов третьего порядка): Препринт № 133. Москва: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1981. 20 с.
- [13] Хазин Л. Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // ПММ, 1984, т. 48, № 3, с. 494–498.

- [14] Маркеев А. П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Докл. РАН, 2005, т. 402, № 3, с. 339–343.
- [15] Маркеев А. П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // ПММ, 2006, т. 70, № 2, с. 200–220.
- [16] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2009. 396 с.
- [17] Холостова О. В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 267–288.
- [18] Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // Int. J. Nonlinear Mech., 2015, vol. 73, pp. 64–68.
- [19] Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. Москва: Наука, 1987. 328 с.

The interaction of resonances of the third and fourth orders in a Hamiltonian two-degree-of-freedom system

Olga V. Kholostova

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe Shosse, 4, GSP-3, A-80, Moscow, 125993, Russia
kholostova_o@mail.ru

The motion of a time-periodic two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the neighborhood of the equilibrium being stable in the linear approximation is considered. The weak Raman third-order resonance and the strong fourth-order resonance are assumed to occur simultaneously in the system. The behavior of the approximated (model) system is studied in the stability domain of the fourth-order resonance. Areas of the parameters (coefficients of the normalized Hamiltonian) are found for which all motions of the system are bounded if they begin in a sufficiently small neighborhood of the equilibrium. Boundedness domain estimate is obtained. A disturbing effect of the double resonance on the motion of the system within the boundedness domain is described.

MSC 2010: 70H05, 70H14, 70H15, 70K45

Keywords: Hamiltonian system, canonical transformation, method of normal forms, double resonance, stability

Received August 18, 2015, accepted October 08, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 671–683 (Russian)