



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.5

MSC 2010: 70K20, 70K42, 70F05

**Об устойчивости и ветвлении
стационарных вращений в плоской задаче
о движении взаимно гравитирующих
треугольника и материальной точки**

А. А. Буров, В. И. Никонов

Рассматривается плоская задача о движении правильного треугольника с одинаковыми массами в вершинах и материальной точки под действием сил взаимного притяжения. Изучаются необходимые условия устойчивости «прямых», осевых установившихся конфигураций, для которых материальная точка располагается на одной из осей симметрии треугольника. Обсуждается вопрос о появлении иных, «косых», установившихся конфигураций, появляющихся в связи с изменением при определенных значениях параметров степени неустойчивости некоторых «прямых» установившихся конфигураций.

Ключевые слова: обобщенная плоская задача двух тел, гравитирующий астероид, гравитирующие системы с нерегулярным распределением масс, устойчивость установившихся движений, гироскопическая стабилизация, бифуркации установившихся движений, бифуркационные диаграммы Пуанкаре

Получено 24 марта 2016 года

После доработки 13 мая 2016 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16-01-00625).

Буров Александр Анатольевич

jtm@narod.ru

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

101000, Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Никонов Василий Иванович

nikon_v@list.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

1. Введение

Как известно, многие небесные тела малых размеров отличаются нерегулярным распределением масс [45]. Этим обстоятельством обусловлена неоднородность их поля притяжения, которая, в сочетании с относительно небольшой напряженностью этого поля, создает определенные трудности при проектировании миссий к таким телам. Если для двойных (binary) небесных тел притяжение с определенной степенью точности удастся представить как притяжение гантелеобразного тела [4, 5, 37, 48], то для тел с более сложным распределением масс вопрос о представлении притяжения в приемлемом как для численного, так и для аналитического описания движения виде остается открытым (см., например, [51]).

В [42] (см. также [43, 54]) для проектирования методов управления космическим аппаратом в окрестности равномерно вращающегося астероида было предложено использовать модель «трех вписанных сфер», учитывающую асимметрию в распределении масс и обеспечивающую в достаточной степени пригодное представление гравитационного поля небесного объекта «нерегулярной» формы. Динамика в задаче двух тел, одно из которых — треугольник, оказывается достаточно сложной. Так, уже в случае, когда распределение масс выдерживает группу симметрий правильного треугольника [31, 32, 47], удастся обнаружить достаточно богатые, ветвящиеся классы установившихся движений, обладающих различными свойствами устойчивости.

В настоящей работе для такой симметрии при произвольном (в отличие от [31]) отношении масс гравитирующих тел изучаются существование, ветвление и устойчивость «прямых» установившихся движений, когда второе тело, представленное массивной точкой, располагается на одной из осей симметрии треугольника. Доказывается отсутствие «косых» установившихся конфигураций, для которых массивная точка и центр треугольника либо близки друг к другу, либо достаточно удалены друг от друга.

2. Постановка задачи и уравнения движения

Рассмотрим $\Delta P_1 P_2 P_3$, в вершинах которого сосредоточены массы m_1, m_2, m_3 , и массивную точку P массы M , совершающие движение в общей плоскости π , фиксированной в абсолютном пространстве, под действием сил взаимного ньютоновского притяжения. Так как все силы, действующие на систему, — внутренние, то без нарушения общности можно считать центр масс всей системы — точку O — неподвижной в абсолютном пространстве (рис. 1). Пусть $OX_\alpha X_\beta X_\gamma$ — абсолютная система отсчета (АСО), оси OX_γ и OX_α которой располагаются в плоскости π , а ось OX_β перпендикулярна этой плоскости.

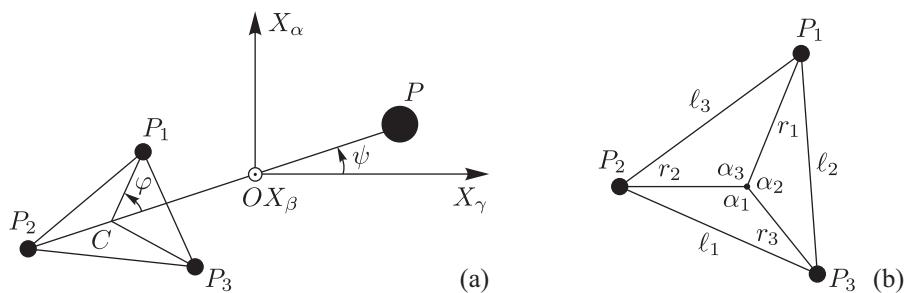


Рис. 1. Система взаимно гравитирующих треугольника и точки.

Введем также жестко связанную с треугольником подвижную систему отсчета $Cxyz$, начало которой располагается в центре масс треугольника — точке C :

$$m_1 \overrightarrow{CP_1} + m_2 \overrightarrow{CP_2} + m_3 \overrightarrow{CP_3} = 0.$$

Будем считать, что ось Cx направлена из центра масс в вершину P_1 , ось Cy ей перпендикулярна и располагается в плоскости треугольника, а ось Cz перпендикулярна плоскости треугольника и сонаправлена оси Ox_β . В такой системе отсчета векторы $\overrightarrow{CP_1}$, $\overrightarrow{CP_2}$ и $\overrightarrow{CP_3}$, а также \overrightarrow{CP} , записываются как

$$\overrightarrow{CP_1} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP_2} = \begin{pmatrix} r_2 \cos \alpha_3 \\ r_2 \sin \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP_3} = \begin{pmatrix} r_3 \cos \alpha_2 \\ -r_3 \sin \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_2, \alpha_3 < \pi.$$

Подвижная система отсчета (ПСО) $Cxyz$ понадобится в дальнейшем при изучении существования «косых» конфигураций.

В отличие от [31], где использовались барицентрические координаты, для определения положения системы воспользуемся углами φ и ψ (рис. 1а), а также величиной $r = (\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP})^{1/2}$, задающей расстояние между центром масс треугольника C и гравитирующей точкой P .

Центр масс O всей системы определяется соотношениями

$$m\overrightarrow{OC} + M\overrightarrow{OP} = 0, \quad m = m_1 + m_2 + m_3.$$

С помощью теоремы Кёнига [6] кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$T' = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 = \frac{m}{2} \left[\mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) + r_0^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right] = mT,$$

$$\mu = \frac{M}{m+M} \in [0, 1),$$

где $I = mr_0^2$ — момент инерции треугольника относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр масс, r_0 — отвечающий ему радиус инерции. Если $|P_1P_2| = \ell_3$, (1, 2, 3) — длины сторон треугольника, то, согласно формуле Якоби [2], момент инерции I имеет вид

$$I = \frac{1}{m} \sum_{(1,2,3)} m_1 m_2 (\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_2}) = \frac{1}{m} \sum_{(1,2,3)} m_1 m_2 \ell_3^2 = m \sum_{(1,2,3)} \mu_1 \mu_2 \ell_3^2 = mr_0^2,$$

$$\mu_1 = m_1/m, \quad (1, 2, 3).$$

Здесь и далее обозначение (1, 2, 3) предусматривает циклическую перестановку индексов.

Потенциальная энергия записывается как

$$U' = -mMG \left[\frac{\mu_1}{\rho_1(r, \varphi)} + \frac{\mu_2}{\rho_2(r, \varphi)} + \frac{\mu_3}{\rho_3(r, \varphi)} \right] = mU, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная. Здесь и далее

$$\begin{aligned}\rho_1(r, \varphi) &= \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi} = \sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}, \\ \rho_2(r, \varphi) &= \sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos(\varphi + \alpha_3)} = \sqrt{(x - r_2 \cos \alpha_3)^2 + (y - r_2 \sin \alpha_3)^2}, \\ \rho_3(r, \varphi) &= \sqrt{r^2 + r_3^2 - 2rr_3 \cos(\varphi - \alpha_2)} = \sqrt{(x - r_3 \cos \alpha_2)^2 + (y + r_3 \sin \alpha_2)^2}.\end{aligned}$$

Связь между длинами сторон ℓ_i и введенными величинами r_i, α_i (рис. 1b) определяется из теоремы косинусов:

$$\ell_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha_3. \quad (1, 2, 3)$$

Заметим, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$, причем не более чем один из углов α_i — острый.

Движение системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad q \in \{r, \varphi, \psi\}, \quad L = T - U.$$

В дальнейшем предполагается, что в выбранных единицах размерности $GM = 1$.

3. Циклическая координата и понижение порядка по Раусу

Координата ψ — циклическая: функция Лагранжа L от нее явно не зависит. Ей отвечает первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J\dot{\psi} + r_0^2 \dot{\varphi} = \beta, \quad J = \mu r^2 + r_0^2. \quad (2)$$

Определяя из соотношения (2) скорость изменения угла ψ , имеем

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - r_0^2 \dot{\varphi}}{J}. \quad (3)$$

Исключая циклическую координату ψ по Раусу, приводим уравнения движения к виду

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial R}{\partial q}, \quad q \in \{r, \varphi\}, \\ R &= [L - \beta \cdot \dot{\psi}]_{(3)} = R_2(\dot{\varphi}, \dot{r}, r) + R_1(\dot{\varphi}, r) + R_0(\varphi, r), \\ R_2(\dot{\varphi}, \dot{r}, r) &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu r^2 r_0^2}{J} \dot{\varphi}^2, \quad R_1(\dot{\varphi}, r) = \frac{r_0^2}{J} \beta \dot{\varphi}, \quad R_0(\varphi, r) = -\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{J} - U.\end{aligned}$$

Приведенный потенциал системы — функция $W(\varphi, r) = -R_0(\varphi, r)$.

4. Стационарные конфигурации

Согласно теории Рауса [49, 50] (см. также [16]), стационарные конфигурации отвечают критическим точкам приведенного потенциала. На этих конфигурациях взаимное расположение треугольника и точки остается неизменным, причем, согласно (3), такая стационарная конфигурация равномерно вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi} = \beta/J$.

Уравнения этих критических точек имеют вид (ср. [31])

$$W_r = -\mu r \frac{\beta^2}{J^2} + rN(r, \varphi) - \cos \varphi C(r, \varphi) + \sin \varphi S(r, \varphi) = 0, \quad (4)$$

$$W_\varphi = U_\varphi = r [\cos \varphi S(r, \varphi) + \sin \varphi C(r, \varphi)] = 0, \quad (5)$$

где

$$N(r, \varphi) = \frac{\mu_1}{\rho_1^3(r, \varphi)} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3(r, \varphi)} + \frac{\mu_3}{\rho_3^3(r, \varphi)},$$

$$C(r, \varphi) = \frac{\mu_1 r_1}{\rho_1^3(r, \varphi)} + \frac{\mu_2 r_2 \cos \alpha_3}{\rho_2^3(r, \varphi)} + \frac{\mu_3 r_3 \cos \alpha_2}{\rho_3^3(r, \varphi)}, \quad S(r, \varphi) = \frac{\mu_2 r_2 \sin \alpha_3}{\rho_2^3(r, \varphi)} - \frac{\mu_3 r_3 \sin \alpha_2}{\rho_3^3(r, \varphi)}.$$

Здесь и далее записи вида f_x и f_{xy} обозначают частные производные функции f по аргументам, выписанным в виде нижних буквенных индексов.

Уравнения (4), (5) существенно нелинейны, что затрудняет их исследование в общем случае. Поэтому, как и в [31], будем в дальнейшем считать, что рассматриваемый треугольник — равносторонний,

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell, \quad \left(\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{2\pi}{3}, \quad r_0 = r_1 = r_2 = r_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell \right),$$

и в его вершинах сосредоточены одинаковые массы,

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3.$$

В этом случае функция W периодична по φ с периодом $2\pi/3$, и систему уравнений (4), (5) можно изучать, например, при $0 \leq \varphi \leq 2\pi/3$.

Уравнения (4), (5) при этом представимы в виде

$$-\mu r \frac{\beta^2}{J^2} + rn(r, \varphi) - \cos \varphi c(r, \varphi) + \sin \varphi s(r, \varphi) = 0, \quad (6)$$

$$r [\cos \varphi s(r, \varphi) + \sin \varphi c(r, \varphi)] = 0, \quad (7)$$

где

$$n(r, \varphi) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{\rho_1^3(r, \varphi)} + \frac{1}{\rho_2^3(r, \varphi)} + \frac{1}{\rho_3^3(r, \varphi)} \right],$$

$$c(r, \varphi) = \frac{r_0}{3} \left[\frac{1}{\rho_1^3(r, \varphi)} - \frac{1}{2\rho_2^3(r, \varphi)} - \frac{1}{2\rho_3^3(r, \varphi)} \right], \quad s(r, \varphi) = \frac{\sqrt{3}r_0}{6} \left[\frac{1}{\rho_2^3(r, \varphi)} - \frac{1}{\rho_3^3(r, \varphi)} \right].$$

Пусть

$$I. \varphi_I = 0, \quad II. \varphi_{II} = \pi \bmod 2\pi/3.$$

Так как

$$\sin \varphi_i = 0, \quad s(r, \varphi_i) = 0, \quad i \in \{I, II\},$$

то для этих значений угла φ уравнение (7) удовлетворяется при всех значениях $r \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формально говоря, уравнение (7) удовлетворяется и при $r = 0$. Но в этом случае координаты (r, ψ, φ) вырождаются и не могут быть использованы. Такого вырождения можно избежать, работая, например, в барицентрических координатах [31]. Другие подходы к изучению систем с особенностями обсуждаются в [41, 44].

Решениям I и II отвечают движения, на которых точка P находится на одной из осей симметрии $\Delta P_1 P_2 P_3$: в случае I она располагается напротив вершины, а в случае II — напротив середины стороны треугольника.

Для решений I и II уравнение (6) принимает вид

$$\beta^2 = f_i(r) \quad i = I, II, \quad (8)$$

$$f_i(r) = \frac{(\mu r^2 + r_0^2)^2}{\mu} \chi_i(r), \quad \chi_i(r) = \frac{1}{3r} \left(\frac{r - \omega_i r_0}{|r - \omega_i r_0|^3} + \frac{2r + \omega_i r_0}{(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{3/2}} \right),$$

где $\omega_I = 1$, $\omega_{II} = -1$.

Нулям функций $f_i(r)$ при $r > 0$ отвечают нули функций $\chi_i(r)$. При этом функция $\chi_I(r)$ нулей не имеет, в то время как функция $\chi_{II}(r)$ обращается в нуль при $r \approx 0.2847183548r_0$ (см., например, [30]). Этому нулю отвечает равновесие системы. Графики функций (8) на плоскости (r, β^2) обладают одной и той же наклонной асимптотой $\beta^2 = \mu r$.

Для определения критических точек функций (8) и их типов вычислим первые и вторые производные этих функций. Имеем

$$\frac{df_i(r)}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{d(\mu r^2 + r_0^2)^2}{dr} \chi_i(r) + \frac{(\mu r^2 + r_0^2)^2}{\mu} \frac{d\chi_i(r)}{dr} = \frac{\mu r^2 + r_0^2}{\mu} H_i(r), \quad (9)$$

$$H_i(r) = 4\mu r \chi_i(r) + (\mu r^2 + r_0^2) \frac{d\chi_i(r)}{dr} = \left[\frac{r(\mu r^2 - 3r_0^2) - \omega_i r_0(3\mu r^2 - r_0^2)}{3r^2|r - \omega_i r_0|^3} + \right. \\ \left. + \frac{r[\mu r^2(4r^2 + 19r_0^2) - r_0^2(12r^2 + 5r_0^2)] + 2\omega_i r_0[\mu r^2(5r^2 + 3r_0^2) - r_0^2(7r^2 + r_0^2)]}{6r^2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right],$$

$$\frac{d^2 f_i(r)}{dr^2} = 2r H_i(r) + \left(\frac{\mu r^2 + r_0^2}{\mu} \right) \frac{dH_i(r)}{dr}, \quad (10)$$

$$\frac{dH_i(r)}{dr} = -\frac{2}{3} \frac{(r - \omega_i r_0)(\mu r^4 - r_0^2(6r^2 + r_0^2) - 4r r_0(\mu r^2 - r_0^2)\omega_i)}{r^3|r - \omega_i r_0|^5} - \\ - \frac{\mu r^2(8r^4 + 69r_0^2 r^2 - 4r_0^4) - r_0^2(2r_0^2 + 3r^2)(7r_0^2 + 16r^2)}{6r^2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{7/2}} - \\ - \frac{\omega_i r_0(7\mu r^4(11r_0^2 + 8r^2) - r_0^2(8r_0^4 + 63r_0^2 r^2 + 176r^4))}{12r^3(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{7/2}}. \quad (11)$$

При вычислении производных были использованы равенства

$$\frac{d\chi_i(r)}{dr} = -\frac{1}{3r^2} \left(\frac{3r - \omega_i r_0}{|r - \omega_i r_0|^3} + \frac{r(12r^2 + 5r_0^2) + 2\omega_i r_0(7r^2 + r_0^2)}{2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right),$$

$$\frac{d^2 \chi_i(r)}{dr^2} = \frac{1}{3r^3} \left(\frac{2(r - \omega_i r_0)(6r^2 - 4\omega_i r r_0 + r_0^2)}{|r - \omega_i r_0|^5} - \right. \\ \left. - \frac{2r(48r^4 + 53r^2 r_0^2 + 14r_0^4) + \omega_i r_0(176r^4 + 63r^2 r_0^2 + 8r_0^4)}{4(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{7/2}} \right).$$

Точки ветвления стационарных конфигураций по переменной r определяются из равенства нулю вычисленной в (9) первой производной функции $f_i(r)$. Так как первый множитель в этом выражении положителен, то эта производная может обращаться в нуль лишь в тех точках, где

$$H_i(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\frac{r - 3\omega_i r_0}{|r - \omega_i r_0|^3} + \frac{r(4r^2 + 19r_0^2) + 2\omega_i r_0(5r^2 + 3r_0^2)}{2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right] - \\ & - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[\frac{3r - \omega_i r_0}{|r - \omega_i r_0|^3} + \frac{r(12r^2 + 5r_0^2) + 2\omega_i r_0(7r^2 + r_0^2)}{2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения типа критических точек, найденных из соотношения (13), воспользуемся выражением (10) для второй производной $f_i(r)$. На найденных решениях первое слагаемое в (10) обращается в нуль, и знак определяется знаком производной (11).

Из соотношения (13) следует, что в критических точках функций $f_i(r)$ зависимость μ от r определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mu_i(r) &= - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \frac{d\chi_i(r)}{dr} \left(\frac{d\chi_i(r)}{dr} + 4 \frac{\chi_i(r)}{r} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[\frac{3r - \omega_i r_0}{|r - \omega_i r_0|^3} + \frac{r(12r^2 + 5r_0^2) + 2\omega_i r_0(7r^2 + r_0^2)}{2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right] \times \\ &\times \left[\frac{r - 3\omega_i r_0}{|r - \omega_i r_0|^3} + \frac{r(4r^2 + 19r_0^2) + 2\omega_i r_0(5r^2 + 3r_0^2)}{2(r^2 + \omega_i r r_0 + r_0^2)^{5/2}} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

причем

$$\frac{d\mu_i(r)}{dr} = \frac{2r_0^2}{r^3} \left(\frac{d\chi_i(r)}{dr} + 4 \frac{\chi_i(r)}{r} \right)^{-2} \left(\left[3 \frac{d\chi_i(r)}{dr} + 2 \frac{\chi_i(r)}{r} \right] \frac{d\chi_i(r)}{dr} - 2\chi_i(r) \frac{d^2\chi_i(r)}{dr^2} \right). \quad (15)$$

Случай *I*. Из соотношения (15) следует, что функция (14) не имеет критических точек при $r > 0$ (см. график на рисунке 2). Это означает, что для всех значений параметра μ зависимость (8) устроена единообразно, и при ее исследовании достаточно ограничиться, например, случаем $\mu = 1/4$, рассмотренным ранее в [31]. В этом случае функция $\beta^2 = f_I(r)$ имеет единственную особую точку $r = r_I^*$ — точку минимума (см. рис. 4а и 4б, выполненные, соответственно, для $\mu = 1/4$ и $\mu = 3/4$).

Случай *II*. Кроме того, из соотношения (15) следует, что функция $\mu = \mu_{II}(r)$ достигает максимума при $r = r_* \approx 1.670537178r_0$, причем $\mu_* = \mu(r_*) \approx 0.4978570817$. Это означает, что при $\mu > \mu_*$ функция (8) не имеет критических точек при $r > 0$ (см. график на рис. 3), в то время как при $\mu < \mu_*$, например, в рассмотренном ранее в [31] случае $\mu = 1/4$, функция (8) имеет две критические точки: точку максимума r_{II}^{**} и точку минимума r_{II}^* , $r_{II}^{**} < r_{II}^*$ (также см. рис. 4а и 4б, выполненные для $\mu = 1/4$ и $\mu = 3/4$ соответственно). При $\mu \mapsto \mu_*$ точка максимума r_{II}^{**} и точка минимума r_{II}^* сливаются в точку перегиба. Заметим, что при найденном выше значении $r = r_{II} \approx 0.284718r_0$ эта функция обращается в нуль: $f_{II}(r_{II}) = 0$. Этому нулю отвечает положение равновесия системы в целом.

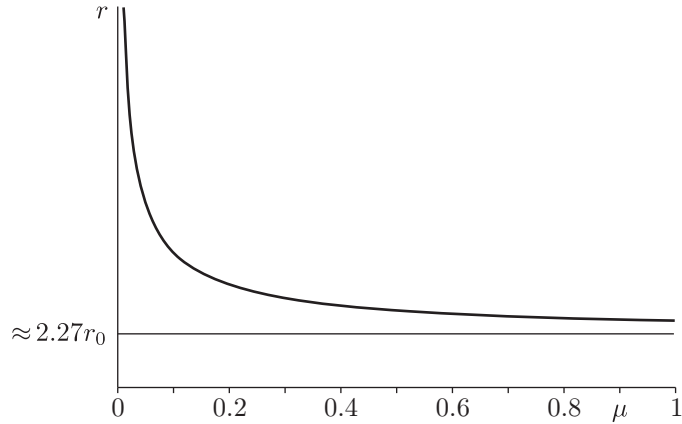


Рис. 2. График зависимости критических значений $\mu(r)$ для случая *I*.

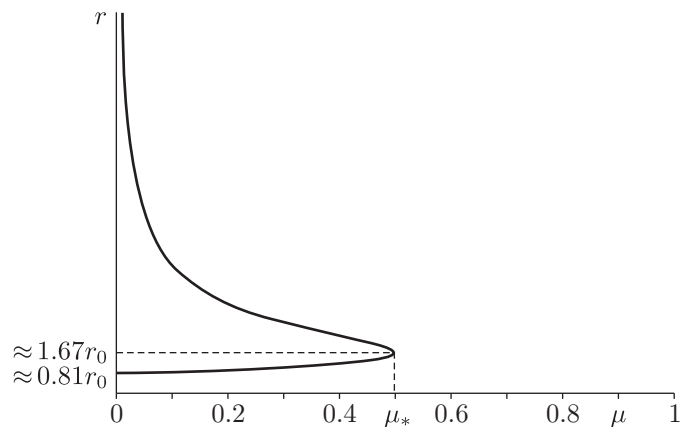


Рис. 3. График зависимости критических значений $\mu(r)$ для случая *II*.

5. Достаточные условия устойчивости

Входящие в матрицу второй вариации приведенного потенциала $W(\varphi, r)$ производные имеют вид

$$W_{rr} = \frac{\mu\beta^2(3\mu r^2 - r_0^2)}{J^3} + N(r, \varphi) + rN_r(r, \varphi) - \cos \varphi C_r(r, \varphi) + \sin \varphi S_r(r, \varphi),$$

$$W_{\varphi\varphi} = r [\cos \varphi [C(r, \varphi) + S_\varphi(r, \varphi)] + \sin \varphi [C_\varphi(r, \varphi) - S(r, \varphi)]],$$

$$W_{r\varphi} = W_{\varphi r} = r [\sin \varphi [C(r, \varphi) + rC_r(r, \varphi)] + \cos \varphi [S(r, \varphi) + rS_r(r, \varphi)]].$$

На решениях *I* и *II* эти производные записываются как

$$W_{rr} = \frac{\chi_I(r)}{J} (3\mu r^2 - r_0^2) + n(r, \varphi_k) + rn_r(r, \varphi_k) - \cos \varphi_k c_r(r, \varphi_k),$$

$$W_{\varphi\varphi} = r \cos \varphi_k [c(r, \varphi_k) + s_\varphi(r, \varphi_k)], \quad W_{r\varphi} = 0,$$

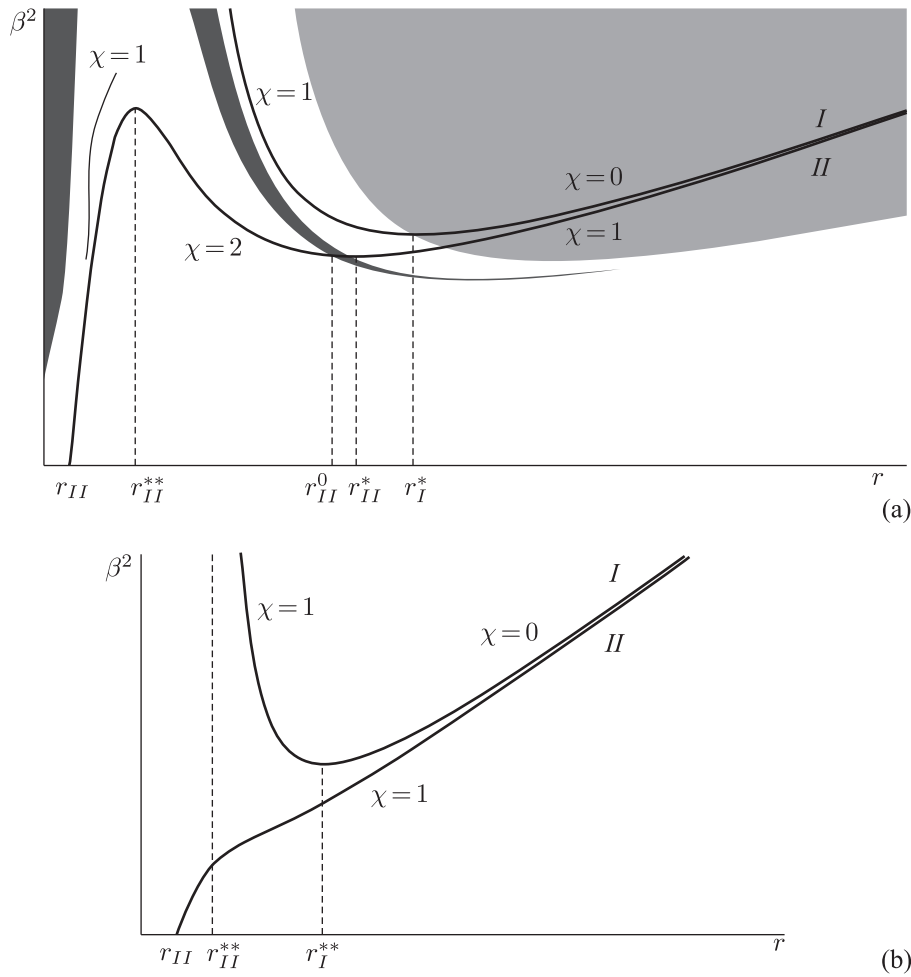


Рис. 4. Диаграмма Пуанкаре при $\mu = 1/4$ (а), при $\mu = 3/4$ (б); светло- и темно-серым обозначены области значений параметра $\beta = \beta(r)$, где выполняются необходимые условия устойчивости решений I и II соответственно.

где

$$n_r(r, \varphi_k) = \frac{\omega_k r_0 - r}{\rho_1^5(r, \varphi_k)} - \frac{\omega_k r_0 + 2r}{2} \left(\frac{1}{\rho_2^5(r, \varphi_k)} + \frac{1}{\rho_3^5(r, \varphi_k)} \right),$$

$$c_r(r, \varphi_k) = \frac{r_0(\omega_k r_0 - r)}{\rho_1^5(r, \varphi_k)} + \frac{r_0(\omega_k r_0 + 2r)}{4} \left(\frac{1}{\rho_2^5(r, \varphi_k)} + \frac{1}{\rho_3^5(r, \varphi_k)} \right),$$

$$s_\varphi(r, \varphi_k) = -\frac{3}{4} \omega_k r_0^2 r \left(\frac{1}{\rho_2^5(r, \varphi_k)} + \frac{1}{\rho_3^5(r, \varphi_k)} \right).$$

Таким образом, исследование достаточных условий устойчивости сводится к изучению знаков функций W_{rr} и $W_{\varphi\varphi}$.

На решении I при $0 < \mu < 1$ имеем $W_{\varphi\varphi} > 0$ при всех значениях $r > 0$. Кроме того, при $r_0 < r < r_I^*$ функция $W_{rr} < 0$ и движение неустойчиво ($\chi = 1$), в то время как при $r > r_I^*$ функция $W_{rr} > 0$ и движения устойчивы по Ляпунову ($\chi = 0$).

На решении II при $0 < \mu < \mu_*$ имеем $W_{\varphi\varphi} < 0$ при всех значениях $r > 0$. Это означает, что степень неустойчивости χ не может быть меньше единицы. При $r_{II} < r < r_{II}^{**}$ и при $r > r_{II}^*$ имеем $W_{rr} > 0$, и движение неустойчиво ($\chi = 1$). Вместе с тем, при $r_{II}^{**} < r < r_{II}^*$ имеем $W_{rr} < 0$, и требуется исследование необходимых условий устойчивости ($\chi = 2$).

При $\mu > \mu_*$ на решении II имеем $W_{rr} > 0$ при $r > r_{II}$, и движения неустойчивы ($\chi = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Устойчивость движений, для которых $r = r_I^*$, $r = r_{II}^*$, $r = r_{II}^{**}$ и $r = r_0$, в работе не обсуждается.

ПРИМЕР. На рисунке 4а ветви бифуркационной диаграммы, отвечающие решениям I и II , изображены для случая $\mu = 1/4$, рассматривавшегося ранее [31]. На ветви I точка $r = r_I^* \approx 4.037131r_0$ отделяет область $r > r_I^*$, для которой движения устойчивы по Ляпунову ($\chi = 0$), от области $r < r_I^*$, для которой движения неустойчивы ($\chi = 1$). На ветви II при $r_{II} < r < r_{II}^{**} = r_0$ и при $r > r_{II}^* \approx 3.357757r_0$ движения неустойчивы ($\chi = 1$), в то время как для движений с $r_{II}^{**} < r < r_{II}^*$ требуется исследование необходимых условий устойчивости ($\chi = 2$).

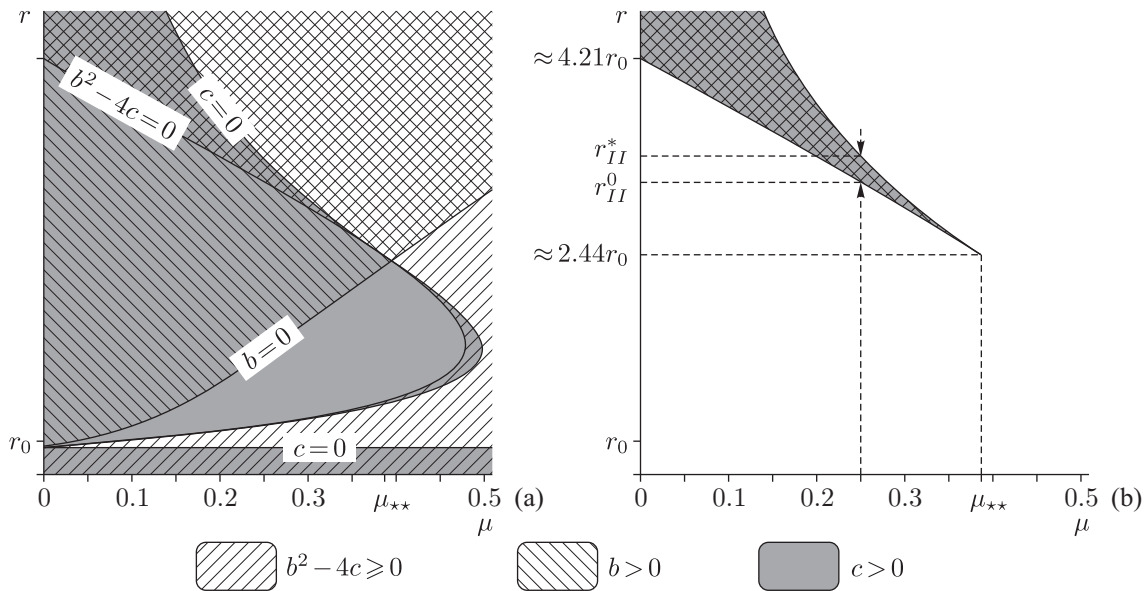


Рис. 5. Область значений параметра $\mu = \mu(r)$, при которых выполняются необходимые условия устойчивости установившихся движений из семейства II .

На рисунке 4б изображены ветви бифуркационной диаграммы, отвечающие решениям I и II для случая $\mu = 3/4$. Здесь $r_I^{**} \approx 2.918734r_0$, $\beta_I = \beta(r_I^{**}) = 1.431$. Установившиеся движения I существуют при всех значениях β , в то время как движения II существуют лишь при $\beta^2 \geq \beta_I^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно из многочисленных исследований (см., например, [7, 17, 34–36, 40, 53]), та или иная дискретная симметрия в распределении масс обеспечивает существование семейств установившихся движений, примечательных как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Не составляют исключения и установившиеся движения, исследуемые в данной задаче.

6. Необходимые условия устойчивости

Для исследования необходимых условий устойчивости установившихся движений из семейства II с $\chi = 2$ выпишем линеаризованные в их окрестности уравнения движения. Они имеют вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\delta r} - G\dot{\delta\varphi} - B\delta r &= 0, \\ C\ddot{\delta\varphi} + G\dot{\delta r} - D\delta\varphi &= 0, \\ A = R_{\dot{r}\dot{r}} = \mu, \quad C = R_{\dot{\varphi}\dot{\varphi}} = \frac{\mu r^2 r_0^2}{J}, \quad G = R_{r\dot{\varphi}} = -\frac{2\mu r r_0^2 \beta}{J^2}, \\ B = R_{rr} = \frac{\mu\beta^2(r_0^2 - 3\mu r^2)}{J^3} - U_{rr}(r, \pi), \quad D = R_{\varphi\varphi} = -U_{\varphi\varphi}(r, \pi). \end{aligned}$$

Здесь

$$U_{rr}(r, \pi) = n(r, \pi) + r n_r(r, \pi) + c_r(r, \pi), \quad U_{\varphi\varphi}(r, \pi) = -r(c(r, \pi) + s_\varphi(r, \pi)).$$

Все корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0, \\ b = G^2 A^{-1} C^{-1} - B A^{-1} - D C^{-1}, \quad c = B D C^{-1} A^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

чисто мнимые при одновременном выполнении неравенств

$$b^2 - 4c \geq 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad (17)$$

определяющих необходимые условия устойчивости.

Для каждого значения параметра μ условиями (17) выделяется область на плоскости (r, β^2) . Для обсуждавшегося выше случая $\mu = 1/4$ для движений I эта область закрашена светло-серым (рис. 4а). Естественно, эта область содержит часть бифуркационной кривой, отвечающей стационарным движениям, устойчивым в вековом смысле ($\chi = 0$).

В этом же случае для движений II аналогичная область закрашена темно-серым (см. также рис. 4а). Эта область, конечно, не содержит неустойчивых стационарных движений с $\chi = 1$. Но она разбивает множество стационарных движений II на два подмножества, на одном из которых необходимые условия устойчивости не выполнены, а на другом — выполнены. Область выполнения необходимых условий устойчивости — промежуток $r \in (r_{II}^0, r_{II}^*)$, где $r_{II}^0 \approx 3.132426r_0 \in (r_{II}^{**}, r_{II}^*)$.

Неравенства (17) выделяют область Ω в пространстве (μ, r, β) . В том же пространстве уравнение (8) при $i = II$ задает поверхность \mathcal{F} , заполненную стационарными движениями.

На рисунке 5 изображена проекция пересечения области Ω и поверхности \mathcal{F} на полушару $\{0 < \mu < 1\} \times \{0 \leq r < \infty\}$. В этой полосе имеется точка $(r_{**}, \mu_{**}) \approx (0.395317, 2.44019r_0)$, в которой пересекаются кривые, определяемые равенствами $b^2 - 4c = 0$, $b = 0$ и $c = 0$, рассматриваемыми после подстановки в них величины β , выраженной из соотношения (8) при $i = II$. При $\mu > \mu_{**}$ устойчивых в первом приближении установившихся движений из семейства II нет. При уменьшении значения параметра μ диапазон значений r , при которых выполнены необходимые условия устойчивости, становится шире, одновременно сдвигаясь в область больших значений величины r (рис. 5б). Таким образом, при $\mu > \mu_{**}$ множество установившихся движений не столь богато, как в противоположном случае.

7. О существовании «косых» стационарных конфигураций

Рассмотрим вопрос о существовании решений, отличных от I и II , то есть «косых» стационарных конфигураций. Для этого воспользуемся введенной выше ПСО $Sxyz$. Прежде всего, определим безразмерные переменные

$$x = r_0 x', \quad y = r_0 y', \quad z = r_0 z'.$$

Отбрасывая штрихи и ограничиваясь рассмотрением случая равных масс ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3$), представим приведенный потенциал в виде

$$W = \frac{1}{2r_0^2} \frac{\beta^2}{\mu(x^2 + y^2) + 1} - \frac{1}{3r_0} (\rho_1^{-1}(x, y) + \rho_2^{-1}(x, y) + \rho_3^{-1}(x, y)), \quad (18)$$

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$$\rho_3(x, y) = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

На рисунке 6 схематично изображены сечения приведенного потенциала (18) при $\mu = 1/4$ и характерных значениях параметра β : рисунок 6а соответствует значению $\beta \in (0; \beta(r_{II}^*))$, рисунок 6б — значению $\beta \in (\beta(r_{II}^*); \beta(r_I^*))$, рисунок 6с — значению $\beta \in (\beta(r_I^*); \beta(r_{II}^{**}))$, рисунок 6д — значению $\beta > \beta(r_{II}^{**})$.

Символом \diamond отмечены точки максимума, символом \star — точки минимума приведенного потенциала (18).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая $\mu = 3/4$ сечения приведенного потенциала будут только двух типов. Эти сечения по структуре схожи с сечениями на рисунках 6а и 6д.

Изучение схем показывает, что во всех обнаруженных численно случаях установившиеся движения — осевые. Возникает вопрос: существуют ли так называемые «косые» установившиеся движения, для которых массивная точка не располагается ни на одной из осей симметрии треугольника?

Сначала исследуем этот вопрос в случае, когда центр масс треугольника и массивная точка расположены неподалеку друг от друга. В малой окрестности точки C для точек плоскости π представим выражение для приведенного потенциала (18) в виде разложения

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + \dots,$$

$$W_0 = \frac{\beta^2 - 2r_0}{2r_0^2}, \quad W_1 = 0, \quad W_2 = -\frac{2\mu\beta^2 + r_0}{4r_0^2} (x^2 + y^2), \quad W_3 = -\frac{5}{8} \frac{1}{r_0} x (x^2 - 3y^2),$$

$$W_4 = \frac{32\mu^2\beta^2 - 9r_0}{64r_0^2} (x^2 + y^2)^2, \quad W_5 = -\frac{35}{128} \frac{1}{r_0} x (x^2 - 3y^2) (x^2 + y^2).$$

Введем функции (ср. [36, 40, 53])

$$j_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad j_3 = \sqrt[3]{x^3 - 3xy^2},$$

инвариантные относительно поворота на угол $\alpha = 2\pi/3$:

$$j_k(x, y) \equiv j_k(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha), \quad k = 2, 3.$$

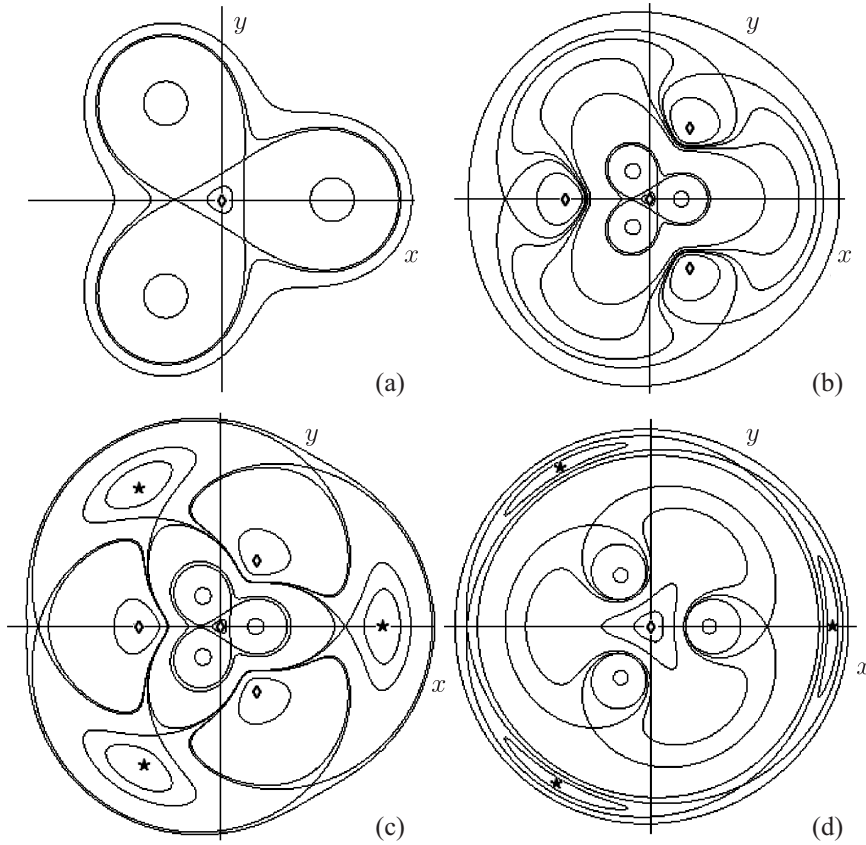


Рис. 6. Сечения приведенного потенциала при $\mu = 1/4$ и характерных значениях параметра β : (a) $\beta \in (0; \beta(r_{II}^*))$, (b) $\beta \in (\beta(r_{II}^*); \beta(r_I^*))$, (c) $\beta \in (\beta(r_I^*); \beta(r_{II}^{**}))$, (d) $\beta > \beta(r_{II}^{**})$; \diamond — точки максимума, \star — точки минимума.

Якобиан

$$\det \frac{\partial \{j_2, j_3\}}{\partial \{x, y\}} = \frac{y(y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x)}{j_2 j_3^2}$$

отличен от нуля всюду, кроме осей симметрии треугольника. Это означает, что j_2, j_3 могут быть использованы в качестве новых переменных всюду вне осей симметрии треугольника. При этом приведенный потенциал (18) запишется в виде

$$W = \frac{\beta^2 - 2r_0}{2r_0^2} - \frac{2\mu\beta^2 + r_0}{4r_0^2} j_2^2 - \frac{5}{8r_0} j_3^3 + \frac{32\mu^2\beta^2 - 9r_0}{64r_0^2} j_2^4 - \frac{35}{128} \frac{1}{r_0} j_3^3 j_2^2 + \dots$$

В переменных (j_2, j_3) уравнения критических точек функции W имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial j_2} &= - \left(\frac{2\mu\beta^2 + r_0}{2r_0^2} - \frac{32\mu^2\beta^2 - 9r_0}{16r_0^2} j_2^2 + \frac{35}{64} \frac{1}{r_0} j_3^3 \right) j_2 + \dots = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial j_3} &= - \frac{15}{8r_0} \left(1 + \frac{7}{16} j_2^2 \right) j_3^2 + \dots = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как в окрестности начала координат величины (j_2, j_3) малы вместе с (x, y) , то в такой окрестности уравнения (19) не удовлетворяются только при значениях $j_2 = j_3 = 0$,

для которых замена переменных некорректна. Это означает, что «косых» стационарных конфигураций, при которых точка P располагается вблизи центра $\Delta P_1 P_2 P_3$, не существует.

Теперь исследуем вопрос о том, возможны ли «косые» установившиеся движения в случае, когда массивная точка располагается далеко от центра треугольника. Для этого введем функции

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad k_3 = \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Эти функции инвариантны относительно поворота на угол $\alpha = 2\pi/3$:

$$k_p(x, y) \equiv k_p(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha), \quad p = 2, 3.$$

Якобиан

$$\det \frac{\partial \{k_2, k_3\}}{\partial \{x, y\}} = \frac{3y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y)}{(x^2 + y^2)^{7/2}}$$

отличен от нуля всюду, кроме осей симметрии треугольника. Это означает, что величины k_2, k_3 также могут быть использованы в качестве новых переменных всюду вне осей симметрии треугольника. Воспользуемся ими для исследования вопроса о существовании «косых» стационарных конфигураций в случае, когда центр треугольника и точка достаточно далеки друг от друга.

Если центр треугольника и массивная точка далеки друг от друга, то $0 < k_2 \ll 1$, $|k_3| \ll 1$. Представим выражение для приведенного потенциала (18) в виде разложения

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{r_0 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2 (x^2 + y^2)} - \frac{1}{4r_0 (x^2 + y^2)^{3/2}} - \\ &- \frac{5x(x^2 - 3y^2)}{8r_0 (x^2 + y^2)^{7/2}} - \frac{\beta^2}{2\mu^2 r_0^2 (x^2 + y^2)^2} - \frac{9}{64r_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} + \dots = \\ &= -\frac{1}{r_0} k_2 + \frac{\beta^2}{2\mu r_0^2} k_2^2 - \frac{1}{4r_0} \left(1 + \frac{5}{2} k_3\right) k_2^3 - \frac{\beta^2}{2\mu^2 r_0^2} k_2^4 - \frac{9}{64r_0} k_2^5 + \dots \end{aligned}$$

Уравнения критических точек имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial k_2} = -\frac{1}{r_0} + \frac{\beta^2}{\mu r_0^2} k_2 - \frac{3}{4r_0} \left(1 + \frac{5}{2} k_3\right) k_2^2 - \frac{2\beta^2}{\mu^2 r_0^2} k_2^3 - \frac{45}{64r_0} k_2^4 + \dots = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial W}{\partial k_3} = -\frac{5}{8r_0} k_2^3 + \dots = 0. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что в рамках сделанных предположений о малости $k_2, |k_3|$ система (20), (21) решений не имеет. Это означает, что «косые» стационарные конфигурации, при которых центр треугольника и массивная точка далеки друг от друга, не существуют.

8. Историческое замечание

Исследование точных решений в задаче двух тел, из которых по крайней мере одно отлично от массивной точки, имеет давнюю историю.



Различают случаи

- a) $\mu \rightarrow 1$, то есть точную постановку задачи о движении тела с определенным распределением масс в центральном поле сил;
- b) $\mu \rightarrow 0$, то есть задачу о точках либрации в поле притяжения равномерно вращающегося тела некоторой формы;
- c) промежуточный случай, к которому и относится изучаемая задача.

Изучение движения тел конечного размера под действием взаимного притяжения восходит к основополагающим работам [21, 22] (см. также [12]). Точные решения, известные как «спица», «стрела» и «поплавок», в пространственной задаче о движении взаимно гравитирующих однородных шара и стержня были обнаружены в [14]. Бифуркации и устойчивость стационарных движений в плоской постановке данной задачи рассмотрены в [18].

Существование и устойчивость точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида исследовались в [15, 57, 58] (см. также [23–27]). Задача о пространственном движении пассивно гравитирующего тела (звезды или центра масс шарового скопления) внутри вращающейся эллиптической галактики рассмотрена в [13], где определены точки либрации и установлена их устойчивость в смысле Ляпунова.

Особый интерес к исследованию точек либрации проявился в связи с необходимостью точного описания движения космических аппаратов в окрестности малых небесных тел (астероидов, комет и т. д.). Такое описание полей двойных астероидов с помощью полей, порождаемых гантелеобразными телами, изучалось в [55, 56]. Для астероидов, потенциал притяжения которых допускает приближение с помощью тройки массивных точек [42, 43, 54], в специальных случаях представление о движении можно составить исходя из результатов работ [31, 32, 47].

Исследование гравитирующих гантелеобразных тел восходит к [33] (см. также, например, [46, 52]). Так, для системы, состоящей из гантели и массивной точки, существование и устойчивость установившихся движений изучались в [3] (см. также работы [11, 28, 39], посвященные обобщенным постановкам этой задачи). Установившиеся движения пары двух взаимно гравитирующих гантелей были рассмотрены в [19] в симметричном случае и в [29] в несимметричном случае.

Вопросы существования, ветвления и устойчивости установившихся движений взаимно гравитирующих двухмерного крестообразного тела и материальной точки исследовались в [9] (см. также [8]). Установившиеся движения трехмерного крестообразного тела и массивной точки под действием взаимного притяжения изучались в предположении о наличии пространственной нерегулярности в распределении масс [1].

Укажем также на перспективы, связанные с исследованиями динамики в сферической задаче двух тел [38] (см. также [20]) и ее обобщениях [10].

Список литературы

- [1] Абрарова Е. В., Карапетян А. В. О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ, 1996, т. 60, № 3, с. 375–387.
- [2] Балк М. Б., Болтянский В. Г. Геометрия масс. Москва: Наука, 1987. 160 с.
- [3] Белецкий В. В., Пономарева О. Н. Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // Космические исследования, 1990, т. 28, № 5, с. 664–675.

- [4] Белецкий В. В., Родников А. В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космические исследования*, 2008, т. 46, № 1, с. 42–50.
- [5] Белецкий В. В., Родников А. В. Компланарные точки либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 569–576.
- [6] Березкин Е. Н. Курс теоретической механики. 2-е изд. Москва: МГУ, 1974. 647 с.
- [7] Буров А. А. О динамике тел, допускающих симметрии // *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения*: Сб. ст. Москва: ВЦ РАН, 1993. С. 3–12.
- [8] Буров А. А. О движении крестообразных тел вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // *ПММ*, 1996, т. 60, № 1, с. 30–36.
- [9] Буров А. А., Карапетян А. В. О движении крестообразных тел // *МТТ*, 1995, № 6, с. 14–18.
- [10] Буров А. А., Мотт И., Славяновский Я. Е., Степанов С. Е. Об устойчивости и бифуркациях стационарных движений гантели по сфере // *Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения*: Сб. ст. Москва: ВЦ РАН, 2006. С. 93–104.
- [11] Буров А. А., Паскаль М., Степанов С. Я. Гироскопическая устойчивость треугольных решений в обобщенной плоской задаче трех тел // *ПММ*, 2000, т. 64, № 5, с. 761–771.
- [12] Видякин В. В. Разложение силовой функции двух однородных сфероидов с несовпадающими плоскостями симметрии // *Астрономический журнал*, 1972, т. 49, № 3, с. 641–646.
- [13] Гасанов С. А., Лукьянов Л. Г. О точках либрации в задаче о движении звезды внутри эллиптической галактики // *Астрономический журнал*, 2002, т. 79, № 10, с. 944–951.
- [14] Дубошин Г. Н. Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // *Астрономический журнал*, 1959, т. 36, № 1, с. 153–163.
- [15] Журавлёв С. Г. Об устойчивости точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида в пространственном случае // *Астрономический журнал*, 1974, т. 51, № 6, с. 1330–1334.
- [16] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. Москва: Едиториал УРСС, 1998. 168 с.
- [17] Карапетян А. В., Нараленкова И. И. О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // *ПММ*, 1998, т. 62, № 1, с. 12–21.
- [18] Карапетян А. В., Сахокиа И. Д. О бифуркации и устойчивости стационарных движений двух гравитирующих тел // *ПММ*, 1992, т. 56, № 6, с. 935–938.
- [19] Карапетян А. В., Шаракин С. А. О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.*, 1992, № 3, с. 42–48.
- [20] Классическая динамика в неевклидовых пространствах: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 348 с.
- [21] Кондурарь В. Т. Проблемы движения двух эллипсоидов под действием взаимного притяжения: 1 // *Астрономический журнал*, 1936, т. 13, № 6, с. 563–588.
- [22] Кондурарь В. Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // *Астрономический журнал*, 1959, т. 36, № 5, с. 890–901.
- [23] Косенко И. И. О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // *ПММ*, 1981, т. 45, № 1, с. 26–33.
- [24] Косенко И. И. Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // *Космические исследования*, 1981, т. 19, № 2, с. 200–209.
- [25] Косенко И. И. Нелинейный анализ устойчивости точек либрации трехосного эллипсоида // *ПММ*, 1985, т. 49, № 1, с. 16–24.
- [26] Косенко И. И. О разложении гравитационного потенциала неоднородного эллипсоида в ряд // *ПММ*, 1986, т. 50, № 2, с. 194–199.
- [27] Косенко И. И. Об устойчивости точек либрации неоднородного трехосного эллипсоида // *ПММ*, 1987, т. 51, № 1, с. 3–8.

- [28] Косенко И. И., Степанов С. Я. Устойчивость положений относительного равновесия орбитальной связки с учетом ударных взаимодействий: Неограниченная задача // МТТ, 2006, № 4, с. 86–96.
- [29] Муниципына М. А. О стационарных движениях двух взаимно гравитирующих тел и их устойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 2005, № 6, с. 39–42.
- [30] Никонов В. И. Задачник Кванта: Задача Ф2325 // Квант, 2013, № 5-6, с. 14.
- [31] Никонов В. И. Относительные равновесия в задаче о движении треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 2014, № 2, с. 45–51.
- [32] Никонов В. И. Существование и устойчивость стационарных конфигураций в задаче о движении проволочного треугольника и точки под действием сил взаимного притяжения // ПММ, 2015, т. 79, № 3, с. 334–343.
- [33] Окунев Ю. М. О возможных движениях длинной гантели в центральном поле сил // Космические исследования, 1969, т. 7, № 5, с. 637–642.
- [34] Суликашвили Р. С. О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Москва: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57–66.
- [35] Суликашвили Р. С. Об устойчивости стационарных движений тел с шаровым тензором инерции в ньютоновском поле сил // ПММ, 1987, т. 51, № 5, с. 758–762.
- [36] Суликашвили Р. С. О стационарных движениях тел, допускающих группы симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ, 1989, т. 53, № 4, с. 582–586.
- [37] Beletsky V. V., Rodnikov A. V. On evolution of libration points similar to Eulerian in the model problem of the binary-asteroids dynamics // J. Vibroeng., 2008, vol. 10, no. 4, pp. 550–556.
- [38] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Two-body problem on a sphere: Reduction, stochasticity, periodic orbits // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–279.
- [39] Bourov A., Pascal M., Stepanov S. Steady motions of two mass points connected with spring in a Newtonian force field // Cahier du CERMA, 1996, vol. 14, pp. 1–13.
- [40] Burov A. A., Sulikashvili R. S. On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prepublication de la laboratoire de mathématiques appliquées, 1993, no. 25, 8 pp.
- [41] Hernández-Garduño A., Marsden J. E. Regularization of the amended potential and the bifurcation of relative equilibria // J. Nonlinear Sci., 2005, vol. 15, no. 2, pp. 93–132.
- [42] Herrera Sucarrat E. The full problem of two and three bodies: Application to asteroids and binaries: PhD Dissertation. Guildford: University of Surrey, 2012. 180 pp.
- [43] Herrera-Sucarrat E., Palmer P. L., Roberts R. M. Modeling the gravitational potential of a non-spherical asteroid // J. Guid. Control Dynam., 2013, vol. 36, no. 3, pp. 790–798.
- [44] Karapetian A. V. On construction of the effective potential in singular cases // Regul. Chaotic Dyn., 2000, vol. 5, no. 2, pp. 219–224.
- [45] Margot J.-L., Pravec P., Taylor P., Carry B., Jacobson S. Asteroid systems: Binaries, triples, and pairs. arxiv:1504.00034v3 (2015).
- [46] Moran J. P. Effects of plane librations on the orbital motion of a dumbbell satellite // ARS Journal, 1961, vol. 31, no. 8, pp. 1089–1096.
- [47] Nikonov V. On relative equilibria of mutually gravitating massive point and triangular rigid body // Proc. of the Internat. Astronomical Union, 2015, vol. 9, s310, pp. 170–171.
- [48] Rodnikov A. V. Rotations of a dumbbell equipped with the «leier constraint» // J. Vibroeng., 2008, vol. 10, no. 4, pp. 557–561.
- [49] Routh E. J. A treatise on stability of a given state of motion. London: McMillan, 1877. 108 pp.
- [50] Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being part II of a treatise on the whole subject. 6th ed. New York: Dover, 1955. 484 pp.

- [51] Scheeres D. J. Orbital motion in strongly perturbed environments: Applications to asteroid, comet and planetary satellite orbiters. Berlin: Springer, 2012. 390 pp.
- [52] Schechter H. B. Dumbbell librations in elliptic orbits // AIAA Journal, 1964, vol. 2, no. 6, pp. 1000–1003.
- [53] Sulikashvili R. S. On stationary motions of Plato's bodies in a gravitational field // Teor. Primen. Meh., 1989, vol. 15, pp. 119–125.
- [54] Turconi A., Palmer Ph., Roberts M. Simple gravitational models and control laws for autonomous operations in proximity of uniformly rotating asteroids // AIAA Astrodynamic Specialist Conference (Vail, USA, 2015): Conference paper AAS-15, pp. 693–694.
- [55] Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // Astrophys. Space Sci., 2015, vol. 356, no. 1, pp. 29–42.
- [56] Zeng X., Baoyin H., Li J. Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 1. Equilibria in the equator and their stability // Astrophys. Space Sci., 2016, vol. 361, no. 1, Art. 14, 12 pp.
- [57] Zhuravlev S. G. Stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid // Celestial Mech., 1972, vol. 6, no. 3, pp. 255–267.
- [58] Zhuravlev S. G. About the stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid in a degenerate case // Celestial Mech., 1973, vol. 8, no. 1, pp. 75–84.

Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point

Alexander A. Burov¹, Vasily I. Nikonov²

¹Federal Research Center “Computer Science and Control”,
Vavilova st. 40, Moscow 119333, Russia
National Research University “Higher School of Economics”
Myasnitskaya st. 20, Moscow, 101000, Russia

²Lomonosov Moscow State University
Leninskie Gory st. 1, Moscow, 119991, Russia

¹jtm@narod.ru, ²nikon_v@list.ru

The planar motion of an equilateral triangle with equal masses at vertices and of a point subjected to mutual Newtonian attraction is considered. Necessary conditions for the stability of “straight”, axial steady configurations, when the massive point is located on one of the symmetry axes of the triangle, are studied. The generation of other, “oblique”, steady configurations is discussed in connection with the variation, for certain parameter values, of the degree of instability of some “straight” steady configurations.

MSC 2010: 70K20, 70K42, 70F05

Keywords: generalized planar two-body problem, asteroid-like systems, gravitating systems with irregular mass distribution, stability of steady motions, necessary conditions for stability, gyroscopic stabilization, bifurcations of steady motions, Poincaré bifurcation diagrams

Received March 24, 2016, accepted May 13, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 179–196 (Russian)