

УДК 510.64

© А. К. Кощева

НОВЫЕ КОНСТАНТЫ В ПРЕДТАБЛИЧНЫХ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИКАХ: ПОДХОД П. С. НОВИКОВА

П. С. Новиков в конце 50-х годов XX века поставил задачу о новых логических связках как экстрапонятиях для языка со стандартными логическими связками \vee , \wedge , \rightarrow , \neg . Я. С. Сметанич в своих работах привел точные формулировки подхода Новикова к понятию новых логических связок в суперинтуционистских логиках (новая логическая связка, полнота по Новикову). В статье рассмотрена проблема П. С. Новикова применительно к новым константам в предтабличных суперинтуционистских логиках LC , $L2$, $L3$: логика конечных цепей, логика корневых шкал глубины 2 (вееров), логика корневых шкал глубины 3 с наибольшим элементом (даймондов). Получено исчерпывающее описание семейства всех полных по Новикову расширений каждой из предтабличных суперинтуционистских логик в языке с несколькими дополнительными константами: для LC и $L2$ семантическое описание всех полных по Новикову расширений дано в терминах классов конечных цепей с раскраской (LC) и конечных вееров с раскраской ($L2$); для $L3$ подобное описание дано для случая одной константы. Установлена алгоритмическая разрешимость каждого пополнения по Новикову указанных трех суперинтуционистских логик, а также алгоритмическая проблема распознавания консервативности расширений этих логик в языке с одной дополнительной константой.

Ключевые слова: предтабличные суперинтуционистские логики, новые логические константы, полнота по П. С. Новикову, алгоритмическая проблема распознавания консервативности.

Введение

В исследовании какого-либо объекта (или класса объектов) при отыскании существенно новых свойств этого объекта часто применяется метод обогащения, при котором изучаемый объект становится частью другого объекта, при этом новый объект наделяется дополнительными атрибутами — отношениями, функциями и пр. В некоторых случаях исходный объект представляет собой собственное подмножество нового объекта, в других — новый объект получается лишь заданием на старом дополнительных атрибутов.

Синтаксическим отражением такого обогащения является расширение языка. Утверждения и понятия, записанные на исходном языке, можно назвать *реальными*, а утверждения и понятия, использующие дополнительные атрибуты — *идеальными*. Например, к числу реальных понятий Д. Гильберт относил понятие алгоритмически вычислимой функции. К реальным утверждениям он относил формулы вида $\forall x (f(x) = g(x))$ с вычислимыми функциями f и g . Мотивировка: любой частный случай этого равенства проверяется явно за конечное число шагов.

Пусть \mathbf{T} — базовая теория в базовом языке \mathcal{S} . Основа языка \mathcal{S} — реальные понятия; основа теории \mathbf{T} — аксиомы и правила вывода реального языка. Добавление к базовому языку новых символов (например, функциональных, константных, предикатных), иначе говоря, введение в язык \mathcal{S} идеальных понятий, или *экстрапонятий*, расширяет (другими словами — обогащает) его до языка $\mathcal{S}' : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Соответственно, введение в базовую теорию \mathbf{T} дополнительных аксиом (и, возможно, правил вывода) расширяет ее до теории $\mathbf{T}' : \mathbf{T} \subset \mathbf{T}'$. При этом новые аксиомы, или *экстрааксиомы*, отражают свойства экстрапонятий и их взаимосвязь с реальными понятиями. В математике примеров такого рода много. В теории натуральных чисел, например, ряд результатов был получен с помощью теории комплексных чисел. В алгебре примером такого рода является задача о разложении многочлена $x^4 + 1 = 0$ на множители над полем действительных чисел (есть два способа решения: первый подразумевает отыскание комплексных корней, второй — выделение полного квадрата). Примерами из математической логики являются булевы алгебры с операторами, языки более высокого порядка, относительно элементарная определимость и др.

Заметим, что при произвольном расширении теория \mathbf{T}' может оказаться противоречивой, даже если \mathbf{T} была непротиворечива. Поэтому важнейшее требование для такого расширения

теорий — получаемая теория должна быть *консервативна* над исходной теорией, то есть экстрапонятия и новые аксиомы не должны нарушать базовую теорию:

$$\frac{A \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{T}' \vdash A}{\mathbf{T} \vdash A}$$

(если утверждение реального языка выводимо в расширенной теории, то и в реальной теории оно должно быть выводимо).

Согласно Гильберту, основное назначение экстрапонятий — получение новых реальных теорем, а также более ясное доказательство уже известных теорем. Иначе говоря, экстрапонятия повышают выразительную силу языка и упрощают доказательства прежних теорем.

Для пропозициональных исчислений экстрапонятиями являются, например, кванторы. Язык первого порядка позволил выразить практически все понятия, нужные для работы в привычных разделах математики. Следствием такой универсальности стали, например, неразрешимость логики первого порядка, неполнота арифметики, неформализуемость логики второго порядка.

Тем не менее для решения ряда задач был найден промежуточный вариант — вместо кванторов использовать дополнительные пропозициональные связи, отражающие некоторые свойства кванторов. Известные связи модальной логики \Box, \Diamond являются экстрапонятиями для языка классической двузначной логики.

Однако классическая двузначная логика не всегда позволяет адекватно моделировать некоторые прикладные задачи (например, в теоретической информатике). В связи с этим возникла необходимость применять и неклассические логики. Первым важнейшим примером таковой является интуиционистская пропозициональная логика (*Int*), введенная первоначально Л. Э. Я. Брауэром, впоследствии формализованная А. Гейтингом, и истолкованная А. Н. Колмогоровым в работе [39] как логика задач (подробнее об *Int* см., например, в [14]). Кроме того, полезными, по разным соображениям, оказались и расширения *Int*, названные впоследствии *суперинтуиционистскими* (с. и.) логиками.

П. С. Новиков¹ в конце 50-х годов XX века поставил задачу о новых логических связках как экстрапонятиях для языка со *стандартными логическими связками* $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$. Я. С. Сметанич привел точные формулировки подхода Новикова к понятию новых логических связок в суперинтуиционистских логиках в работах [17, 18].

Одним из примеров, рассмотренных Я. С. Сметаничем, является расширение *Int* дополнительной одноместной связкой, удовлетворяющей аксиомам

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\leftrightarrow \varphi(q); \\ &\neg\neg\varphi(p); \\ \varphi(p) &\rightarrow (q \vee \neg q). \end{aligned}$$

Первая из трех аксиом показывает, что смысл $\varphi(\cdot)$ не зависит от аргумента, то есть можно рассматривать φ как логическую константу. Кроме того, можно рассматривать не одну, а несколько дополнительных логических констант (помимо стандартных констант 0 «ложь», 1 «истина»).

В настоящей работе будут рассмотрены только дополнительные логические константы. Для этого случая подход Новикова адаптируется следующим образом.

Язык чистой пропозициональной логики основан на пропозициональных переменных

$$Var = \{p_0, p_1, p_2, \dots\};$$

пропозициональных связках: $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$, эквиваленция понимается как

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p);$$

пропозициональных константах: 0 и 1 . Обычным образом строится множество *Fm* формул этого языка.

¹В дальнейшем фамилия «Новиков» будет означать исключительно «П. С. Новиков».

Добавим к исходному языку дополнительный набор констант $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$. Получим класс $Fm(\bar{\varphi})$ формул расширенного языка.

О п р е д е л е н и е 0.1. $\bar{\varphi}$ -логикой будем называть множество формул языка $Fm(\bar{\varphi})$, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

О п р е д е л е н и е 0.2. φ -логика \mathcal{L} называется *консервативным расширением* с.и. логики L , если L включено в \mathcal{L} и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

О п р е д е л е н и е 0.3. $\bar{\varphi}$ -логика \mathcal{L} определяет *новые независимые константы* в с.и. логике L , если \mathcal{L} является консервативной над L и *не допускает никакого явного соотношения* ни для какой дополнительной константы (явное соотношение — формула вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где B не содержит φ_i).

Другими словами, при добавлении явного соотношения к \mathcal{L} нарушается консервативность над L .

О п р е д е л е н и е 0.4. $\bar{\varphi}$ -логика \mathcal{L} называется *полным по Новикову расширением* логики L , если \mathcal{L} консервативна над L и *не допускает присоединения* никакой новой формулы (в смысле предыдущего определения).

Проблема Новикова для с.и. логики L формулируется следующим образом:

- построить примеры $\bar{\varphi}$ -логик, определяющие новые независимые константы для L , и примеры полных $\bar{\varphi}$ -логик для L (*проблема минимум*);
- дать исчерпывающее описание семейства полных по Новикову расширений L и выяснить в каких из них дополнительные константы независимы (*проблема максимум*).

Известно, что семейство с.и. логик имеет мощность континуума [21], поэтому естественным представляется рассмотрение проблемы Новикова для таких с.и. логик, которые по тем или иным причинам уже находились в поле зрения исследователей. В настоящей работе проблема Новикова рассматривается применительно к предтабличным суперинтуиционистским логикам.

Напомним, что *табличной* называют с.и. логику, которая характеризуется конечным числом конечных шкал. *Предтабличной* называют с.и. логику, которая сама табличной не является, но любое ее собственное расширение оказывается табличным.

Из работы [9] известно, что всякая предтабличная суперинтуиционистская логика финитно аппроксимируема. Л. Л. Максимова, используя этот результат, в работе [11] показала, что предтабличных суперинтуиционистских пропозициональных логик ровно три: LC , $L2$, $L3^2$. Предтабличность первой логики была доказана в [31], остальных двух — в [37]. Данная работа продолжает исследования, начатые в работах [6, 22–26, 41].

Цель представленной работы заключается в:

- 1) получении исчерпывающего описания семейства всех полных по Новикову расширений каждой из предтабличных с.и. логик в языке с несколькими дополнительными константами и исследовании каждого пополнения на наличие явных соотношений;
- 2) исследовании каждого из пополнений на алгоритмическую разрешимость;
- 3) исследовании массовой проблемы распознавания консервативности φ -логик над LC , $L2$, $L3$ на предмет алгоритмической разрешимости.

Основные результаты работы связаны с получением ответов на сформулированные выше вопросы.

В работе используются следующие обозначения: \Leftrightarrow — «по определению равносильно»; $:=$ — «по определению равно»; $[1, m]$ — натуральные числа от 1 до m включительно.

Перейдем к обзору содержания работы.

Во **введении** приведены базовые определения, дан краткий исторический обзор исследуемых вопросов.

²Отметим, что для $L2$ и $L3$ используются и другие обозначения: в работе [11] указано, что логика $L2$ эквивалентна логике LP_2 , а логика $L3$ эквивалентна логике LQ_3 . Логика LP_2 и LQ_3 рассматривались в работе [36]. Здесь мы будем придерживаться обозначений, введенных Л. Л. Максимовой.

В **первых трех параграфах** приведены необходимые сведения о метаматематике $\overline{\varphi}$ -логик. Результаты, полученные в процессе работы, приведены с их доказательствами. При написании §§ 1–3 автор опирался на работы [2, 10, 13, 15, 16, 27, 42].

В § 1 приведены сведения из метаматематики чистых логик.

В § 2 приведена семантическая характеристика предтабличных суперинтуиционистских логик в терминах шкал Крипке. Приведены утверждения о строении шкал, являющихся моделями логик LC (предложение 2.1) и $L2$ (предложение 2.3). Доказано аналогичное утверждение для $L3$ (предложение 2.5).

В § 3 основные метаматематические понятия и результаты переносятся на $\overline{\varphi}$ -язык. Формально обосновывается корректность постановки проблемы полноты по Новикову для произвольной логики L (теорема 3.1). Для произвольных конечных $\overline{\varphi}$ -шкал описана методика (основана на материалах работы [41]), которая позволяет исследовать конечные $\overline{\varphi}$ -шкалы на наличие явных соотношений. Рассмотрены примеры $\overline{\varphi}$ -шкал как с наличием, так и с отсутствием явных соотношений.

Следующие три параграфа посвящены классификации полных $\overline{\varphi}$ -расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

В § 4 показано, что любая консервативная над LC $\overline{\varphi}$ -логика включена в некоторую $\overline{\varphi}$ -логику, задаваемую конфинальным классом конечных $\overline{\varphi}$ -цепей (теорема 4.1 и следствия 4.1, 4.2). Таким образом, для отыскания примеров полных по Новикову расширений LC достаточно рассматривать конфинальные классы конечных $\overline{\varphi}$ -цепей.

В работе [25] для построения полных по Новикову $\overline{\varphi}$ -расширений логики LC используется *метод наростов*. В настоящей работе вместо понятия «нарост» мы используем его цветовой аналог — «прототип», поэтому описание полных по Новикову $\overline{\varphi}$ -расширений логики LC с несколькими константами дается в терминах прототипов.

О п р е д е л е н и е 4.1. *Прототипом \mathcal{C}* называется конечная $\overline{\varphi}$ -цепь, в которой все точки имеют попарно различные цвета.

Из данного прототипа \mathcal{C} строится класс $[\mathcal{C}]_\infty := \{\mathcal{C}_k \mid k \in \omega\}$, где \mathcal{C}_k получено из \mathcal{C} дублированием корня в k экземплярах.

Классификацию полных по Новикову расширений логики LC устанавливают следующие утверждения, сформулированные в п. 4.2.

Т е о р е м а 4.2 (А). *Всякое консервативное $\overline{\varphi}$ -расширение логики Даммета включено в $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для некоторого прототипа \mathcal{C} .*

Т е о р е м а 4.2 (Б). *Если \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 — неизоморфные прототипы, то $\overline{\varphi}$ -логики, определяемые этими прототипами, несовместны над LC , то есть их объединение порождает неконсервативную над LC $\overline{\varphi}$ -логику.*

Описание попарно неизоморфных прототипов $\overline{\varphi}$ -цепей с одной и с двумя константами дано в п. 4.2. С помощью методики, приведенной в предложении 3.1, эти прототипы проанализированы на наличие явных соотношений.

В § 5 установлено, что для отыскания примеров полных по Новикову расширений $L2$ достаточно рассматривать конфинальные классы конечных $\overline{\varphi}$ -вееров (теорема 5.1 и следствие 5.3, предложение 5.1), и приведен следующий результат.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Полные по Новикову расширения логики $L2$ в языке с несколькими константами характеризуются подходящими конфинальными классами $\overline{\varphi}$ -вееров.*

Для наглядного описания таких расширений $L2$ в п. 5.2 вводится понятие прототипа.

О п р е д е л е н и е 5.1. *Прототипом \mathcal{F}* будем называть $\overline{\varphi}$ -веер, все максимальные точки которого имеют разные цвета.

В п. 5.3 рассматриваются примеры пополнений с. и. логики $L2$ с одной и с двумя константами, анализируется наличие явных соотношений в них.

В § 6 рассматриваются расширения логики $L3$ в языке с одной константой. Установлено, что для отыскания примеров полных по Новикову расширений $L3$ в $Fm(\varphi)$ достаточно рассматривать конфинальные классы конечных φ -даймондов (теорема 6.1 и следствие 6.1).

В п. 6.2 введены в рассмотрение пять классов φ -даймондов, на соответствующих φ -шкалах каждого из которых определенным образом задано значение константы φ , определяющее так называемый «цветовой тип класса». φ -логики этих классов обозначены $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$ соответственно.

Классификацию полных по Новикову расширений логики $L3$ описывают следующие две теоремы.

Т е о р е м а 6.2. *Любая консервативная над $L3$ φ -логика включена в одну из пяти φ -логик $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$.*

Т е о р е м а 6.3. *φ -логики $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$ попарно несравнимы.*

Таким образом, семейство полных по Новикову расширений $L3$ состоит в точности из $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$.

Далее в §7 рассмотрены вопросы разрешимости полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик и алгоритмическая проблема распознавания консервативности полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

О п р е д е л е н и е 7.1. φ -логика \mathcal{L} называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $A \in Fm(\varphi)$ определяет: $A \in \mathcal{L}$ или $A \notin \mathcal{L}$.

Т е о р е м а 7.1. *Все полные по Новикову расширения предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ являются разрешимыми.*

О п р е д е л е н и е 7.2. Под проблемой *распознавания консервативности* будем понимать следующую массовую проблему. Пусть L — одна из логик $L1, L2, L3$. Пусть $A \in Fm(\varphi)$; является ли φ -логика $L + A$ консервативным расширением логики L ?

Т е о р е м а 7.2. *Проблема распознавания консервативности расширений предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ алгоритмически разрешима.*

§ 1. Метаматематика чистых шкал и логик

Язык логики высказываний содержит:

- 1) счетное множество *пропозициональных переменных* $Var = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$;
- 2) *пропозициональные связки*: $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$;
- 3) *пропозициональные константы*: 0 (ложь), 1 (истина);
- 4) *вспомогательные символы* (скобки): $($ и $)$.

Множество Fm формул языка логики высказываний определяется индуктивно:

- 1) пропозициональные переменные и константы есть формулы;
- 2) если A и B — формулы, то $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ — формулы;
- 3) других формул, кроме построенных по пп. 1 и 2, нет.

Для обозначения переменных будут так же использоваться строчные латинские буквы p, q, \dots (возможно, с индексами), и прописные латинские буквы A, B, C, \dots — для обозначения формул. Формулы, участвующие в построении формулы A в приведенном выше определении, а также сама формула A называются *подформулами* формулы A .

О п р е д е л е н и е 1.1. *Подстановкой* [2] на множестве Fm называется отображение

$$s: Fm \rightarrow Fm,$$

удовлетворяющее условиям: $s(A \circ B) = s(A) \circ s(B)$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$; $s(\neg A) = \neg s(A)$, $s(0) = 0$, $s(1) = 1$.

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [3]). *Интуиционистская логика высказываний* Int — это наименьшее подмножество множества Fm , содержащее аксиомы интуиционистского исчисления высказываний [4], и замкнутое относительно правил вывода *modus ponens* ($A, A \rightarrow B / B$) и подстановки.

Одним из примеров формулы, выводимой в Int , является формула $A \rightarrow A$.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Суперинтуиционистская (с. и.) логика* — это произвольное подмножество $L \subsetneq Fm$, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

Через $L + A$ обозначается наименьшая логика, включающая логику L и содержащая формулу A .

1.1. Шкалы и модели

Дадим необходимые сведения из метаматематики с. и. логик (приведенные здесь сведения частично опираются на [28] и [25]).

О п р е д е л е н и е 1.4. *Шкалой* называется пара (W, \leq) , где W — непустое множество, а \leq — частичный порядок на нем. В некоторых случаях будем отождествлять ч.у.м. с его носителем.

Элементы шкал будем в дальнейшем называть *точками*. При $x \leq y$ говорят, что точка x видит точку y . При наличии наименьшего элемента он называется *корнем*, а шкала — *корневой* (или *порожденной*). При наличии наибольшего элемента он называется *топом*. Предикат $\max_W x$ означает, что x — максимальный элемент частично упорядоченного множества W .

О п р е д е л е н и е 1.5. Подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом*, если оно замкнуто относительно увеличения: $x \in X, x \leq y \Rightarrow y \in X$. Конус вида $W^x = \{y \in W \mid x \leq y\}$ называется *конусом с корнем x* (или *конусом, порожденным точкой x*). Если имеет место включение $W' \subseteq W$ и W' — конус, то говорят, что конус W' *порожден* из шкалы W .

Например, W и \emptyset являются конусами. Множество конусов шкалы W обозначаем через $Con W$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Множество $W' \subseteq W$ называется *цепью* (*антицепью*), если все элементы этого множества попарно сравнимы (несравнимы), то есть $\forall x, y \in W' (x \leq y \vee y \leq x)$ ($\forall x, y \in W' (x \not\leq y \wedge y \not\leq x \wedge x \neq y)$).

На множестве $Con W$ рассматриваются теоретико-множественные операции \cup, \cap , а также операции *псевдодополнения* и *относительного псевдодополнения*:

$$-X = \{x \in W \mid W^x \cap X = \emptyset\}, \quad X \supset Y = \{x \in W \mid X \cap W^x \subseteq Y \cap W^x\}.$$

Конус X шкалы W называется *плотным*, если $--X = W$. Точечный эквивалент этого условия — $\forall x \exists y \geq x: y \in X$ [15].

Структура $(Con W, \cap, \cup, \supset, -, \emptyset, W)$ является примером *псевдобулевой алгебры* (*алгебры Гейтинга*). Псевдобулевы алгебры (п.б.а.) являются моделями интуиционистской логики высказываний так же, как булевы алгебры — моделями классической логики высказываний (см., например, [15, 32, 40]). В некоторых случаях мы будем отождествлять алгебру конусов с множеством $Con W$.

Известны следующие теоремы о представлении псевдобулевых алгебр (например, [20, 29]):

Т е о р е м а 1.1 (о представлении псевдобулевых алгебр). *Всякая п.б.а. изоморфна подалгебре алгебры $Con W$ для некоторой шкалы W .*

Т е о р е м а 1.2 (о представлении конечных псевдобулевых алгебр). *Всякая конечная п.б.а. изоморфна алгебре $Con F$ для некоторой конечной шкалы F .*

В связи с теоремой 1.1 широко применяется понятие обобщенной шкалы [28].

О п р е д е л е н и е 1.7. *Обобщенной шкалой* называется структура вида (W, S) , где W — шкала, а S — подалгебра алгебры $Con W$, при этом под конечными обобщенными шкалами всегда будем понимать обобщенные шкалы, удовлетворяющие условию $S = Con W$. Любую шкалу W можно естественным образом отождествить с обобщенной шкалой $(W, Con W)$. Обобщенную шкалу иногда будем называть просто *шкалой*, если ее тип ясен из контекста.

О п р е д е л е н и е 1.8. Пусть (W, S) — шкала. Отношение *отделенности* на множестве W определяется (см. [34, 35]) следующим образом:

$$x \prec y \iff x < y \ \& \ \exists Y \in S: x \notin Y \ \& \ y \in Y.$$

О п р е д е л е н и е 1.9. Точка $x \in W$ имеет *глубину* 1, если не существует $y \succ x$ (обозначение $d_{(W,S)}(x) = 1$, это аналог максимальности в обычной шкале). Точка $x \in W$ имеет *глубину* $k > 1$ (обозначение $d_{(W,S)}(x) = k$, $k \in \omega$) тогда и только тогда, когда существует \prec -цепь $x \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_{k-1}$ длины k и не существует \prec -цепей с началом в точке x длины $k + 1$.

В дальнейшем, если из контекста ясно, о какой шкале идет речь, то индекс в обозначении глубины опускается.

О п р е д е л е н и е 1.10. *Оценкой переменных в шкале* $\mu = (W, S)$ называется отображение $v: Var \rightarrow S$, при этом $v(p)$ называется *значением* переменной p относительно оценки v .

На множество Fm оценка v распространяется по индукции:

$$\begin{aligned} v(0) &:= \emptyset; & v(1) &:= W; & v(A \wedge B) &:= v(A) \cap v(B); \\ v(A \vee B) &:= v(A) \cup v(B); & v(A \rightarrow B) &:= v(A) \supset v(B); & v(\neg A) &:= -v(A). \end{aligned}$$

Пара (μ, v) называется *моделью*, а конус $v(A)$ — *значением формулы A относительно оценки v* . По оценке v определяется *отношение вынуждения*: $x \Vdash_v A \iff x \in v(A)$ (читается так: в точке x относительно оценки v *вынуждается* (или *истинна*) формула A).

Формула A *истинна в модели* (μ, v) , если $v(A) = W_\mu$, где W_μ — наибольший конус шкалы μ ; *общезначима в шкале* μ , если для любой оценки v в шкале μ имеем $v(A) = W_\mu$ ($\iff \mu \models A$).

О п р е д е л е н и е 1.11. *Логикой класса* $\mathbf{M} = \{(W_i, S_i) \mid i \in I\}$ шкал называется множество $L(\mathbf{M})$ формул, общезначимых в каждой шкале этого класса.

З а м е ч а н и е 1. Это множество действительно является логикой, поскольку в нем присутствуют все аксиомы *Int* и оно замкнуто относительно правил подстановки и модус поненс [42].

Т е о р е м а 1.3. *Для всякой с. и. логики L существует класс \mathbf{M} обобщенных шкал такой, что $L = L(\mathbf{M})$.*

Это утверждение приводится в разных источниках и разных формулировках, например, в статье М. В. Захарьяцева [3, с. 404, абз. 2] и в работе Х. Оно [40].

Класс \mathbf{M} , удовлетворяющий условиям теоремы 1.3, называется *характеристическим* (для логики L) [38]. В дальнейшем, если ясно о какой логике идет речь, то пишем просто «характеристический» без упоминания L .

1.2. Порожденные шкалы и p -морфизмы

Пусть $\mu = (W, S)$ — шкала, $W_0 \in Con W$ (порядок на W_0 наследуется из порядка на W) и $S_0 = \{X \cap W_0 \mid X \in S\}$.

О п р е д е л е н и е 1.12. Шкала $\mu_0 = (W_0, S_0)$ называется *подшкалой, порожденной из μ конусом W_0* ($\iff \mu_0 \subseteq \mu$).

Если v — оценка на μ , то *наследуемая оценка v' на μ'* определяется посредством $v'(p) \iff v(p) \cap W_0$ для всех $p \in Var$.

Т е о р е м а 1.4 (о порожденной модели). *При указанных предположениях для любой формулы $A \in Fm$ имеет место $v'(A) = v(A) \cap W_0$.*

О п р е д е л е н и е 1.13. Пусть $\mu = (W, \leq; S)$, $\mu' = (W', \leq'; S')$ — шкалы. Отображение $h: W \rightarrow W'$ называется *p -морфизмом* шкалы μ на μ' , если выполнены следующие условия:

- h — сюръективное отображение;
- $x \leq y \implies h(x) \leq' h(y)$ (монотонность);
- $z \geq' h(x) \implies \exists y \geq x: h(y) = z$ (конусность);
- $\forall X \in S': h^{-1}(X) \in S$, где $h^{-1}(X)$ — полный прообраз конуса X по h (непрерывность — по аналогии с «прообраз открытого множества открыт»). Обозначение $h: \mu \twoheadrightarrow \mu'$.

Предложение 1.1. Пусть (W, S) и (W', S') — шкалы, $h: (W, S) \rightarrow (W', S')$. Тогда для всех $x \in W$ выполнено неравенство $d(x) \geq d(h(x))$.

Пусть $h: \mu \rightarrow \mu'$ и v — оценка на μ' . Прообраз $(h^{-1}v)$ оценки v относительно h определяется так: $(h^{-1}v)(p) \equiv h^{-1}(v(p))$ для всех $p \in Var$.

Теорема 1.5 (о p -морфизмах моделей). При указанных предположениях для любой формулы A выполнено $(h^{-1}v)(A) = h^{-1}(v(A))$.

Отношение *редуцируемости* $\mu \succeq \mu'$ на классе шкал определяется так:

$$\mu \succeq \mu' \iff \exists \mu_0 \subseteq \mu \exists h: \mu_0 \rightarrow \mu'.$$

Пусть \mathbf{M} и \mathbf{N} — некоторые классы обобщенных шкал. Отношение *редуцируемости* на классах шкал определяется следующим образом:

$$\mathbf{N} \succeq \mathbf{M} \iff \forall \mu \in \mathbf{M} \exists \eta \in \mathbf{N} : \eta \succeq \mu.$$

Говорят также, что класс \mathbf{M} *мажорируется* классом \mathbf{N} .

Следующие две теоремы вытекают из метаматематических результатов, приведенных, например, в [27].

Теорема 1.6 (прямая о сравнении логик). Пусть \mathbf{M} и \mathbf{N} — произвольные классы обобщенных шкал. Тогда из $\mathbf{N} \succeq \mathbf{M}$ следует $L(\mathbf{N}) \subseteq L(\mathbf{M})$.

Теорема 1.7 (обратная о сравнении логик). Пусть \mathbf{F} — некоторый класс конечных порожденных шкал, а \mathbf{M} — произвольный класс обобщенных шкал. Тогда из $L(\mathbf{M}) \subseteq L(\mathbf{F})$ следует $\mathbf{M} \succeq \mathbf{F}$.

Теорема 1.8 (финитная аппроксимируемость *Int*). Пусть \mathbf{F} — класс всех конечных порожденных шкал. Тогда $L(\mathbf{F}) = Int$.

Напомним, что с.и. логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она характеризуется некоторым классом конечных шкал [8].

§ 2. О предтабличных суперинтуиционистских логиках

Определение 2.1. *Табличной* называют с.и. логику, которая может быть характеризована конечным числом конечных шкал.

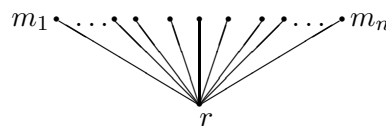
Определение 2.2. *Предтабличной* называют с.и. логику, которая сама табличной не является, но любое ее собственное расширение оказывается табличным.

В работе [11] семантическая характеристика предтабличных суперинтуиционистских логик построена с помощью шкал Крипке.

Определение 2.3. Будем называть *цепью* конечную линейно упорядоченную шкалу; цепь из n элементов обозначим C_n .

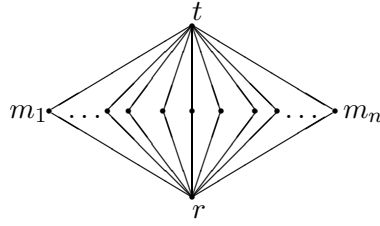
Определение 2.4. Будем называть *веером* конечную корневую шкалу глубины 2; веер с n максимальными элементами (*крыша* веера) обозначаем F_n .

Типичный веер имеет следующий вид:



Определение 2.5. Будем называть *даймондом* конечную корневую шкалу глубины 3 с топом; даймонд с n попарно несравнимыми точками «среднего слоя» (*миддл* даймонда) обозначаем D_n .

Типичный даймонд имеет следующий вид:



Отметим, что в работе [12] термину «даймонд» соответствует термин «юла».

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что понятие «цепь», «веер» и «даймонд» легко обобщаются на шкалы с бесконечным числом элементов.

О п р е д е л е н и е 2.6. *Логикой Даммета* [30] LC называется логика, полученная добавлением к Int аксиомы линейности

$$Lin := (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p).$$

Наличие в LC указанной аксиомы обуславливает специфические свойства шкал, являющихся моделями логики LC , которые будем также называть LC -шкалами.

Общезначимость аксиомы линейности в обобщенной шкале описывается следующим предложением.

П р е д л о ж е н и е 2.1 (строение LC -шкал, [25]). *Обобщенная шкала $\mu = (W, S)$ является моделью логики Даммета тогда и только тогда, когда в любой ее порожденной корневой подшкале (W', S') семейство конусов S' линейно упорядочено отношением включения \subseteq .*

Из упомянутых выше работ А. В. Кузнецова и Л. Л. Максимовой следует, что характеристическим для LC является класс \mathbf{C} всех конечных цепей³. Более того, для характеристичности класса достаточно, чтобы он содержал конечные цепи сколь угодно большой высоты (*конфинальный подкласс*). В самом общем случае имеем [25]

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Класс \mathbf{M} обобщенных LC -шкал является характеристическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{C} \preceq \mathbf{M}$.*

О п р е д е л е н и е 2.7. *Логикой $L2$* называется логика, полученная добавлением к Int аксиомы ограничения глубины не более 2

$$bd_2 := p_1 \vee (p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_2)).$$

Наличие в $L2$ указанной аксиомы обуславливает специфические свойства шкал, являющихся моделями логики $L2$, которые будем также называть $L2$ -шкалами.

П р е д л о ж е н и е 2.3 (строение $L2$ -шкал, [25]). *Обобщенная шкала $\mu = (W, S)$ является моделью логики $L2$ тогда и только тогда, когда ее высота не превосходит 2.*

Характеристическим для $L2$ является класс \mathbf{F} всех конечных вееров. Заметим, что при $1 \leq k < n$ веер F_k является p -морфным образом веера F_n . Отсюда следует, что любой конфинальный подкласс \mathbf{F}' класса \mathbf{F} также является характеристическим (подкласс *конфинален*, если он содержит вееры F_k сколь угодно большой ширины). В общем случае имеем [25]

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Класс \mathbf{M} обобщенных $L2$ -шкал является характеристическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}' \preceq \mathbf{M}$ для некоторого конфинального подкласса $\mathbf{F}' \subseteq \mathbf{F}$.*

³Отсюда обозначение — LC — Logic of Chains.

О п р е д е л е н и е 2.8. *Логикой $L3$* называется логика, полученная добавлением к Int аксиом *ограничения глубины не более 3*

$$bd_3 := p_1 \vee (p_1 \rightarrow (p_2 \vee (p_2 \rightarrow (p_3 \vee \neg p_3))))$$

и *слабого закона исключенного третьего*

$$kc := \neg p \vee \neg \neg p.$$

Наличие в $L3$ указанных аксиом обуславливает специфические свойства шкал, являющихся моделями логики $L3$, которые будем также называть *$L3$ -шкалами*.

П р е д л о ж е н и е 2.5 (строение $L3$ -шкал). Пусть $\mu = (W, S)$ — шкала.

(1) Если $\mu \models bd_3$, то $\forall x \in W (d(x) \leq 3)$.

(2) Если μ — корневая шкала и $\mu \models kc$, то для любых двух непустых конусов $X, Y \in S$ их пересечение непусто.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть в шкале μ нашлись такие элементы x, y, z, t , что $x \prec y \prec z \prec t$ и $x \notin Y, y \in Y, y \notin Z, z \in Z, z \notin T, t \in T$ для некоторых $Y, Z, T \in S$. Если положить $v(p_1) := Y, v(p_2) := Z, v(p_3) := T$, то при такой оценке в точке x опровергается формула bd_3 .

2) Пусть, напротив, нашлись непустые и непересекающиеся конусы $X, Y \in S$. Положим $v(p) := X$. Тогда $Y \subseteq -X$, т.е. $-X \neq \emptyset$ и, следовательно, в точке $o \in W$ опровергается формула kc . \square

Характеристическим для $L3$ является класс \mathbf{D} всех конечных даймондов. Заметим, что любой конфинальный подкласс \mathbf{D}' класса $\mathbf{D} := \{D_n | n \in \omega, n > 0\}$ также является характеристическим, поскольку при $1 \leq k < n$ даймонд D_k является p -морфным образом даймонда D_n (подкласс *конфинален*, если он содержит даймонды D_k для сколь угодно больших k).

Обозначения bd_2, bd_3, kc взяты из [28], где так обозначаются соответствующие логики $\mathbf{BD}_2 = Int + bd_2$ (bounded depth 2), $\mathbf{BD}_3 = Int + bd_3$ (bounded depth 3), $\mathbf{KC} = Int + \neg p \vee \neg \neg p$.

§ 3. Метаматематика $\overline{\varphi}$ -шкал и $\overline{\varphi}$ -логик

В этом параграфе приводятся необходимые сведения из метаматематики $\overline{\varphi}$ -логик и $\overline{\varphi}$ -шкал (изложение адаптировано для языка с несколькими константами и опирается на [16, 23, 41]).

Напомним, что к пропозициональному языку добавляется набор дополнительных логических констант $\overline{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$; получается класс $Fm(\overline{\varphi})$ формул расширенного языка, при этом формулы из Fm были названы *чистыми*. Формулы без переменных называются *константными*, $Fm_c(\overline{\varphi})$ — класс константных формул. Понятие *подстановки* переносится на расширенный язык: $s(\varphi_i) = \varphi_i$ для всех $\varphi_i \in \overline{\varphi}$.

О п р е д е л е н и е 3.1. *$\overline{\varphi}$ -логикой* называется множество \mathcal{L} формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки [16, с. 155].

Через $\mathcal{L} + A$ обозначим наименьшую $\overline{\varphi}$ -логику, включающую логику \mathcal{L} и содержащую формулу A ($A \in Fm(\overline{\varphi})$).

Рукописное начертание букв для логик, шкал и классов шкал будет указывать на связь с расширенным языком, прямое начертание — на связь с чистым языком.

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем говорить, что $\overline{\varphi}$ -логика \mathcal{L} является *консервативным расширением* с.и. логики L , если $L \subseteq \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

О п р е д е л е н и е 3.3. *Явным соотношением для константы φ_i* назовем формулу вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, где подформула B не содержит φ_i (но может содержать константы, отличные от φ_i).

О п р е д е л е н и е 3.4. $\overline{\varphi}$ -логика \mathcal{L} называется *полным по Новикову расширением* логики L , если \mathcal{L} консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\overline{\varphi})$, не принадлежащей \mathcal{L} , $\overline{\varphi}$ -логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L (то есть \mathcal{L} не допускает присоединения никакой новой формулы).

Если $\bar{\varphi} = \{\varphi\}$, то явное соотношение имеет вид $\varphi \leftrightarrow B$ для некоторой чистой формулы B . Тогда можно сказать, что \mathcal{L} определяет *новую* константу в L .

Подход Новикова к понятию новой константы адаптирован А. Д. Яшиным [41]: понятие *новизны* трансформируется в понятие *независимости* констант.

О п р е д е л е н и е 3.5. Будем говорить, что $\bar{\varphi}$ -логика \mathcal{L} *определяет новые независимые логические константы* в L , если \mathcal{L} консервативна над L и для любого явного соотношения $\varphi_i \leftrightarrow B$ $\bar{\varphi}$ -логика $\mathcal{L} + \varphi_i \leftrightarrow B$ является неконсервативной над L (другими словами, \mathcal{L} не допускает присоединения никаких явных соотношений для дополнительных констант).

Напомним формулировку проблемы Новикова для с. и. логики L :

- построить явные примеры полных над L $\bar{\varphi}$ -логик с независимыми константами (*проблема-минимум*);
- описать класс всех полных по Новикову $\bar{\varphi}$ -логик (*проблема-максимум*).

Следующая теорема является формальным обоснованием корректности постановки проблемы полноты по Новикову для произвольной логики L .

Т е о р е м а 3.1. Пусть L — некоторая с. и. логика. Любая консервативная над L $\bar{\varphi}$ -логика включена в некоторую максимальную консервативную над L $\bar{\varphi}$ -логику.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторую консервативную над с. и. логикой L $\bar{\varphi}$ -логику \mathcal{L} . Положим $X := \{\mathcal{L}' \mid \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}' \text{ и } \mathcal{L}' \text{ — консервативное расширение } L\}$, X — упорядочено по включению. Нетрудно убедиться, что всякая цепь в X имеет верхнюю грань, откуда по лемме Цорна, найдется максимальная по включению $\bar{\varphi}$ -логика \mathcal{L}'' такая, что $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}''$ и \mathcal{L}'' — консервативное расширение L . \square

Однако этот результат ничего не дает в плане эффективного описания как конкретных примеров полных логик, так и всего семейства полных логик.

О п р е д е л е н и е 3.6. *Обобщенной $\bar{\varphi}$ -шкалой* называется структура вида $(W, S; \bar{\Phi})$, где (W, S) — обобщенная шкала, $\bar{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ — набор конусов из S , которые также будем называть *константами*. О каких константах идет речь, будет ясно из контекста.

Как и в случае обобщенных шкал, под конечными обобщенными $\bar{\varphi}$ -шкалами всегда будем понимать обобщенные $\bar{\varphi}$ -шкалы, удовлетворяющую условию $S = \text{Con } W$. Аналогично, любую $\bar{\varphi}$ -шкалу $(W; \bar{\Phi})$ можно естественным образом отождествить с обобщенной $\bar{\varphi}$ -шкалой $(W, \text{Con } W; \bar{\Phi})$. Обобщенную $\bar{\varphi}$ -шкалу будем иногда называть просто $\bar{\varphi}$ -шкалой, если ее тип ясен из контекста.

О п р е д е л е н и е 3.7. *Оценкой переменных* в $\bar{\varphi}$ -шкале $\mu = (W, S; \bar{\Phi})$ называется отображение $v: \text{Var} \rightarrow S$.

На стандартные связки оценка распространяется, как описано выше. Для новых констант для любой v полагаем $v(\varphi_i) := \Phi_i$, $i \in [1, n]$.

Конусы для интерпретации констант на обобщенной $\bar{\varphi}$ -шкале $\mu = (W, S; \bar{\Phi})$ можно задавать также с помощью понятия цвета [1].

О п р е д е л е н и е 3.8. *Цветом* называется произвольное подмножество множества $\bar{\varphi}$ (всего существует 2^n цветов). *Цветом точки* x обобщенной $\bar{\varphi}$ -шкалы μ называется множество $\text{col}(x) := \{\varphi_i \in \bar{\varphi} \mid x \Vdash \varphi_i\}$. В случае одной константы точку x назовем *окрашенной*, если $x \in \Phi$, и соответственно *неокрашенной*, если $x \notin \Phi$.

Понятия *модели*, *истинности формулы в модели*, *общезначимости формулы в $\bar{\varphi}$ -шкале* и в классе $\bar{\varphi}$ -шкал определяются аналогично.

Класс $\mathcal{M} = \{(W_i, S_i; \Phi_i) \mid i \in I\}$ $\bar{\varphi}$ -шкал будем называть *характеристическим* для L , если таковым является класс объединенных (без выделенных конусов) шкал $\mathbf{M} = \{(W_i, S_i) \mid i \in I\}$.

О п р е д е л е н и е 3.9. $\bar{\varphi}$ -логикой класса \mathcal{M} обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал называется множество

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{A \in Fm(\bar{\varphi}) \mid \forall \mu \in \mathcal{M} : \mu \models A\}.$$

З а м е ч а н и е 3. Из вышесказанного следует, что для любой с. и. логики L по крайней мере одно консервативное расширение существует. В самом деле, по теореме 1.3 логика L характеризуется некоторым классом обобщенных шкал; введем в каждой шкале этого класса набор выделенных конусов каким-либо образом, получим характеристический класс обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал и его $\bar{\varphi}$ -логику \mathcal{L} . При этом чистый фрагмент \mathcal{L} совпадает с L .

В работе [16] рассмотрено расширение пропозиционального языка произвольным набором $\bar{\varphi}$ дополнительных логических связок произвольной местности. Модели $\bar{\varphi}$ -логик в таком языке названы посредством $\bar{\varphi}$ -п.б.а., то есть псевдобулевыми алгебрами с заданными на них дополнительными операторами; доказана теорема о моделируемости $\bar{\varphi}$ -логик классами $\bar{\varphi}$ -п.б.а. В нашем частном случае эта теорема формулируется следующим образом

Т е о р е м а 3.2 (о моделировании $\bar{\varphi}$ -логик). *Для всякой $\bar{\varphi}$ -логики \mathcal{L} существует класс обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал \mathcal{M} такой, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.*

Для всякой консервативной над L $\bar{\varphi}$ -логики \mathcal{L} существует характеристический для L класс обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал \mathcal{F} такой, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Пусть $\mu = (W, S; \bar{\Phi})$ — $\bar{\varphi}$ -шкала. Порожденная конусом W' $\bar{\varphi}$ -подшкала определяется так: $\mu' = (W', S'; \bar{\Phi}')$, где $S' = \{X \cap W' \mid X \in S\}$, $\Phi'_i = \Phi_i \cap S'$, $i \in [1, n]$. ($\mu' \stackrel{\bar{\varphi}}{\subseteq} \mu$).

Для обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал $\mu = (W, S; \bar{\Phi})$ и $\mu' = (W', S'; \bar{\Phi}')$ определение $p_{\bar{\varphi}}$ -морфизма (понятие и обозначение взяты из [16]) получается из определения p -морфизма добавлением пункта о согласовании констант: $h^{-1}(\Phi'_i) = \Phi_i$, $i \in [1, n]$. Обозначение $h: \mu \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mu'$.

Для $\bar{\varphi}$ -логики \mathcal{L} через \mathcal{L}_c будем обозначать ее константный фрагмент, то есть

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L} \cap Fm_c(\bar{\varphi}).$$

Л е м м а 3.1. Пусть $\mu \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mu'$. Тогда имеет место $\mathcal{L}_c(\mu) = \mathcal{L}_c(\mu')$.

Отношение $\bar{\varphi}$ -редуцируемости между шкалами определяется следующим образом:

$$\mu \stackrel{\bar{\varphi}}{\preceq} \eta \iff \exists \eta' \stackrel{\bar{\varphi}}{\subseteq} \eta \exists h: \eta' \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mu.$$

Отношение $\bar{\varphi}$ -редуцируемости на классах $\bar{\varphi}$ -шкал определяется следующим образом:

$$\mathcal{M} \stackrel{\bar{\varphi}}{\preceq} \mathcal{N} \iff \forall \mu \in \mathcal{M} \exists \eta \in \mathcal{N} : \mu \stackrel{\bar{\varphi}}{\preceq} \eta.$$

Т е о р е м а 3.3 (прямая теорема сравнения $\bar{\varphi}$ -логик). *Для любых классов \mathcal{M} и \mathcal{N} обобщенных $\bar{\varphi}$ -шкал из $\mathcal{M} \stackrel{\bar{\varphi}}{\preceq} \mathcal{N}$ следует $\mathcal{L}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{M})$.*

Эта теорема аналогична прямой теореме сравнения для чистых с. и. логик и доказывается подобным же образом. По аналогии с $\bar{\varphi}$ -шкалой, $\bar{\varphi}$ -цепью будем называть структуру вида $\mathcal{C}_k := (C_k, \bar{\Psi})$ — цепь C_k с выделенными конусами $\bar{\Psi} = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \text{Con } C_k\}$.

$\bar{\varphi}$ -веером будем называть структуру вида $\mathcal{F}_k := (F_k, \bar{\Psi})$ — веер F_n с выделенными конусами $\bar{\Psi} = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \text{Con } F_k\}$.

$\bar{\varphi}$ -даймондом будем называть структуру вида $\mathcal{D}_k := (D_n, \bar{\Psi})$ — даймонд D_n с выделенными конусами $\bar{\Psi} = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \text{Con } D_k\}$.

Все определения для $\bar{\varphi}$ -цепей, $\bar{\varphi}$ -вееров и $\bar{\varphi}$ -даймондов являются частными случаями определений для $\bar{\varphi}$ -шкал.

В дальнейших рассуждениях мы опираемся на работу [41].

О п р е д е л е н и е 3.10. Пусть F — произвольная конечная шкала. Набор конусов $\{X_1, \dots, X_s\}$ называется *системой образующих* п.б.а. $\text{Con } F$, если наименьшая подалгебра этой алгебры, содержащая указанные конусы, совпадает с $\text{Con } F$.

О п р е д е л е н и е 3.11. *Минимальной* называют систему образующих, у которой никакая собственная подсистема не порождает всю алгебру $\text{Con } F$.

В $\overline{\varphi}$ -шкале $\mathcal{F} = (F; \overline{\Phi})$ нас интересует набор $\overline{\Phi}$ и его поднаборы как возможные системы образующих.

Для произвольной конечной корневой $\overline{\varphi}$ -шкалы $\mathcal{F} = (F; \overline{\Phi})$ имеет место

Л е м м а 3.2. *Набор $\overline{\Phi}$ является системой образующих п.б.а. $\text{Con } F$ тогда и только тогда, когда $\overline{\varphi}$ -шкала \mathcal{F} является $\overline{\varphi}$ -несжимаемой, то есть не существует $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизма на $\overline{\varphi}$ -шкалу с меньшим количеством точек.*

Если $\overline{\varphi}$ -логика \mathcal{L} имеет явное соотношение вида $\varphi_i \leftrightarrow B$, то, подставляя в B вместо переменных константы, отличные от φ_i , получим явное соотношение $\varphi_i \leftrightarrow B'$ с константной правой частью B' .

П р е д л о ж е н и е 3.1. *В конечной $\overline{\varphi}$ -шкале \mathcal{F} с системой образующих $\overline{\varphi}$ существует явное соотношение для φ_i тогда и только тогда, когда при удалении Φ_i из \mathcal{F} $\overline{\varphi} \setminus \{\varphi_i\}$ -шкала $(F; \Phi_1, \dots, \Phi_{i-1}, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_n)$ по-прежнему остается несжимаемой, то есть не существует $p_{\overline{\varphi} \setminus \{\varphi_i\}}$ -морфизма на $\overline{\varphi} \setminus \{\varphi_i\}$ -шкалу с меньшим числом точек.*

П р и м е р 3.1. Рассмотрим конечную $\overline{\varphi}$ -шкалу, раскрашенную так, как показано на рисунке 3a. Удалим из точки крыши константу φ_1 ; получим $\overline{\varphi}$ -шкалу, указанную на рисунке 3b, для которой существует p_{φ_2} -морфизм на $\overline{\varphi}$ -шкалу, указанную на рисунке 3c.

Тогда по предложению 3.1 в этой $\overline{\varphi}$ -шкале не существует явного соотношения для φ_1 ; аналогично для φ_2 .

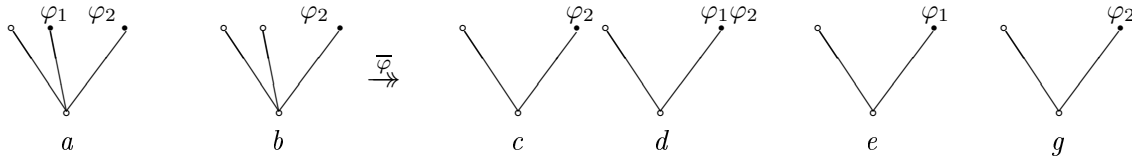


Рис. 3

П р и м е р 3.2. Рассмотрим конечную $\overline{\varphi}$ -шкалу, раскрашенную так, как показано на рисунке 3d. Удалим из точки крыши константу φ_2 ; получим $\overline{\varphi}$ -шкалу, указанную на рисунке 3e, для которой не существует p -морфизма на $\overline{\varphi}$ -шкалу с меньшим числом точек, аналогично, удалив из точки крыши константу φ_1 , получим $\overline{\varphi}$ -шкалу, указанную на рисунке 3g.

Тогда по теореме 3.1 в $\overline{\varphi}$ -шкале существует явное соотношение, а именно $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

§ 4. Пополнения LC : классификация, примеры с одной и двумя константами и явные соотношения в них

В настоящем параграфе мы покажем, что любая консервативная над LC $\overline{\varphi}$ -логика включена в некоторую $\overline{\varphi}$ -логику, задаваемую конфинальным классом конечных $\overline{\varphi}$ -цепей.

4.1. Редукция к конечным $\overline{\varphi}$ -цепям в логике LC

Т е о р е м а 4.1. *Пусть $\mu = (W, S; \overline{\Phi})$ — обобщенная $\overline{\varphi}$ -шкала с корнем $o \in W$ такая, что $(W, S) \models LC$. Тогда для некоторого l существуют конечная $\overline{\varphi}$ -цепь $C_l = (C_l, \overline{\Psi})$ и $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизм $f: (W, S; \overline{\Phi}) \xrightarrow{\overline{\varphi}} (C_l, \overline{\Psi})$. При этом если в μ реализуется строго возрастающая последовательность цветов длины t , то высота $\overline{\varphi}$ -цепи C не менее t .*

Приведем ряд вспомогательных определений и утверждений, сформулированных в условиях теоремы 4.1.

Зададим на W отношение эквивалентности $x \simeq y \iff \text{col}(x) = \text{col}(y)$. Классы эквивалентности назовем *цветовыми компонентами* (для краткости *компонентами*); обозначаем их буквами X, Y, Z, \dots . Через $\text{col}(X)$ обозначим цвет компоненты X (аналогично цвету точки $x \iff \text{col}(x)$).

$$\text{col}(X) := \{\varphi_i \in \overline{\varphi} \mid \forall x \in X : x \Vdash \varphi_i\}.$$

Обозначаем $\text{COL}(X) \equiv \bigcap \{\Phi_i \mid \varphi_i \in \text{col}(X)\}$. Заметим, что $\text{COL}(X) \in S$ и $X \subseteq \text{COL}(X)$.

На множестве компонент зададим *номинальное отношение порядка*:

$$X \prec Y \equiv \text{col}(X) \subsetneq \text{col}(Y).$$

Иррефлексивность и транзитивность этого отношения очевидны.

Л е м м а 4.1. *Номинальное упорядочение компонент является линейным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X \neq Y$ — компоненты. Докажем, что $X \prec Y$ или $Y \prec X$. Предположим противное, то есть, что $X \not\prec Y$ и $Y \not\prec X$, другими словами, что

$$\text{col}(X) \not\subset \text{col}(Y) \text{ и } \text{col}(Y) \not\subset \text{col}(X).$$

Тогда найдутся константы $\varphi_i, \varphi_j \in \bar{\varphi}$ ($i \neq j$) такие, что $\varphi_i \in \text{col}(X) \setminus \text{col}(Y)$, $\varphi_j \in \text{col}(Y) \setminus \text{col}(X)$. Рассмотрим некоторые точки $x \in X$ и $y \in Y$. Имеем $x \Vdash \varphi_i$, $y \not\vdash \varphi_i$; $x \not\vdash \varphi_j$, $y \Vdash \varphi_j$. Это означает, что конусы Φ_i и Φ_j несравнимы по включению, что противоречит строению LC -шкал. \square

Напомним, что при n константах существует 2^n попарно различных цветов.

Номинальное упорядочение компонент ничего не говорит о реальном расположении компонент относительно друг друга. Следующая лемма проясняет этот момент.

Л е м м а 4.2. *Пусть $X \prec Y$ и $x \in X$. Тогда x видит какую-то точку из Y .*

Д о к а з а т е л ь с т в о (индукция по глубине компоненты $\delta(Y)$ в номинальном упорядочении).

Пусть $\delta(Y) = 1$, то есть Y — наибольшая компонента. Покажем, что $Y = \text{COL}(Y)$. Включение $Y \subseteq \text{COL}(Y)$ очевидно. Покажем, что $\text{COL}(Y) \subseteq Y$. Если это не так, то найдется точка $y \in \text{COL}(Y)$, $y \notin Y$. То есть $y \Vdash \bigwedge \{\varphi_i \mid Y \Vdash \varphi_i\}$, $\text{col}(y) \neq \text{col}(Y)$. Существует константа $\varphi_j \in \bar{\varphi}$ такая, что $\varphi_j \notin \text{col}(Y)$ и $y \Vdash \varphi_j$, то есть y входит в некоторую компоненту, расположенную номинально выше Y . Но это противоречит тому, что Y — наибольшая компонента. Таким образом, имеем $\text{COL}(Y) \neq \emptyset$, $\text{COL}(Y) \in S$. В силу строения корневых LC -шкал, любой непустой допустимый конус плотен. Поэтому x видит какую-то точку y из $\text{COL}(Y) = Y$.

Теперь пусть $\delta(Y) > 1$ и для всех компонент меньшей глубины утверждение верно. Докажем, что x видит какую-то точку из Y .

Предположим противное и рассмотрим компоненту $Z \succ Y$. Имеем $\delta(Y) < \delta(Z)$. По предположению индукции x видит хотя бы одну точку из Z . Докажем, что $x \in \text{COL}(Y) \supset \text{COL}(Z)$ методом от противного.

Допустим, что $x \notin \text{COL}(Y) \supset \text{COL}(Z)$. Тогда найдется $u \in W$ такая, что $u \geq x$, $u \in \text{COL}(Y)$, $u \notin \text{COL}(Z)$. Получаем, что, с одной стороны, и $u \notin Z$, а, с другой, так как x не видит никакую точку из Y , что $u \notin Y$. Пусть U — компонента, содержащая точку u . Имеем $U \neq Y$ и $U \neq Z$ поскольку компоненты либо совпадают, либо не пересекаются. Тогда $Y \prec U$ (так как $u \in \text{COL}(Y)$) и $U \prec Z$ (так как $u \notin \text{COL}(Z)$). Противоречие с тем, что $Z \succ Y$.

Итак, $x \in \text{COL}(Y) \supset \text{COL}(Z)$. Выберем произвольную точку $y \in Y$. С одной стороны, имеем $y \notin \text{COL}(Y) \supset \text{COL}(Z)$. С другой стороны, $y \in \text{COL}(Y)$, $x \notin \text{COL}(Y)$. Получаем два допустимых конуса $\text{COL}(Y)$ и $\text{COL}(Y) \supset \text{COL}(Z)$, несравнимых в S , что противоречит строению LC -шкал.

Таким образом, x видит какую-то точку из Y . Индукционный шаг проведен. Лемма доказана. \square

Завершим доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим множество компонент с номинальным упорядочением как искомую цепь $C := (\{X \mid X \text{ — компонента}\}, \prec)$. $\Psi_j := \{X \mid X \Vdash \varphi_j\}$ и отображение $f: W \rightarrow C$ действует по правилу: для $x \in W$ $f(x) := \{y \in W \mid \text{col}(x) = \text{col}(y)\}$.

Убедимся, что f является p -морфизмом из W на C .

Сюръективность очевидна.

Монотонность. Если $x \in X$, $y \in Y$ и $x \leq y$, то $\text{col}(X) \subseteq \text{col}(Y)$ и $X \preceq Y$.

Конусность. Следует из леммы 4.2.

Непрерывность. Рассмотрим прообраз конуса $C^x = \{\{Y\} \mid X \preceq Y\}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(C^x) &= f^{-1}(\{\{Y\} \mid X \preceq Y\}) = \bigcup \{f^{-1}(\{\{Y\} \mid X \preceq Y\})\} = \\ &= \bigcup \{Y \mid X \preceq Y\} = \text{COL}(X) \in S. \end{aligned}$$

Убедимся, что отображение f является $p_{\bar{\varphi}}$ -морфизмом из \mathcal{W} на $(C; \Psi)$. Нетрудно проверить, что $\Psi_i = f(\Phi_i)$ для любого $i \in [1, n]$. Нужно убедиться, что $f^{-1}(\Psi_j) = f^{-1}(f(\Phi_j)) = \Phi_j$. Рассмотрим прообраз конуса Ψ_j : $f^{-1}(\Psi_j) = f^{-1}(\{\{X\} \mid X \Vdash \varphi_j\}) = f^{-1}(\{X \mid X \Vdash \varphi_j\}) = \bigcup \{X \Vdash \varphi_j\} = \bigcup \{x \in W \mid x \Vdash \varphi_j\} = \Phi_j$.

Таким образом, $f: (W, S; \bar{\Phi}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} (C; \bar{\Psi})$.

Наконец заметим, что длина цепи C равна числу реализуемых компонент в $(W, S, \bar{\Phi})$. Итак, теорема доказана. \square

С л е д с т в и е 4.1. Пусть \mathfrak{M} — характеристический класс обобщенных LC - $\bar{\varphi}$ -шкал. Тогда существует конфинальный класс \mathcal{C} конечных $\bar{\varphi}$ -цепей такой, что $\mathcal{C} \preceq \mathfrak{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть C_m — цепь из $(m + 1)$ -го элемента. В силу характеристичности \mathfrak{M} для LC найдутся порожденная из некоторой шкалы класса \mathfrak{M} корневая $\bar{\varphi}$ -подшкала $(W, S, \bar{\Phi})$ и p -морфизм $h: (W, S) \rightarrow C_m$. Обозначим через $W_k := h^{-1}(\{c_k\})$ для $k \in [0, \dots, m]$ — прообразы точек цепи C_m , и пусть $\bar{W}_k := W_k \cup W_{k+1} \cup \dots \cup W_m$. Заметим, что $\bar{W}_k \in S$ как прообраз конуса $\{c_k, c_{k+1}, \dots, c_m\}$.

Расширим исходный набор констант $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ константами $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{n+m}$ по числу прообразов. Расширенный набор констант обозначим через $\bar{\bar{\varphi}}$. На обобщенной $\bar{\varphi}$ -шкале $(W, S; \bar{\Phi})$ каждую новую константу φ_{n+k} интерпретируем конусом \bar{W}_k . Тем самым получаем новую $\bar{\varphi}$ -шкалу $(W, S; \bar{\bar{\Phi}})$. В силу теоремы 4.1 существует $\bar{\bar{\varphi}}$ -цепь $\mathcal{C} = (C; \bar{\bar{\Psi}})$ и $p_{\bar{\bar{\varphi}}}$ -морфизм $f: (W, S; \bar{\bar{\Phi}}) \xrightarrow{\bar{\bar{\varphi}}} (C; \bar{\bar{\Psi}})$, где $\bar{\bar{\Psi}}$ получается из $\bar{\Psi}$ добавлением конусов $\Psi_{n+k} = \bar{W}_k$. Конусы $\Phi_{n+m}, \Phi_{n+m-1}, \dots, \Phi_{n+1}$ образуют строго возрастающую цепь в μ , поэтому в силу второго утверждения теоремы 4.1 $\bar{\varphi}$ -цепь \mathcal{C} имеет высоту не менее чем $m + 1$.

Теперь «сотрем» в μ и в \mathcal{C} выделенные конусы с номерами $n + m, n + m - 1, \dots, n + 1$. Получаем $f: (W, S; \bar{\Phi}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} (C; \bar{\Psi})$.

Проведя описанное построение для всех конечных цепей C_m , получим искомый класс \mathcal{C} $\bar{\varphi}$ -цепей. \square

С л е д с т в и е 4.2. Любая консервативная над LC $\bar{\varphi}$ -логика включена в $\bar{\varphi}$ -логику некоторого конфинального класса конечных $\bar{\varphi}$ -цепей.

Таким образом, для отыскания примеров полных по Новикову расширений LC достаточно рассматривать конфинальные классы конечных $\bar{\varphi}$ -цепей.

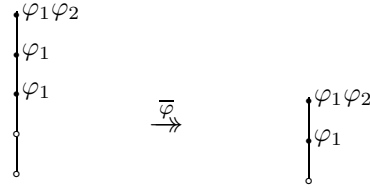
4.2. Прототипы и классификация полных по Новикову расширений логики LC

В работе [25] дано описание полных по Новикову расширений логики LC в случае с конечным числом констант. Для построения полных по Новикову расширений используется *метод наростов*.

В своих дальнейших рассуждениях вместо понятия «нарост» мы используем его цветовой аналог — «прототип».

О п р е д е л е н и е 4.1. Прототипом \mathcal{C} называется конечная $\bar{\varphi}$ -цепь $\mathcal{C} = (C, \Psi_1, \dots, \Psi_n)$, в которой все точки имеют попарно различные цвета.

Заметим, что всякая конечная $\bar{\varphi}$ -цепь $p_{\bar{\varphi}}$ -морфируется на некоторый прототип (для этого достаточно отождествить точки, имеющие одинаковый цвет):



Рассмотрим произвольный конфинальный подкласс \mathcal{C} класса всех $\bar{\varphi}$ -цепей. Пусть $\bar{\eta} := \{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_s} \mid s < n\}$ — некоторый цвет. В отдельно взятой шкале *индексом цвета* $\bar{\eta}$ назовем число точек цвета $\bar{\eta}$, то есть $ind_{\bar{\eta}}(\mathcal{C}) := |\{x \in \mathcal{C} \mid \text{col}(x) = \bar{\eta}\}|$. *Индексом цвета $\bar{\eta}$ в классе \mathcal{C}* назовем $ind_{\bar{\eta}}(\mathcal{C}) := \sup\{ind_{\bar{\eta}}(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \in \mathcal{C}\}$. Заметим, что индекс цвета в классе может быть как нулевым, так и бесконечным.

В силу конфинальности класса \mathcal{C} найдется хотя бы один цвет, имеющий бесконечный индекс в этом классе. Все цвета в $\bar{\varphi}$ -цепи упорядочены, их всего 2^n . Из всех цветов бесконечного индекса найдется максимальный по включению $\bar{\eta}$ (если их несколько, то без ограничения общности выберем любой из них). Рассмотрим конфинальный подкласс \mathcal{C}_1 , состоящий из $\bar{\varphi}$ -цепей со сколь угодно длинными отрезками цвета $\bar{\eta}$. В каждой цепи класса \mathcal{C}_1 удалим все точки, расположенные ниже отрезка цвета $\bar{\eta}$. Полученные $\bar{\varphi}$ -цепи по прежнему образуют конфинальный класс \mathcal{C}_2 со сколь угодно длинными выбранными отрезками цвета $\bar{\eta}$ (каждая $\bar{\varphi}$ -цепь класса \mathcal{C}_2 является $\bar{\varphi}$ -подцепью некоторой $\bar{\varphi}$ -цепи класса \mathcal{C}_1 , поэтому $\mathcal{C}_2 \stackrel{\bar{\varphi}}{\approx} \mathcal{C}_1$). Поскольку прототипы образуют конечное множество, то найдется конфинальный подкласс $\mathcal{C}_3 \subseteq \mathcal{C}_2$, все $\bar{\varphi}$ -шкалы которого отображаются на один и тот же прототип. Во всех шкалах класса \mathcal{C}_3 корень имеет цвет $\bar{\eta}$, кроме того, существует шкалы со сколь угодно длинными отрезками цвета $\bar{\eta}$. В каждой шкале класса \mathcal{C}_3 склеиваем все равноцветные точки, за исключением точек, имеющих цветовой тип $\bar{\eta}$. Получаем конфинальный класс \mathcal{C}_4 , такой, что $\mathcal{C}_4 \stackrel{\bar{\varphi}}{\approx} \mathcal{C}_3$. Таким образом, класс \mathcal{C}_4 — искомый. Класс \mathcal{C}_4 можно описать другими словами.

Для данного прототипа \mathcal{C} рассмотрим операцию *размножения корня*: построим класс $[\mathcal{C}]_\infty := \{\mathcal{C}_k \mid k \in \omega\}$, где \mathcal{C}_k получено из \mathcal{C} дублированием корня в k экземплярах с сохранением цвета. Из предыдущих построений получаем, что класс \mathcal{C}_4 является конфинальным подклассом класса $[\mathcal{C}]_\infty$. Причем \mathcal{C}_4 и $[\mathcal{C}]_\infty$ имеют один и тот же прототип \mathcal{C} .

Из проведенных построений и доказанных утверждений вытекает, что любая консервативная над LC $\bar{\varphi}$ -логика включена в $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для подходящего прототипа \mathcal{C} .

Таким образом, полными по Новикову $\bar{\varphi}$ -расширениями логики Даммета являются $\bar{\varphi}$ -логики $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для всевозможных прототипов \mathcal{C} .

В итоге, установлена

Теорема 4.2 (А). *Всякое консервативное $\bar{\varphi}$ -расширение логики Даммета включено в $\mathcal{L}([\mathcal{C}]_\infty)$ для некоторого прототипа \mathcal{C} .*

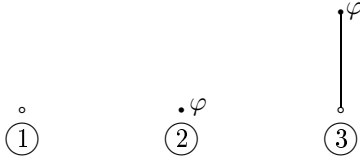
Теорема 4.2 (Б). *Если \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 — неизоморфные прототипы, то $\bar{\varphi}$ -логики, определяемые этими прототипами несовместны над LC , то есть их объединение порождает неконсервативную над LC $\bar{\varphi}$ -логику.*

Действительно, найдется константная формула A такая, что $A \models \mathcal{C}_1$ и $A \not\models \mathcal{C}_2$. Тогда $A \in \mathcal{L}([\mathcal{C}_1]_\infty)$ и $A \notin \mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$. Так как $\mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$ полна по Новикову, то A не присоединима к $\mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$, то есть найдется чистая формула D такая, что $A \rightarrow D \in \mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$. Очевидно, что в объединении $\mathcal{L}([\mathcal{C}_1]_\infty)$ и $\mathcal{L}([\mathcal{C}_2]_\infty)$ выводится D (не принадлежащая LC).

4.3. Примеры пополнений LC с одной и двумя константами и явные соотношения в них.

Перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\bar{\varphi}$ -цепей с одной и с двумя константами.

1. С одной константой $\bar{\varphi} = \{\varphi\}$. Имеем следующие прототипы:



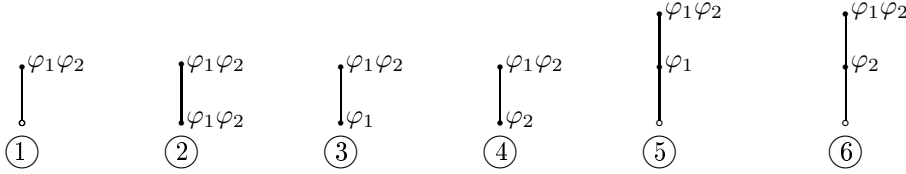
2. С двумя константами $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Во-первых, есть прототип с обеими пустыми константами, изоморфный прототипу 1 из предыдущего абзаца.

Во-вторых, есть прототипы, изоморфные прототипу 2 из предыдущего абзаца, где φ заменено на φ_1 (или φ_2).

В-третьих, есть прототипы, изоморфные прототипу 3 из предыдущего абзаца, где φ заменено на φ_1 (или φ_2).

Интересны прототипы с обеими непустыми константами:



С помощью методики, указанной в предложении 3.1 проанализированы на предмет явных соотношений прототипы для одной и для двух констант. Результаты приведены в двух нижеследующих таблицах.

Таблица 1. Явные соотношения в прототипах φ -цепей для одной константы

Прототип №	Соотношение
1	$\varphi \leftrightarrow 0$
2	$\varphi \leftrightarrow 1$
3	нет

Таблица 2. Явные соотношения для двух констант в прототипах φ -цепей с непустыми φ_1 и φ_2

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	4	$\varphi_2 \leftrightarrow 1$
2	$\varphi_1 \leftrightarrow 1, \varphi_2 \leftrightarrow 1$	5	нет
3	$\varphi_1 \leftrightarrow 1$	6	нет

§ 5. Пополнения $L2$: классификация, примеры с одной и двумя константами и явные соотношения в них

В настоящем параграфе мы покажем, что любая консервативная над $L2$ $\bar{\varphi}$ -логика включена в некоторую $\bar{\varphi}$ -логику, задаваемую подходящим конфинальным классом конечных $\bar{\varphi}$ -вееров.

В работе [25] дано описание полных по Новикову расширений логики $L2$ для случая одной константы. В настоящем параграфе мы приведем аналогичные результаты для случая n констант.

5.1 Редукция к конечным $\bar{\varphi}$ -веерам в логике $L2$

Теорема 5.1. Пусть $(W, S; \bar{\Phi})$ — обобщенная $\bar{\varphi}$ -шкала с корнем o такая, что $(W, S) \models L2$, F_m — веер и $h: (W, S) \twoheadrightarrow F_m$. Тогда существуют $\bar{\varphi}$ -веер \mathcal{F}_l , где $m \leq l \leq m \cdot 2^n$, и $p_{\bar{\varphi}}$ -морфизм $f: (W, S; \bar{\Phi}) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathcal{F}_l$.

Пусть точка a_0 — корень F_m , а точки a_1, a_2, \dots, a_m образуют крышу веера F_m . Обозначим полные прообразы точек a_i через $W_0 := h^{-1}(\{a_0\})$, $W_i := h^{-1}(\{a_i\})$ для $i = [1, m]$. Прообраз крыши веера F_m обозначим через $\bar{W} := \bigcup_{i=1}^m W_i$. Из определения p -морфизма получаем, в частности, что $\bar{W} \in S$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, сформулированных в условиях теоремы 5.1.

Лемма 5.1. Пусть $W_0 \cap \Phi_j \neq \emptyset$. Тогда $W_0 \subset \Phi_j$.

Доказательство. Пусть $x \in W_0 \cap \Phi_j$ и $W_0 \not\subset \Phi_j$. Тогда $o \notin \Phi_j$. Получили $o \prec x$. Далее, конус \overline{W} плотен в W , поэтому найдется точка $y \in \overline{W}$ такая, что $y \geq x$. Поскольку $x \in W_0$, получаем $x < y$. Отсюда $x \prec y$. Получили \prec -цепь $o \prec x \prec y$, что противоречит строению $L2$ -шкал. \square

Следствие 5.1. Для любых $x, y \in W_0$ имеем $\text{col}(x) = \text{col}(y)$.

Пусть $i > 0$. Рассмотрим на каждом W_i отношение «равноцветности»

$$x \simeq y \iff \text{col}(x) = \text{col}(y).$$

Поскольку число возможных цветов равно 2^n , множество W_i разбивается на дизъюнктные непустые компоненты в количестве от 1 до 2^n . Компоненту, содержащую точку $x \in W_i$, можно записать так:

$$[x] = W_i \cap \bigcap_{\varphi_j \in \text{col}(x)} \Phi_j \cap \bigcap_{\varphi_j \notin \text{col}(x)} \overline{\Phi_j}$$

(здесь $\overline{\Phi_j}$ обозначает теоретико-множественное дополнение).

Лемма 5.2. Имеет место равенство $W_i \setminus \Phi_j = W_i \cap (-\Phi_j)$ для $\forall i \in [1, m]$ и $\forall j \in [1, n]$.

Доказательство. Включение \supseteq следует из того, что $-\Phi_j \subseteq \overline{\Phi_j}$ (согласно определению операции псевдодополнения на конусах).

Докажем обратное включение. Рассмотрим точку $x \in W_i$ такую, что $x \notin \Phi_j$. Допустим противное, что $x \in -\Phi_j$. Тогда найдется точка $y \in \Phi_j$ такая, что $y \geq x$. Получаем $x < y$, поэтому $x \prec y$. Кроме того, $x \in W_i$, $o \notin W_i$, то есть $o \prec x$. Как и в доказательстве леммы 5.1, получили \prec -цепь $o \prec x \prec y$. Quod non. \square

Следствие 5.2. Для любого $i \in [1, m]$, для любого $x \in W_i$ компонента $[x]$ разбиения конуса W_i является элементом п.б.а. S .

Лемма 5.3. Пусть $y \in W_0$. Для любого $i \in [1, m]$, для любой компоненты X разбиения конуса W_i имеем $W^y \cap X \neq \emptyset$.

Доказательство (от противного). Пусть нашлась точка $y \in W_0$, которая не видит ни одной точки из X . Тогда $y \in -X$ (в силу предыдущего следствия $X \in S$).

Корень o видит компоненту X (она непуста), поэтому $o \notin -X$. Получили $o \prec y$.

Далее, конус \overline{W} плотен в W , поэтому найдется $z \in \overline{W}$ такая, что $y \leq z$. Так как $y \in W_0$, имеем $y < z$ и $y \notin \overline{W}$, т.е. $y \prec z$.

Снова получили \prec -цепь $o \prec y \prec z$. Quod non. \square

Пусть конус W_i разбит на k_i компонент $X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^{k_i}$. В веере F_m каждую максимальную точку a_i размножим в k_i точек $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{k_i}$. Получим l -веер F_l , где $l = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ (корень F_l по прежнему обозначен через a_0).

Зададим отображение $f: W \rightarrow F_l$ по следующему правилу:

$$f(W_0) = a_0,$$

$$f(X_i^s) = a_i^s \text{ для } s \in [1; k_i].$$

Сюръективность f очевидна.

Монотонность. Пусть $x < y$ в W . Разберем возможные случаи отдельно.

Если $x, y \in W_0$, то $f(x) = a_0 = f(y)$.

Если $x \in W_0$ и $y \in W_i$, то $f(x) = a_0$, $f(y) \in \{a_i^1, \dots, a_i^{k_i}\}$, поэтому $f(x) < f(y)$.

Если $x, y \in X_i^j$, то $f(x) = f(y)$.

Наконец, в предположении $x < y$ точки x и y не могут принадлежать разным компонентам разбиения конуса \overline{W} . В самом деле, если $y \in X_i^j$ и $x \notin X_i^j$, то $x \prec y$ (напомним, что компоненты являются элементами п.б.а. S). При этом $x \in \overline{W}$, $o \notin \overline{W}$. Получили \prec -цепь $o \prec x \prec y$, что невозможно.

Конусность. Пусть $f(x) < b$ в веере F_l . Это означает, что $f(x) = a_0$, т.е. $x \in W_0$ и b совпадает с некоторым a_i^s . В силу леммы 5.3 точка x видит компоненту X_i^s , т.е. $W \cap X_i^s \neq \emptyset$. Значит, найдется $y > x$ такая, что $f(y) = a_i^s = b$.

Непрерывность. Покажем, что для любого $X \in \text{Con } F_l$ выполнено $f^{-1}(X) \in S$.

Для конуса $\{a_i^s\}$ имеем $h^{-1}(\{a_i^s\}) = X_i^s \in S$ в силу леммы 5.2.

Для конуса F_l имеем $h^{-1}(F_l) = W \in S$.

Превратим веер F_l в $\overline{\varphi}$ -веер, перенося раскраску из $(W, S; \overline{\Phi})$:

$\text{col}(a_0) := \text{col}(W_0)$ и $\text{col}(a_i^s) := \text{col}(X_i^s)$.

Корректность этого определения следует из следствия 5.1 и из определения отношения равноцветности.

Таким образом получили $\overline{\varphi}$ -веер \mathcal{F}_l и желаемый $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизм. Теорема 5.1 доказана. \square

С л е д с т в и е 5.3. Пусть \mathcal{M} — произвольный $L2$ -характеристический класс обобщенных $\overline{\varphi}$ -шкал. Тогда существует конфинальный класс \mathcal{F} $\overline{\varphi}$ -вееров такой, что $\mathcal{F} \stackrel{\overline{\varphi}}{\cong} \mathcal{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем натуральное число m . В силу $L2$ -характеристичности класса \mathcal{M} найдутся порожденная из некоторой шкалы этого класса корневая подшкала $(W, S; \overline{\Phi})$ и p -морфизм $h: (W, S) \twoheadrightarrow F_m$. По основной лемме найдется $\overline{\varphi}$ -веер \mathcal{F}_l (где $m \leq l \leq m \cdot 2^n$) и $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизм $(W, S; \overline{\Phi}) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathcal{F}_l$.

Натуральный ряд содержит бесконечное число попарно не пересекающихся интервалов вида $[m, m \cdot 2^n]$. Для каждого из этих интервалов найдется $\overline{\varphi}$ -веер \mathcal{F}_l , где $l \in [m, m \cdot 2^n]$. Все такие \mathcal{F}_l и образуют искомый класс \mathcal{F} . \square

В заключение этого пункта сформулируем следующий результат.

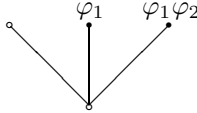
П р е д л о ж е н и е 5.1. Полные по П.С. Новикову расширения логики $L2$ в языке с несколькими константами характеризуются подходящими конфинальными классами $\overline{\varphi}$ -вееров.

5.2. Прототипы и классификация полных по Новикову расширений логики $L2$

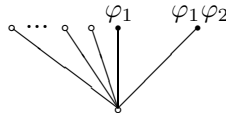
О п р е д е л е н и е 5.1. Прототипом \mathcal{F} будем называть $\overline{\varphi}$ -веер $\mathcal{F} = (F; \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$, все максимальные точки которого имеют разные цвета.

Далее максимальные точки $\overline{\varphi}$ -веера \mathcal{F} будем рассматривать вместе с их цветами.

П р и м е р 5.1. В случае двух констант один из прототипов выглядит так:



Пусть \mathcal{F} — прототип и a — точка крыши $\overline{\varphi}$ -веера \mathcal{F} . Обозначим через $\mathcal{F}[\mathcal{F}, a]$ класс $\overline{\varphi}$ -вееров, полученный из \mathcal{F} *размножением точки a с сохранением цвета* этой точки. Например, при размножении левой точки в веере из предыдущего примера $\overline{\varphi}$ -веера этого класса будут иметь такой вид:



Л е м м а 5.4. Любой $\overline{\varphi}$ -веер $p_{\overline{\varphi}}$ -морфно отображается на некоторый прототип.

Действительно, склеивание всех равноцветных точек крыши в одну является искомым $p_{\overline{\varphi}}$ -морфизмом.

Сразу получаем, что в прототипе \mathcal{F} и классах вида $\mathcal{F}[\mathcal{F}, a]$ истинны одни и те же константные формулы. То есть имеет место

С л е д с т в и е 5.4. Для каждой точки a из крыши веера \mathcal{F} имеет место равенство $\mathcal{L}_c(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_c(\mathcal{F}[\mathcal{F}, a])$.

Для каждой точки a из крыши прототипа введем константную формулу $\text{Col}(a)$, описывающую ее цвет:

$$\text{Col}(a) \equiv \bigwedge \{\varphi_j \mid a \Vdash \varphi_j\} \wedge \bigwedge \{\neg\varphi_s \mid a \nVdash \varphi_s\}.$$

Лемма 5.5. *Для неизоморфных прототипов \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 имеем $\mathcal{L}_c(\mathcal{F}_1) \neq \mathcal{L}_c(\mathcal{F}_2)$.*

Доказательство. Если крыши прототипов неизоморфны, то в одной из них, например, в крыше веера \mathcal{F}_1 , найдется точка a , не имеющая цветового аналога в крыше веера \mathcal{F}_2 . Тогда получаем $\mathcal{F}_2 \models \neg\text{Col}(a)$ и $\mathcal{F}_1 \not\models \neg\text{Col}(a)$. Если же крыши изоморфны, то различны цвета корней этих шкал, то есть найдется константа, истинная в одной из них и не истинная в другой. \square

Лемма 5.6. *Для всех точек a, b , $a \neq b$, крыши веера \mathcal{F} выполнено соотношение*

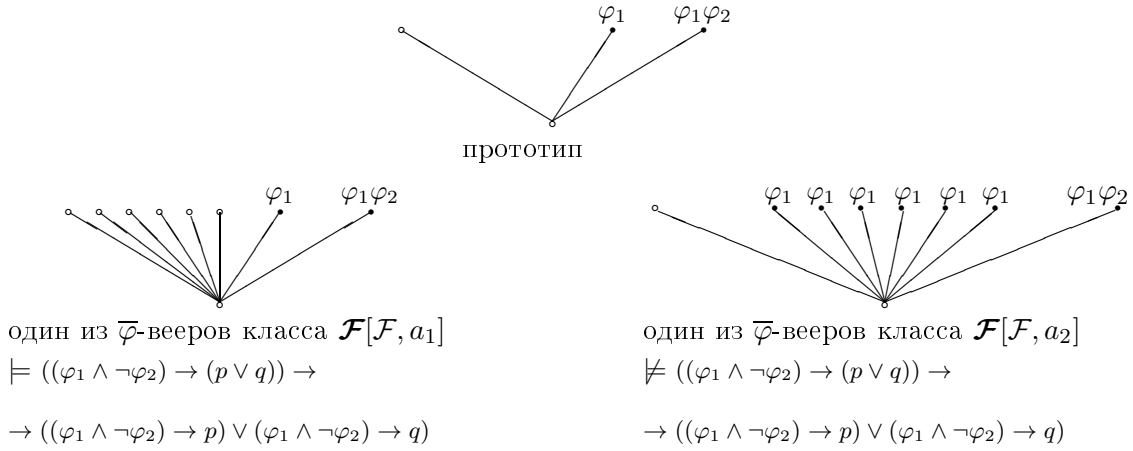
$$\mathcal{L}(\mathcal{F}[\mathcal{F}, a]) \neq \mathcal{L}(\mathcal{F}[\mathcal{F}, b]).$$

Доказательство. Аксиомой неразложимости для точки a назовем формулу

$$\text{Irr}(a) \equiv (\text{Col}(a) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow ((\text{Col}(a) \rightarrow p) \vee (\text{Col}(a) \rightarrow q)).$$

Для двух классов $\mathcal{F}[\mathcal{F}, a]$ и $\mathcal{F}[\mathcal{F}, b]$ аксиома неразложимости $\text{Irr}(b)$ выполнена в первом классе и не выполнена во втором, и наоборот, $\text{Irr}(a)$ выполнена во втором и не выполнена в первом. Таким образом, $\overline{\varphi}$ -логики классов, полученных размножением разных точек одного прототипа, различны. \square

Пример 5.2. Рассмотрим прототип, один из $\overline{\varphi}$ -вееров класса $\mathcal{F}[\mathcal{F}, a_1]$ и один из $\overline{\varphi}$ -вееров класса $\mathcal{F}[\mathcal{F}, a_2]$:



Отметим, что для набора из n констант множество всех прототипов конечно, поскольку число всевозможных цветов точек $\overline{\varphi}$ -шкалы равно 2^n .

Теорема 5.2. *Семейство полных расширений логики $L2$ состоит из всевозможных $\overline{\varphi}$ -логик вида $\mathcal{L}(\mathcal{F}[\mathcal{F}, a])$, где \mathcal{F} — прототип и a — точка крыши веера \mathcal{F} .*

Доказательство. Согласно предложению 5.1 полные расширения $L2$ определяются конфинальными классами $\overline{\varphi}$ -вееров.

Рассмотрим произвольный конфинальный класс \mathcal{F}_1 $\overline{\varphi}$ -вееров. По лемме 5.4 каждый $\overline{\varphi}$ -веер этого класса $p_{\overline{\varphi}}$ -морфно отображается на некоторый прототип. Поскольку число прототипов конечно, найдется конфинальный подкласс $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$, в котором все члены имеют один и тот же прототип \mathcal{F} .

Теперь работаем с \mathcal{F}_2 : в его прототипе конечное число точек, поэтому для этого класса существует конфинальный подкласс $\mathcal{F}_3 \subseteq \mathcal{F}_2$ и точка a из крыши прототипа \mathcal{F} такие, что \mathcal{F}_3 содержит шкалы со сколь угодно большими прообразами точки a .

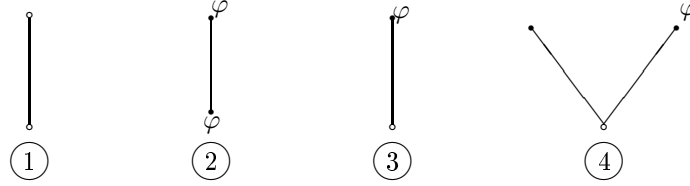
В каждом веере из \mathcal{F}_3 склеим все равноцветные точки крыши в одну, кроме тех точек, которые являются прообразами точки a . Получим класс $\mathcal{F}_4 \cong_{\bar{\varphi}} \mathcal{F}_3$. Кроме того, имеем $\mathcal{F}_4 \subseteq \mathcal{F}[\mathcal{F}, a]$. С другой стороны $\mathcal{F}[\mathcal{F}, a] \cong_{\bar{\varphi}} \mathcal{F}_4$. Поэтому $\mathcal{L}(\mathcal{F}[\mathcal{F}, a]) = \mathcal{L}(\mathcal{F}_4)$.

Таким образом, любая консервативная над $L2$ $\bar{\varphi}$ -логика включена в какую-то $\bar{\varphi}$ -логику вида $\mathcal{L}(\mathcal{F}(\mathcal{F}, a))$. Все $\bar{\varphi}$ -логики такого вида различны.

Тем самым, классификация полностью завершена (то есть решена проблема-максимум). \square

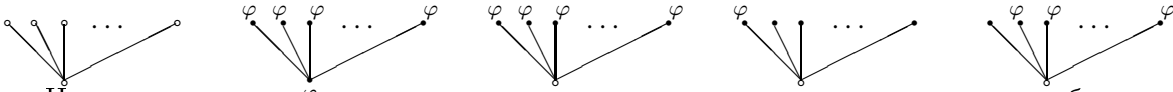
5.3 Примеры пополнений $L2$ с одной и двумя константами и явные соотношения в них

Перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\bar{\varphi}$ -вееров с одной константой:



Отметим, что в работе [25] дано следующее описание полных по Новикову расширений логики $L2$ для случая одной константы: логика $L2$ в языке с одной дополнительной константой имеет ровно пять полных по Новикову расширений $\mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^5$, характеризуемых классами φ -вееров $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^5$.

Типичные представители этих классов выглядят следующим образом:



На соответствующих φ -шкалах каждого из этих пяти классов определенным образом задано значение константы φ , которое определяет так называемый «цветовой тип класса».

$\mathcal{F}^1 := \{\mathcal{F}_n^1 \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}_n^1 = (F_n, \emptyset)$. Цветовой тип класса « φ — нигде».

$\mathcal{F}^2 := \{\mathcal{F}_n^2 \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}_n^2 = (F_n, F_n)$. Цветовой тип класса « φ — везде».

$\mathcal{F}^3 := \{\mathcal{F}_n^3 \mid n > 0\}$, где $\mathcal{F}_n^3 = (F_n, \{m_1, \dots, m_n\})$. Цветовой тип класса « φ — во всех точках крыши».

$\mathcal{F}^4 := \{\mathcal{F}_n^4 \mid n > 1\}$, где $\mathcal{F}_n^4 = (F_n, \{m_1\})$. Цветовой тип класса « φ — в единственной точке крыши»;

$\mathcal{F}^5 := \{\mathcal{F}_n^5 \mid n > 1\}$, где $\mathcal{F}_n^5 = (F_n, \{m_2, \dots, m_n\})$. Цветовой тип класса « φ — во всех точках крыши, кроме одной».

Отметим, что упомянутые пять цветовых типов имеют смысл и для каждого бесконечного φ -веера.

Перечислим все попарно неизоморфные прототипы $\bar{\varphi}$ -вееров с двумя константами $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$:

Во-первых, есть прототип с обеими пустыми константами, изоморфный прототипу 1 из предыдущего параграфа.

Во-вторых, есть прототипы, изоморфные предыдущим 2, 3, 4, где φ заменено на φ_1 (пустое φ_2).

В-третьих, есть прототипы, изоморфные предыдущим 2, 3, 4, где φ заменено на φ_2 (пустое φ_1).

Интересны прототипы с обеими непустыми константами:

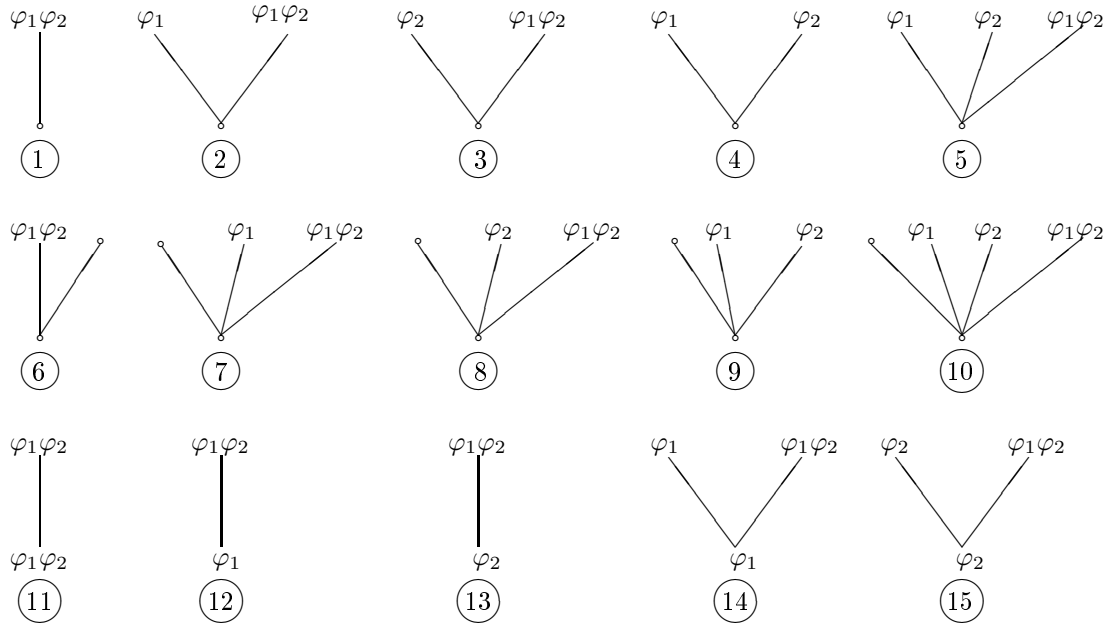
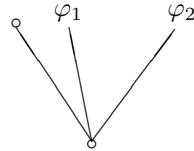


Рис. 5

Пример 5.3. Если прототип 9 из рисунка 5



обеднить до набора из одной константы $\{\varphi_1\}$ (т.е. «стереть» φ_2), то полученный $\bar{\varphi}$ -веер сжимается в прототип типа 4 из предыдущего примера. Аналогично получается при стирании константы φ_1 . Таким образом, прототип 9 не содержит явных соотношений.

С помощью этой методики на основе предложения 3.1 проанализированы прототипы для одной и для двух констант. Результаты приведены в двух нижеследующих таблицах.

Таблица 3. Явные соотношения в прототипах φ -вееров с одной константой

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi \leftrightarrow 0$	3	нет
2	$\varphi \leftrightarrow 1$	4	нет

Таблица 4. Явные соотношения для двух констант в прототипах φ -вееров с непустыми φ_1 и φ_2

Прототип №	Соотношение	Прототип №	Соотношение
1	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	9	нет
2	$\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \neg \varphi_2)$	10	нет
3	$\varphi_2 \leftrightarrow (\varphi_1 \vee \neg \varphi_1)$	11	$\varphi_1 \leftrightarrow 1, \varphi_2 \leftrightarrow 1$
4	$\varphi_1 \leftrightarrow \neg \varphi_2$	12	$\varphi_1 \leftrightarrow 1$
5	нет	13	$\varphi_2 \leftrightarrow 1$
6	$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	14	$\varphi_1 \leftrightarrow 1$
7	нет	15	$\varphi_2 \leftrightarrow 1$
8	нет	-	-

§ 6. Пополнения $L3$: классификация, примеры с одной константой и явные соотношения в них

В данном параграфе мы рассматриваем расширения логики $L3$ с одной константой.

6.1. Редукция к конечным φ -даймонам в логике $L3$

Теорема 6.1. Пусть $(W, S; \Phi)$ — φ -шкала с корнем $o \in W$ такая, что $(W, S) \models L3$, D_n — даймонд и $h: (W, S) \twoheadrightarrow D_n$. Тогда для некоторого $l \in [n; 2n+1]$ существуют φ -даймонд $\mathcal{D}_l = (D_l, \Psi)$ и p_φ -морфизм $f: (W, S; \Phi) \xrightarrow{\varphi} (D_l, \Psi)$.

Пусть $W_r := h^{-1}(\{r\})$ — прообраз корня, $W_i := h^{-1}(\{m_i\})$ для $i \in [1, n]$ — прообразы миддла, $W_t := h^{-1}(\{t\})$ — прообраз топа. Эти прообразы образуют разбиение множества W . Из определения p -морфизма получаем, в частности, что $W_t \in S$ и $W_t \cup W_i \in S$, для $i \in [1, n]$.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, сформулированных в условиях теоремы 6.1.

Лемма 6.1. Пусть $x \in W$ и $\Phi \neq \emptyset$, тогда

- (1) $x \in W_r$, если и только если $d(x) = 3$;
- (2) если $d(x) = 1$, то $x \in W_t \cap \Phi$;
- (3) если $x \in W_i$ для некоторого $i \in [1, n]$, то $d(x) = 2$;
- (4) если $x \in W_t$, то $d(x) \leq 2$;
- (5) если $x \in W_t \setminus \Phi$, то $d(x) = 2$.

Доказательство. 1) Необходимость следует из определения даймонда, предложения 1.1 и предложения 2.5. Для доказательства достаточности положим $d(x) = 3$ и $x \notin W_r$. Тогда либо $x \in W_t$, либо $x \in W_i \subset W_i \cup W_t$ для некоторого $i \in [1, n]$. В любом случае для $o \in W_r$ получаем $o \prec x$ (так как $W_t \in S, W_i \cup W_t \in S$), откуда $d(o) > 3$ (quod non).

2) Так как $\Phi \neq \emptyset$, то $o \notin -\Phi$. В силу $(W, S) \models \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ имеем $o \in --\Phi$. Далее, если $x \notin \Phi$, то $x \in --\Phi$ и найдется $y \in \Phi$ такая, что $y > x$, откуда $y \succ x$, что противоречит условию. Если $d(x) = 1$, то по предложению 1.1 $d(h(x)) = 1$, откуда $h(x) = t$ и $x \in W_t$.

3) Если $d(x) = 3$, то $x \in W_r$ по пункту 6.1, а если $d(x) = 1$, то $x \in W_t$ по пункту 2.

4) Действительно, если $d(x) = 3$, то из пункта 6.1 следует $W_r \cap W_t \neq \emptyset$, что противоречит определению множеств W_t и W_r .

5) Если $d(x) = 1$, то $x \in \Phi$ по пункту 2, что приводит к противоречию. □

Лемма 6.2. Если $W_r \cap \Phi \neq \emptyset$, то $\Phi = W$.

Доказательство. Достаточно показать, что $o \in \Phi$. Если $o \notin \Phi$, по условию найдется $x \in W_r \cap \Phi$ такая, что $o \prec x$, откуда $d(o) > 3$ (quod non). □

Лемма 6.3. Пусть $x, y \in W$ и $\Phi \neq \emptyset$.

- (1) Если $x \in W_i \cap \Phi$ и $y \in W_i \setminus \Phi$ для $i \in [1, n]$, то x и y несравнимы.
- (2) Если $x \in W_i$ и $y \in W_t \setminus \Phi$ для $i \in [1, n]$, то $x \not\leq y$.

Доказательство. 1) По условию $x \in \Phi$, $y \notin \Phi$, значит $x \neq y$. Случай $x < y$ невозможен, так как Φ есть конус. Случай $y < x$ также невозможен, так как иначе $y \prec x$, откуда $d(y) > d(x) = 2$, что противоречит пункту 3 леммы 6.1.

2) Если $x \leq y$, то W_t отделяет x от y , значит $x \prec y$, откуда $d(x) > d(y)$, что противоречит пунктам 3 и 5 леммы 6.1. □

Лемма 6.4. Пусть $x \in W$ и $\Phi \neq \emptyset$.

- (1) Если $x \in W_r$ и $W_i \cap \Phi \neq \emptyset$ для $i \in [1, n]$, то x видит какую-то точку из $W_i \cap \Phi$.
- (2) Если $x \in W_r$ и $W_i \setminus \Phi \neq \emptyset$ для $i \in [1, n]$, то x видит какую-то точку из $W_i \setminus \Phi$.
- (3) Если $x \in W_r$ и $W_t \setminus \Phi \neq \emptyset$, то x видит какую-то точку из $W_t \setminus \Phi$.
- (4) Точка x видит какую-то точку из множества $W_t \cap \Phi$.

Доказательство. 1) Пусть не существует $y \in W_i \cap \Phi$ такого, что x видит y . Тогда $x \in ((W_i \cup W_t) \cap \Phi) \supset W_t$, однако $o \notin ((W_i \cup W_t) \cap \Phi) \supset W_t$, при этом $((W_i \cup W_t) \cap \Phi) \supset W_t \in S$. Получаем $o \prec x$, откуда $d(o) > 3$, что противоречит пункту 6.1 леммы 6.1.

2) Пусть не существует $y \in W_i \setminus \Phi$ такого, что x видит y . Тогда $x \in (W_i \cup W_t) \supset (W_t \cup \Phi)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям пункта 1).

3) Пусть не существует $y \in W_t \setminus \Phi$ такого, что x видит y . Тогда для произвольного $z \geq x$: если $z \in W_t$, то $z \in \Phi$. Значит $x \in W_t \supset \Phi$, но $o \notin W_t \supset \Phi$, откуда $o \prec x$ (quod non).

4) По свойству конусности h найдется точка $y \geq x$ такая, что $y \in W_t$. Если $y \in W_t \cap \Phi$, то требуемое доказано. Если $y \in W_t \setminus \Phi$, то $d(x) = 2$ по пункту 5 леммы 6.1, значит найдется точка $z \geq y$ такая, что $d(z) = 1$, откуда $z \in W_t \cap \Phi$ по пункту 2 леммы 6.1. \square

Дальнейшие рассуждения и построения зависят от распределения конуса Φ по компонентам разбиения W , а также строения W_t .

Если $\Phi = \emptyset$, то «перенос» цвета на D_n производится непосредственно: $f := h$, $\Psi := \emptyset$ и $\mathcal{D}_n := (D_n; \emptyset)$, при этом условие согласованности цветов выполнено:

$$f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset = \Phi.$$

Если $W_r \cap \Phi \neq \emptyset$, тогда по лемме 6.2 получаем $\Phi = W$, откуда, аналогично предыдущему абзацу, $f := h$, $\Psi := D_n$, $f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(D_n) = W = \Phi$.

Далее предположим, что $\Phi \neq \emptyset$ и $W_r \cap \Phi = \emptyset$. Напомним, что в W имеется n прообразов точек миддла. Пусть без ограничения общности W_1, \dots, W_k — частично окрашенные прообразы (если таких прообразов нет, то $k := 0$); W_{k+1}, \dots, W_s — полностью окрашенные прообразы (если таковых нет, то $s := k$); W_{s+1}, \dots, W_n — полностью неокрашенные прообразы (если таковых нет, то $s := n$). Прообраз топа может быть либо частично окрашен либо окрашен полностью.

Зададим множество $\{t, m_1, \dots, m_n, r\} \cup \{m'_1, \dots, m'_k\} \cup \{m_0\}$ попарно различных элементов. Множество $\{m_0\}$ добавляем, только если $W_t \setminus \Phi \neq \emptyset$. Для всякого $x \in W$ положим

$$f(x) = \begin{cases} t, & x \in W_t \cap \Phi; \\ m_i, & x \in W_i \cap \Phi \text{ для } i \in [1, k]; \\ m'_i, & x \in W_i \setminus \Phi \text{ для } i \in [1, k]; \\ m_i, & x \in W_i \text{ для } i \in [k+1, n]; \\ r, & x \in W_r. \end{cases}$$

Если $W_t \setminus \Phi \neq \emptyset$, то для $x \in W_t \setminus \Phi$ полагаем $f(x) = \{m_0\}$. Ясно, что: $r \in f(W)$; $m_0 \in f(W)$, если $W_t \setminus \Phi \neq \emptyset$; для $i \in [1, k]$ имеем $m_i \in f(W)$, если $W_i \cap \Phi \neq \emptyset$ и $m'_i \in f(W)$, если $W_i \setminus \Phi \neq \emptyset$; для $i \in [k+1, n]$ имеем $m_i \in f(W)$, если $W_i \neq \emptyset$; Наконец, $t \in f(W)$ по пункту 4 леммы 6.4.

Далее зададим даймонд D_l с множеством точек $f(W)$, где t — вершина, r — корень, а все остальные точки образуют миддл; $l := n + k$, если $W_t \setminus \Phi = \emptyset$; и $l := n + k + 1$, если $W_t \setminus \Phi \neq \emptyset$.

Убедимся, что f является p -морфизмом из (W, S) на D_l .

Сюръективность очевидна.

Монотонность. Предположим, что $x \leq y$ для $x, y \in W$. Проведем разбор всех возможных случаев взаимного расположения образов этих точек при отображении f .

Случай, когда $h(x) = h(y)$, исчерпывается следующими вариантами:

- (1) $f(x) = f(y)$;
- (2) $x \in W_t \setminus \Phi$, $y \in W_t \cap \Phi$;
- (3) $x \in W_t \cap \Phi$, $y \in W_t \setminus \Phi$;
- (4) $x \in W_i \setminus \Phi$, $y \in W_i \cap \Phi$ для $i \in [1, n]$;
- (5) $x \in W_i \cap \Phi$, $y \in W_i \setminus \Phi$ для $i \in [1, n]$.

Случай 1) тривиален. В случае 2) имеем: $f(x) = m_0 \leq t = f(y)$. Случай 3) невозможен, поскольку Φ — конус. Случаи 4) и 5) невозможны в силу пункта 1 леммы 6.3.

Случай, когда $h(x) \neq h(y)$, исчерпывается следующими вариантами:

- (1) $x \in W_r$;

- (2) $x \in W_t \cap \Phi$;
- (3) $h(x) \not\leq h(y)$;
- (4) $x \in W_i, y \in W_t \setminus \Phi$.

Случай 1) тривиален, так как $f(x) = r$ — наименьший элемент в D_l . Аналогично разбирается случай 2). Случай 3) не возможен, поскольку h — p -морфизм. Случай 4) не возможен в силу пункта 2 леммы 6.3.

Конусность. Пусть $f(x) \leq m$. Докажем, что в этом случае найдется $y \geq x$ такая, что $f(y) = m$. Рассмотрим случай, когда $f(x) = r$ и m — точка миддла. Возможны следующие варианты:

- (1) $m = m_i$ для $i \in [1, n]$ — существование такого y следует из пункта 1 леммы 6.4;
- (2) $m = m'_i$ для $i \in [1, n]$ — существование такого y следует из пункта 2 леммы 6.4.
- (3) $m = m_0$ — существование y следует из пункта 3 леммы 6.4.

В случае, когда $m = t$, существование y следует из пункта 4 леммы 6.4.

Непрерывность. Достаточно показать, что следующие множества лежат в S : $f^{-1}(D_l)$, $f^{-1}\{t\}$, $f^{-1}\{m_0, t\}$, $f^{-1}\{m_i, t\}$, $f^{-1}\{m'_i, t\}$, где $i \in [1, n]$.

Сразу имеем $f^{-1}(D_l) = W \in S$, $f^{-1}\{t\} = W_t \cap \Phi \in S$, $f^{-1}\{m_0, t\} = W_t \in S$; $f^{-1}\{m_i, t\} = W_i \cup W_t \in S$ для $i \in [k+1, n]$. А для $i \in [1, k]$ имеем $f^{-1}\{m_i, t\} = (W_i \cap \Phi) \cup (W_t \cap \Phi) = (W_i \cup W_t) \cap \Phi \in S$.

Далее $f^{-1}\{m'_i, t\} = (W_i \setminus \Phi) \cup (W_t \cap \Phi)$ для $i \in [1, k]$. Покажем, что $f^{-1}\{m'_i, t\} = X$, где $X := (W_i \cup W_t) \cap (\Phi \supset W_t) \cap (W_t \supset \Phi)$ и $X \in S$.

Пусть $x \in f^{-1}\{m'_i, t\}$. Если $x \in W_t \cap \Phi$, то ясно, что $x \in X$. Допустим, что $x \in W_i \setminus \Phi$, тогда из $x \in W_i$ следует $x \in W_i \cap W_t$. Если $y \geq x$ и $y \in \Phi$, то, с одной стороны, $y \in W_i \cup W_t$, а с другой, по пункту 1 леммы 6.3 получаем $y \notin W_i$, значит $y \in W_t$, откуда $x \in \Phi \supset W_t$. Далее, если $z \geq x$ и $z \in W_t$, то $z \in \Phi$ по пункту 2 леммы 6.3, откуда $x \in W_t \supset \Phi$. Таким образом, $x \in X$.

Наоборот, пусть $x \in X$. Тогда $x \in W_i \cup W_t$. Если $x \in W_t$, тогда из $x \in W_t \supset \Phi$ следует $x \in \Phi$, откуда $x \in W_t \cap \Phi$ и $x \in f^{-1}\{m'_i, t\}$. Пусть теперь $x \in W_i$. Если $x \in \Phi$, то из $x \in (\Phi \supset W_t)$ следует $x \in W_t$, чего быть не может. Значит $x \notin \Phi$, откуда $x \in W_i \setminus \Phi$ и $x \in f^{-1}\{m'_i, t\}$.

Теперь убедимся, что отображение f является p_φ -морфизмом из $(W, S; \Phi)$ на (D_l, Ψ) , где $\Psi := \{t, m_1, \dots, m_k, m_{k+1}, \dots, m_s\}$.

Нетрудно проверить, что $\Psi = f(\Phi)$. Нужно убедиться, что $f^{-1}(\Psi) = f^{-1}(f(\Phi)) = \Phi$. Включение $f^{-1}(f(\Phi)) \supseteq \Phi$ является известным теоретико-множественным законом. Проверим обратное включение $f^{-1}(f(\Phi)) \subseteq \Phi$. Если $x \notin \Phi$, то $x \in W_r$ или $W_i \setminus \Phi$ для $i \in [1, k]$ или W_i для $i \in [s+1, n]$ по определению Φ , откуда видно, что $f(x) \notin \Psi = f(\Phi)$, значит $x \notin f^{-1}(\Psi)$.

Таким образом, $f: (W, S, \Phi) \xrightarrow{\varphi} D_l$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 6.1. Пусть φ -логика \mathcal{L} — консервативное расширение $L3$. Тогда найдется конфинальный подкласс \mathcal{D}' класса \mathcal{D} всех φ -даймондов такой, что $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}')$.

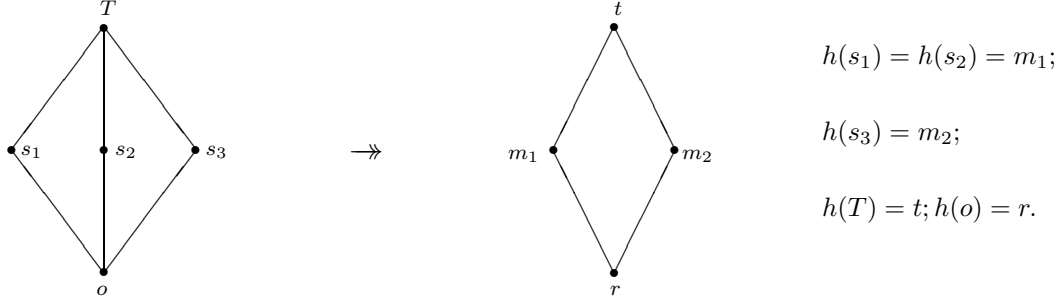
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ -логика \mathcal{L} — консервативное расширение $L3$. По теореме 3.2 найдется класс \mathcal{M} обобщенных φ -шкал такой, что $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}$. Тогда, с одной стороны, для класса $\mathcal{M}' = \{(W, S) \mid (W, S, \Phi) \in \mathcal{M}\}$ имеем $L(\mathcal{M}') = L3$, а с другой, по теореме 1.3 $L3 = L(\mathcal{D})$, значит $L(\mathcal{M}') = L(\mathcal{D})$, откуда по обратной теореме сравнения $\mathcal{M}' \succeq \mathcal{D}$. По теореме 6.1 получаем $\mathcal{M} \stackrel{\varphi}{\succeq} \mathcal{D}'$ для некоторого конфинального класса φ -даймондов \mathcal{D}' . Наконец, по прямой теореме сравнения φ -логик получаем $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}')$. \square

6.2. Классификация полных по Новикову расширений логики $L3$

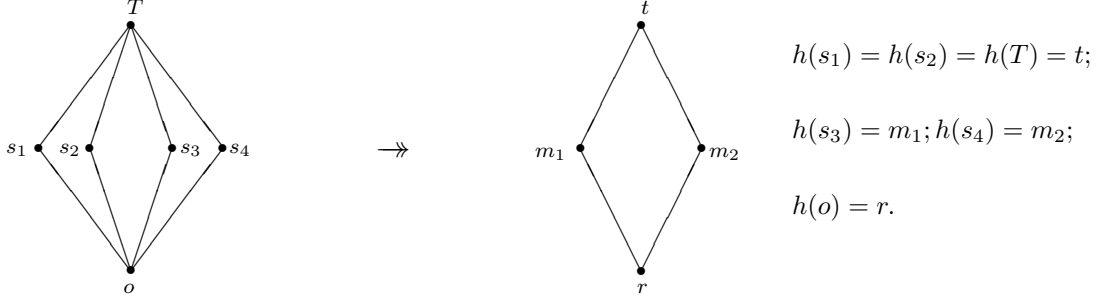
Приведем два типичных примера p -морфизмов даймонда D_k на даймонд D_n ($k > n$).

П р и м е р 6.1. «Склеивание» нескольких точек миддла в одну.

Пусть $k = 3, n = 2$:



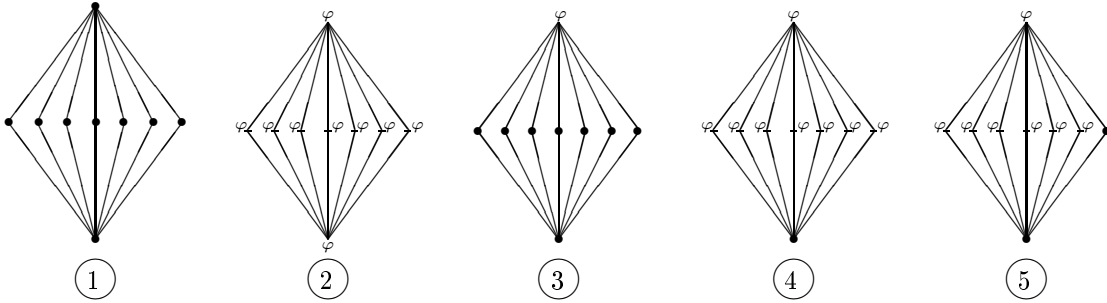
Пр и м е р 6.2. «Подклеивание» нескольких точек миддла к топу.
Пусть $k = 4, n = 2$:



Введем в рассмотрение пять следующих классов φ -даймондов:

- $\mathcal{D}^1 := \{\mathcal{D}_n^1 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^1 = (D_n, \emptyset)$ — « φ нигде»;
- $\mathcal{D}^2 := \{\mathcal{D}_n^2 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^2 = (D_n, D_n)$ — « φ везде»;
- $\mathcal{D}^3 := \{\mathcal{D}_n^3 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^3 = (D_n, \{t\})$ — « φ в топе»;
- $\mathcal{D}^4 := \{\mathcal{D}_n^4 | n \in \omega, n > 0\}$, где $\mathcal{D}_n^4 = (D_n, D_n \setminus \{r\})$ — « φ везде, кроме корня»;
- $\mathcal{D}^5 := \{\mathcal{D}_n^5 | n \in \omega, n > 1\}$, где $\mathcal{D}_n^5 = (D_n, \{m_1, t\})$ — « φ везде в мидdle, кроме единственной точки».

Типичные представители этих классов имеют следующий вид:



φ -логики этих классов обозначим $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$ соответственно.

Л е м м а 6.5. Для каждого $i \in [1, 5]$ и произвольного конфинального подкласса \mathcal{D}' класса \mathcal{D}^i имеет место равенство $\mathcal{L}^i = \mathcal{L}(\mathcal{D}')$.

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}^i$, тогда $\mathcal{L}^i \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}')$. С другой стороны, $\mathcal{D}^i \stackrel{\varphi}{\subseteq} \mathcal{D}'$, по прямой теореме сравнения φ -логик, имеем $\mathcal{L}(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{L}^i$. \square

Т е о р е м а 6.2. Любая консервативная над L3 φ -логика включена в одну из пяти φ -логик $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$.

До к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 3.2 существует характеристический класс \mathcal{M} обобщенных φ -шкал такой, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{M})$. Согласно предыдущему разделу, $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}')$, где \mathcal{D}' — некоторый конфинальный подкласс класса \mathcal{D} . Дальнейшие рассуждения зависят от того, φ -даймонды каких видов преобладают в классе \mathcal{D}' .

Если \mathcal{D}' содержит конфинальный подкласс \mathcal{D}'' φ -даймондов типа « φ -нигде», то по прямой теореме сравнения φ -логик $\mathcal{L}(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}'')$, а по лемме 6.5 получим $\mathcal{L}(\mathcal{D}'') = \mathcal{L}^1$, откуда $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^1$.

Если \mathcal{D}' содержит конфинальный подкласс φ -даймондов типа « φ -езде», то, аналогичным образом, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^2$.

Если \mathcal{D}' содержит бесконечный подкласс φ -даймондов типа « φ в топе», то $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^3$.

Если \mathcal{D}' содержит бесконечный подкласс φ -даймондов типа « φ везде, кроме корня», то $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^4$.

Пусть ни один из предыдущих случаев для \mathcal{D}' не выполнен, то есть каждый φ -даймонд из \mathcal{D}' имеет в мидdle как окрашенные, так и неокрашенные точки.

Если в \mathcal{D}' имеются φ -даймонды со сколь угодно длинными неокрашенными частями мидdла, образующие конфинальный подкласс \mathcal{D}'' , то $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}'')$. В каждом φ -даймонде из \mathcal{D}'' окрашенные точки мидdла можно «подклеить» к топу (см. пример 2). Получим класс \mathcal{D}''' типа « φ в топе» такой, что $\mathcal{D}'' \stackrel{\varphi}{\succeq} \mathcal{D}'''$, следовательно, по прямой теореме сравнения φ -логик $\mathcal{L}(\mathcal{D}'') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}''')$. С другой стороны, \mathcal{D}''' конфинален в \mathcal{D}^3 поэтому по лемме 6.5 $\mathcal{L}(\mathcal{D}''') = \mathcal{L}^3$, следовательно, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^3$.

Если же в \mathcal{D}' имеются φ -даймонды со сколь угодно длинными окрашенными частями мидdла, образующие конфинальный подкласс \mathcal{D}'' , то снова имеет место $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}'')$. Далее в каждом из этих φ -даймондов неокрашенные точки мидdла можно «склеить» в одну (см. пример 1), получив подкласс \mathcal{D}''' φ -даймондов типа « φ везде в мидdле, кроме одной точки» такой, что $\mathcal{D}'' \stackrel{\varphi}{\succeq} \mathcal{D}'''$, откуда $\mathcal{L}(\mathcal{D}'') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D}''')$ и, кроме того, $\mathcal{D}''' \subseteq \mathcal{D}^5$. В силу конфинальности класса \mathcal{D}''' и леммы 6.5 получаем, что $\mathcal{L}(\mathcal{D}''') = \mathcal{L}^5$, откуда $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^5$. \square

Т е о р е м а 6.3. φ -логики $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$ попарно несравнимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства попарной несравнимости пяти φ -логик приведем для любых $i, j \in [1, 5]$ ($i \neq j$) такую формулу A , что $A \in \mathcal{L}^i \setminus \mathcal{L}^j$. Введем в рассмотрение следующие формулы:

$$bd_2 = (p_1 \vee (p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_2))); \mathbf{B} = ((p \rightarrow \varphi) \wedge ((\varphi \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow (\varphi \vee \neg p);$$

$$\mathbf{C} = ((p \wedge q) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((p \rightarrow \varphi) \vee (q \rightarrow \varphi)).$$

В таблице 5 на пересечении i -той строки и j -того столбца указана формула $A \in \mathcal{L}^i \setminus \mathcal{L}^j$.

Таблица 5.

–	\mathcal{L}^1	\mathcal{L}^1	\mathcal{L}^3	\mathcal{L}^4	\mathcal{L}^5
\mathcal{L}^1	–	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$
\mathcal{L}^2	φ	–	φ	φ	φ
\mathcal{L}^3	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow (p \vee \neg p)$	–	$\varphi \rightarrow (p \vee \neg p)$	$\varphi \rightarrow (p \vee \neg p)$
\mathcal{L}^4	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow bd_2$	$p \vee (p \rightarrow \varphi)$	–	$p \vee (p \rightarrow \varphi)$
\mathcal{L}^5	$\neg\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow bd_2$	\mathbf{C}	\mathbf{B}	–

Большинство утверждений о формулах, приведенных в таблице, проверяется непосредственно. Наиболее трудное рассуждение связано с формулой \mathbf{B} . Докажем, что $\mathbf{B} \in \mathcal{L}^5 \setminus \mathcal{L}^4$.

Сначала покажем, что $\mathbf{B} \in \mathcal{L}^5$. Предположим противное. Тогда найдутся некоторый φ -даймонд $(\mathcal{D}_n^5; \Psi)$, где $\mathcal{D}_n^5 = \{t, m_1, \dots, m_n, r\}$; $\Psi = \{t, m_2, \dots, m_n\}$ и некоторая оценка $v : v(p) = P, v(\varphi) = \Psi$. Найдется точка x данного φ -даймонда такая, что $x \in (P \supset \Psi) \cap ((\Psi \supset P) \supset P)$ и $x \notin (\Psi \cup \neg P)$. Откуда имеем: **(1)** $x \in P \supset \Psi$; **(2)** $x \in (\Psi \supset P) \supset P$; **(3)** $x \notin \Psi$; **(4)** $x \notin \neg P$. Из (4) получаем $t \in P$, а из (3) получаем, что $x = m_1$ или $x = r$. Ясно, что в любом случае $m_1 \notin P$, потому что в противном случае $m_1 \in \Psi$ по (1), чего быть не может. С другой стороны, для любого $y \geq m_1$ имеем $y \notin \Psi$ или $y \in P$, откуда $m_1 \in \Psi \supset P$, значит, в силу (2) получаем $m_1 \in P$, что приводит к противоречию.

Теперь покажем, что $\mathbf{B} \notin \mathcal{L}^4$. Приведем пример φ -даймонда класса \mathcal{D}^4 с заданной на нем оценкой, в котором формула \mathbf{B} опровергается, поэтому $\mathbf{B} \notin \mathcal{L}^4$.



Таким образом, существует ровно пять полных по Новикову расширений с. и. логики $L3$. Более точно, каждая консервативная над $L3$ φ -логика включена в одну из попарно несравнимых φ -логик $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4, \mathcal{L}^5$. \square

§ 7. О некоторых алгоритмических вопросах

В этом параграфе мы рассматриваем вопросы разрешимости и алгоритмической проблемы распознавания консервативности полных по Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских логик.

О п р е д е л е н и е 7.1. φ -логика L называется *разрешимой*, если существует алгоритм, который по произвольной формуле $A \in Fm(\varphi)$ определяет, $A \in L$ или $A \notin L$.

О п р е д е л е н и е 7.2. Под проблемой *распознавания консервативности* будем понимать следующую массовую проблему. Пусть L — одна из логик $LC, L2, L3$. Пусть $A \in Fm(\varphi)$; является ли φ -логика $L + A$ консервативным расширением логики L ?

В предыдущих параграфах было показано, что каждое пополнение L финитно аппроксимируемо, так как характеризуется подходящими классами конечных φ -цепей, φ -вееров и φ -даймондов соответственно. В работах [5, 7] получена конечная аксиоматизация каждого пополнения соответствующей логики $L = LC$ и $L = L2$, а также первых четырех пополнений логики $L3$. Впрочем, пятое пополнение логики $L3$ так же является разрешимым, так как посредством метода фильтрации [33] для данной формулы можно ограничить число точек миддла, то есть свести проверку общезначимости данной формулы в классе \mathcal{D}^5 к проверке тождественной истинности в конечном числе φ -даймондов.

Известен критерий Харропа (см. [19, теорема 16.13]): если логика имеет конечную аксиоматизацию и финитно аппроксимируема, то она разрешима.

Т е о р е м а 7.1. Все полные по Новикову расширения предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ являются разрешимыми.

Т е о р е м а 7.2. Проблема распознавания консервативности расширений предтабличной суперинтуиционистской логики L в языке $Fm(\varphi)$ алгоритмически разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Логика $L + A$ консервативна над $L \Leftrightarrow L + A$ включена в какую-то из полных над L φ -логик. Таковых конечное число (три, пять, пять для $LC, L2, L3$ соответственно). Вопрос принадлежности формулы A решается алгоритмически, поскольку каждая из полных φ -логик разрешима. \square

Список литературы

1. Григолия Р.Ш. Свободные S4.3-алгебры с конечным числом образующих // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 281–287.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. 2-е изд. М.: Наука, 1987. 336 с.
3. Захарьящев М.В. Синтаксис и семантика суперинтуиционистских логик // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 4. С. 262–282.
4. Клини С.К. Введение в метаматематику М.: Иностранная литература, 1957. 526 с.
5. Кощева А.К. Аксиоматика полных по П.С. Новикову расширений суперинтуиционистской логики $L2$ в языке с одной дополнительной константой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 3. С. 28–39.
6. Кощева А.К. Новая константа в суперинтуиционистской логике $L3$ // Алгебра и логика. 2015. Т. 54. № 1. С. 34–52.
7. Кощева А.К. Новые константы в предтабличных суперинтуиционистских логиках: дис. ... канд. физ.-матем. наук / Сибирский федеральный университет. Красноярск, 2015. 84 с.
8. Кузнецов А.В. Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме сообщ. и докл. Кишинев, 1971. С. 255–256.
9. Кузнецов А.В. О суперинтуиционистских логиках и финитной аппроксимируемости // Доклады АН СССР. 1970. Т. 195. № 5. С. 1029–1032.
10. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2004. 256 с.

11. Максимова Л.Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 5. С. 558–570.
12. Максимова Л.Л., Шрайнер П.А. Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6. № 3. С. 49–58.
13. Новиков П.С. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука, 1977. 328 с.
14. Плиско В.Е., Хаханян В.Х. Интуиционистская логика. М.: МГУ, мех.-мат. ф-т, 2009. 159 с.
15. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. 592 с.
16. Скворцов Д.П. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной логической связкой // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 154–173.
17. Сметанич Я.С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Труды Московского математического общества. 1960. Т. 9. С. 357–371.
18. Сметанич Я.С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139. № 2. С. 309–312.
19. Чагров А.В. Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5: сб. статей под ред. С. В. Яблонского. М.: Физматлит, 1994. С. 62–108.
20. Эсакиа Л.Л. Алгебры Гейтинга. Тбилиси: Мецниереба, 1985. 104 с.
21. Янков В.А. Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181. № 1. С. 33–34.
22. Яшин А.Д. Новая регулярная константа в интуиционистской логике высказываний // Сибирский математический журнал. 1996. Т. 37. № 6. С. 1413–1432.
23. Яшин А.Д. О новой константе в интуиционистской логике высказываний // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 3. С. 903–926.
24. Яшин А.Д. Классификация полных по Новикову логик с дополнительными логическими константами // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 3. С. 366–383.
25. Яшин А.Д. О новых константах в двух предтабличных суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика. 2011. Т. 50. № 2. С. 246–267.
26. Яшин А.Д., Кощеева А.К. Новые константы в суперинтуиционистской логике $L2$ // Математические заметки. 2013. Т. 94. № 6. С. 918–932.
27. Bezhanishvili N., de Jongh D. Intuitionistic logic.
<http://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Reports/PP-2006-25.text.pdf>
28. Chagrov A., Zakharyashev M. Modal logic. Oxford: Oxford University Press, 1997. 605 p.
29. Dubashi D.P. On decidable varieties of Heyting algebras // J. Symb. Log. 1992. Vol. 57. № 3. P. 988–991.
30. Dummett M.A. A propositional calculus with denumerable matrix // J. Symb. Log. 1959. Vol. 24. № 2. P. 97–106.
31. Dunn J.M., Meyer R.K. Algebraic completeness results for Dummett's LC and its extensions // Zeitschr. Math. Log. und Grundl. Math. 1971. Vol. 17. P. 225–230.
32. Fitting M. Intuitionistic logic, model theory and forcing (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics). Amsterdam–London: North-Holland Publishing Company, 1969. 191 p.
33. Gabbay D.M. On some new intuitionistic propositional connectives. I // Studia Logica. 1977. Vol. 36. № 1–2. P. 127–139.
34. Goldblatt R.I. Metamathematics of modal logics. Part I // Rep. on Math. Logic. 1976. Vol. 6. P. 41–78.
35. Goldblatt R.I. Metamathematics of modal logics. Part II // Rep. on Math. Logic. 1976. Vol. 7. P. 21–52.
36. Hosoi T. On intermediate logics. I // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1. 1967. № 14. P. 293–312.
37. Hosoi T., Ono H. The intermediate logics of the second slice // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1. 1970. № 17. P. 457–461.
38. Kirk R.E. A characterization of the classes of finite tree frames which are adequate for the intuitionistic logic // Zeitschr. Math. Log. und Grundl. Math. 1980. Vol. 26. № 6. P. 497–501.
39. Колмогоров А.Н. К толкованию интуиционистской логики / Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 142–148.
40. Ono H. Kripke models and intermediate logics // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 1970. Vol. 6. № 71. P. 461–476.
41. Yashin A.D. New intuitionistic logical constants and Novikov completeness // Studia Logica. 1999. Vol. 63. № 2. P. 151–180.
42. Zakharyashev M., Wolter F., Chagrov A. Advanced modal logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 3 / Gabbay D.M., Guenther F. Kluwer Acad. Publ. 2001. P. 83–266.

Кошечева Анна Константиновна, к. ф.-м. н., старший преподаватель, кафедры алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kannakst@mail.ru

A. K. Koshcheeva

New constants in pretabular superintuitionistic logics: P. Novikov's approach

Keywords: pretabular superintuitionistic logics, new logical constants, Novikov's completeness, algorithmic problem of the conservativeness.

MSC: 03B55, 03B60

In the late fifties of the twentieth century a problem was posed by P. S. Novikov concerning new logical connectives as extranotions for a language with standard logical connectives \vee , \wedge , \rightarrow , \neg . Ya. S. Smetanich has given exact formulations for approach of Novikov to the concept of new logical connectives in superintuitionistic logics (new logical connective, Novikov completeness). In the present paper, the Novikov problem concerning new additional constants is considered in pretabular superintuitionistic logics LC , $L2$, $L3$: the logic of chains, the logic of rooted frames of the depth not exceeding 2 (fans), the logic of rooted frames with the top and with the depth not exceeding 3 (diamonds). The classification for the family of all Novikov-complete extensions of the pretabular superintuitionistic logics in a language containing additional logical constants is described. For these logics, the classification is obtained in the terms of finite frame with coloring: in the language with several additional constants for LC and $L2$ and with a single additional constant for $L3$. Decidability of the (algorithmic) conservativeness problem for extensions of all pretabular superintuitionistic logics is established. The algorithmic problem of conservativeness recognition is investigated.

REFERENCES

1. Grigoliya R.Sh. Free S4.3-algebra with a finite number of generators, *Issledovaniya po neklassicheskim logikam i formal'nyim sistemam* (Studies in nonclassical logics and formal systems), Moscow: Nauka, 1983, pp. 281–287 (in Russian).
2. Ershov Yu.L., Palyutin E.A. *Matematicheskaya logika* (Mathematical logic), Moscow: Nauka, 1987, 336 p.
3. Zakharyashev M.V. Syntax and semantics of intermediate logics, *Algebra and Logic*, 1989, vol. 28, no. 4, pp. 262–282.
4. Kleene S.C. *Introduction to metamathematics*, New York: D. Van Nostrand Company, 1952. Translated under the title *Vvedenie v metamatematiku*, Moscow: Inostrannaya literatura, 1957, 526 p.
5. Koshcheeva A.K. Axiomatics of P.S. Novikov complete extensions of the superintuitionistic logic $L2$ in the language containing an additional constant, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 28–39 (in Russian).
6. Koshcheeva A.K. A new constant in superintuitionistic logic $L3$, *Algebra and Logic*, 2015, vol. 54, no. 1, pp. 23–35. DOI: 10.17377/alglog.2015.54.103
7. Koshcheeva A.K. New constants in pretabular superintuitionistic logics, *Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Krasnoyarsk, 2015, 84 p (in Russian).
8. Kuznetsov A.V. Some properties of the structure of manifolds of pseudoboolean algebras, *XI Vsesoyuznyi algebraicheskiy kollokvium. Rezyume soobshch. i dokl.* (Proceedings of XI All-Union Algebraic Colloquium), Chisinau, 1971, pp. 255–256 (in Russian).
9. Kuznetsov A.V., Gerchiu V.Ya. Superintuitionistic logics and finite approximability, *Sov. Math., Dokl.*, 1970, vol. 11, pp. 1614–1619.
10. Lavrov I.A., Maksimova L.L. *Zadachi po teorii mnozhestv, matematicheskoi logike i teorii algoritmov* (Tasks in set theory, mathematical logic and the theory of algorithms), Moscow: Fizmatlit, 2004, 256 p.
11. Maksimova L.L. Pretabular superintuitionistic logics, *Algebra and Logic*, 1972, vol. 11, no. 5, pp. 308–314.
12. Maksimova L.L., Schreiner P.A. Algorithms of the recognition of the tabularity and pretabularity in the extensions of the intuitionistic calculus, *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2006, vol. 6, no. 3, pp. 49–58 (in Russian).
13. Novikov P.S. *Konstruktivnaya matematicheskaya logika s tochkoi zreniya klassicheskoi* (Constructive mathematical logic from the point of view classical logic), Moscow: Nauka, 1977, 328 p.
14. Plisko V.E., Khakhanyan V.H. *Intuitsionistskaya logika* (Intuitionistic logic), Moscow: Moscow State University, 2009. 159 p.
15. Rasiowa H., Sikorski R. *The mathematics of metamathematics*, Warszawa: PWN, 1963. Translated under the title *Matematika metamatematiki*, Moscow: Nauka, 1972, 592 p.

16. Skvortsov D.P. On intuitionistic propositional calculus with an additional logical connective, *Issledovaniya po neklassicheskim logikam i formal'nyim sistemam* (Studies in nonclassical logics and formal systems), Moscow: Nauka, 1983, pp. 154–173 (in Russian).
17. Smetanich Ya.S. On the completeness of the propositional calculus with additional operations in one argument, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1960, vol. 9, pp. 357–371 (in Russian).
18. Smetanich Ya.S. On statement calculi with an additional operation, *Soviet Math. Doklady*, 1961, vol. 2, pp. 937–939.
19. Chagrov A.V. Undecidable properties of superintuitionistic logics, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Moscow: Fizmatlit, 1994, no. 5, pp. 62–108 (in Russian).
20. Esakia L.L. *Algebrы Geitinga* (Heyting algebras), Tbilisi: Metsniereba, 1985, 104 p.
21. Yankov V.A. Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, *Soviet Math. Dokl.*, 1968, vol. 9, pp. 806–807.
22. Yashin A.D. A new regular constant in intuitionistic propositional logic, *Siberian Math. Journal*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1242–1258.
23. Yashin A.D. On a new constant in intuitionistic propositional logic, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1999, vol. 5, no. 3, pp. 903–926 (in Russian).
24. Yashin A.D. Classification of Novikov complete logics with extra logical constants, *Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 207–216.
25. Yashin A.D. New constants in two pretabular superintuitionistic logics, *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 2, pp. 171–186.
26. Yashin A.D., Koshcheeva A.K., New constants in the superintuitionistic logic $L2$, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 5, pp. 938–950.
27. Bezhanishvili N., de Jongh D. *Intuitionistic logic*.
<http://www.ilic.uva.nl/Research/Publications/Reports/PP-2006-25.text.pdf>
28. Chagrov A., Zakharyashev M. *Modal logic*, Oxford: Oxford University Press, 1997, 605 p.
29. Dubashi D.P. On decidable varieties of Heyting algebras, *J. Symb. Log.*, 1992, vol. 57, no. 3, pp. 988–991.
30. Dummett M.A. A propositional calculus with denumerable matrix, *J. Symb. Log.*, 1959, vol. 24, no. 2, pp. 97–106.
31. Dunn J.M., Meyer R.K. Algebraic completeness results for Dummett's LC and its extensions, *Zeitschr. Math. Log. und Grundl. Math.*, 1971, vol. 17, pp. 225–230.
32. Fitting M.C. *Intuitionistic logic, model theory and forcing*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam–London: North-Holland Publishing Company, 1969, 191 p.
33. Gabbay D.M. On some new intuitionistic propositional connectives. I, *Studia Logica*, 1977, vol. 36, no. 1–2, pp. 127–139.
34. Goldblatt R.I. Metamathematics of modal logics. Part I, *Rep. Math. Logic*, 1976, vol. 6, pp. 41–78.
35. Goldblatt R.I. Metamathematics of modal logics. Part II, *Rep. Math. Logic*, 1976, vol. 7, pp. 21–52.
36. Hosoi T. On intermediate logics. I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1*, 1967, no. 14, pp. 293–312.
37. Hosoi T., Ono H. The intermediate logics of the second slice, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1*, 1970, no. 17, pp. 457–461.
38. Kirk R.E. A characterization of the classes of finite tree frames which are adequate for the intuitionistic logic, *Zeitschr. Math. Log. und Grundl. Math.*, 1980, vol. 26, no. 6, pp. 497–501.
39. Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Math. Z.*, 1932, vol. 35, issue 1, pp. 58–65.
40. Ono H. Kripke models and intermediate logics, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Kyoto Univ., 1970, vol. 6, no. 71, pp. 461–476.
41. Yashin A.D. New intuitionistic logical constants and Novikov completeness, *Studia Logica*, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 151–180.
42. Zakharyashev M., Wolter F., Chagrov A. Advanced Modal Logic, *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3, Ed.: Gabbay D.M., Guenther F. Kluwer Acad. Publ., 2001, pp. 83–266.

Received 01.02.2016

Koshcheeva Anna Konstantinovna, Senior Lecturer, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kannakst@mail.ru