



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.3

MSC 2010: 70E60, 70Q05, 70Hxx

**Управление движением
неуравновешенного тяжелого эллипсоида
в жидкости с помощью роторов**

Е. В. Ветчанин, А. А. Килин

В данной работе рассмотрено движение в идеальной жидкости неуравновешенного эллипсоида под действием силы тяжести и вращения трех внутренних роторов. Доказано, что рассматриваемая система является управляемой по конфигурационным переменным. Определены условия, при выполнении которых система является неуправляемой. Указан способ стабилизации тела в конечной точке траектории с помощью ограниченных воздействий. Построено частное решение, соответствующее движению по спиральной траектории с постоянной по модулю и направлению угловой скоростью. Найдены управления, реализующие это движение, и указаны условия, при выполнении которых данные управления являются ограниченными функциями времени.

Ключевые слова: идеальная жидкость, движение твердого тела, уравнения Кирхгофа, управление роторами, гейты

Получено 25 ноября 2016 года
После доработки 13 декабря 2016 года

Исследование выполнено при поддержке грантов РФФИ № 15-08-09093-а и № 15-38-20879_мол_а_вед.

Ветчанин Евгений Владимирович
eugene186@mail.ru

Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

Килин Александр Александрович
aka@rcd.ru

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Введение

Возможности применения в подводной робототехнике механизмов, реализующих продвижение за счет изменения положения центра масс, активно обсуждаются в последнее время в литературе, начиная с работ [1–3]. Как правило, такие исследования проводятся в рамках модели, предложенной Кирхгофом [4] и описывающей движение твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой безвихревой жидкости, покоящейся на бесконечности.

Всевозможные способы и алгоритмы самопродвижения тел с помощью внутренних механизмов, в том числе в присутствии циркуляции, исследуются в работах [5–8, 32, 33]. Подробный обзор результатов в этом направлении можно найти в работе [7]. Помимо смещения центра масс, в указанных работах для управления используется изменение собственного гиростатического момента с помощью вращения массивных роторов. Такой механизм ранее был предложен в работах, посвященных управлению катящимся по плоскости шаром Чаплыгина [9–11], представляющим собой неголономную систему. Управляющий механизм состоит из трех роторов (гиростатов), угловые скорости которых можно варьировать, подавая различные напряжения на приводы. Задача об управлении движением шара с помощью двух роторов рассматривалась в работе [12]. Применение роторов для курсовой стабилизации при движении в жидкости изучалось в [15, 16, 34], а при движении спутника — в [17].

Существенную роль при создании тяговой силы играет вязкость. В работах [25, 28] продемонстрировано, что даже с учетом вязкости возможно добиться самопродвижения за счет возвратно-поступательных движений внутренней массы. Данный эффект связан с нелинейной зависимостью вязкого трения от скорости. Следует отметить, что в рамках модели идеальной жидкости такое движение невозможно из-за парадокса Даламбера. Управляемое за счет изменения положения центра масс движение с учетом вязкости рассмотрено, например, в работах [26, 27]. Отметим также ряд работ, посвященных изучению движения в жидкости при низких числах Рейнольдса с помощью изменения формы тела или за счет внутренних механизмов [29–31, 35].

Интересной с практической точки зрения является задача управления движением тел в жидкости с учетом силы тяжести. При этом в общем случае на тело будут действовать как равнодействующая силы тяжести и силы Архимеда, так и момент этой пары сил. Отметим, что свободная динамика твердых тел в поле силы тяжести изучалась в работах [21–24].

В работах [19, 20] исследуется управляемое движение тел эллипсоидальной и винтовой формы с помощью роторов. В данной работе мы обобщаем результаты этих работ на случай управляемого движения трехосного эллипсоида нейтральной плавучести в поле силы тяжести. В частности, мы доказываем управляемость движения по части переменных с помощью трех роторов. Строим явные управления, соответствующие движению по спиральным траекториям с постоянной по модулю и направлению угловой скоростью, а также показываем, что такие движения даже в поле тяжести можно реализовать с помощью ограниченных управляющих воздействий.

1. Математическая модель

1.1. Основные предположения и кинематические соотношения

Рассмотрим движение в идеальной жидкости твердой оболочки, имеющей форму трехосного эллипсоида и несущей внутри себя три ротора. Будем полагать, что на рассматрива-

емую систему действуют силы гидродинамического сопротивления, сила тяжести \mathbf{f}_g и сила Архимеда \mathbf{f}_a .

Примем ряд допущений относительно рассматриваемой конструкции:

- 1° Все роторы осесимметричны. Оси вращения роторов совпадают с их осями симметрии; таким образом, вращение роторов не меняет распределения массы.
- 2° Оси вращения роторов некопланарны. Угловые скорости роторов являются заданными функциями времени.
- 3° Общий центр масс системы «оболочка + роторы» смещен относительно центра эллипсоида на вектор $\boldsymbol{\rho}$. Главные оси инерции системы совпадают с геометрическими осями эллипсоида.
- 4° Рассматриваемая система обладает нейтральной плавучестью, то есть $\mathbf{f}_g + \mathbf{f}_a = 0$.

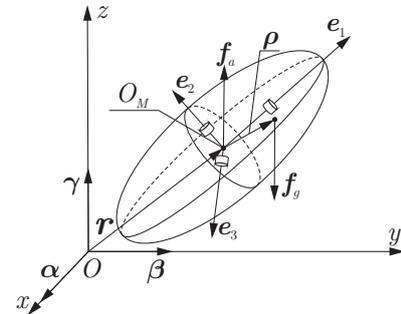


Рис. 1

Для описанной системы поставим следующую задачу:

исследовать возможность управления данной системой при помощи варьирования скоростей вращения внутренних роторов и построить простейшие управления, обеспечивающие элементарные маневры.

В отличие от случая, рассмотренного в [19], здесь мы изучаем управляемое движение, учитывая действие силы тяжести и силы Архимеда. Забегая несколько вперед, отметим, что, так же как и в [19], для рассматриваемой системы возможно построить управления, обеспечивающие ее неограниченное движение по винтовым траекториям. Однако, в отличие от случая, рассмотренного в [19], управляющие воздействия в общем случае будут неограниченными функциями времени, за исключением некоторых частных случаев, представляющих наибольший практический интерес.

Для описания движения введем две системы координат: неподвижную $Oe_xe_ye_z$ и подвижную $O_Me_1e_2e_3$ (см. рис. 1). Направление вектора e_z противоположно направлению действия силы тяжести \mathbf{f}_g . Оси подвижной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции системы.

Положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать вектором $\mathbf{R} = (x, y, z)$. Проекции неподвижных ортов e_x, e_y, e_z на оси подвижной системы координат образуют ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3). \quad (1.1)$$

Пара (\mathbf{R}, \mathbf{Q}) однозначно определяет конфигурацию системы. Таким образом, конфигурационное пространство системы \mathcal{G} шестимерно и представляет собой $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

Эволюция векторов $\mathbf{R}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ описывается кинематическими соотношениями

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ — векторы поступательной и угловой скоростей тела, спроецированные на оси подвижной системы координат.

Представление матрицы \mathbf{Q} в форме (1.1) удобно при численных расчетах и построении явных управлений, обеспечивающих, например, вращение тела вокруг некоторого направления. Для проверки критерия управляемости Рашевского – Чжоу [13] более удобной является параметризация матрицы \mathbf{Q} через углы Эйлера

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения.

Эволюция углов Эйлера может быть описана в векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\zeta} = (\psi, \theta, \varphi), \quad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \sin \varphi / \sin \theta & \cos \varphi / \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi & -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

1.2. Уравнения движения и первые интегралы

Движение произвольного тела в идеальной жидкости в поле потенциальных сил описывается уравнениями Пуанкаре [18]. Для рассматриваемой системы эти уравнения примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial z} \boldsymbol{\gamma}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.6)$$

с лагранжианом $L = T - U$, где T — кинетическая энергия системы (оболочка + жидкость + роторы), U — потенциальная энергия.

Кинетическая энергия оболочки определяется выражением

$$T_s = \frac{1}{2} m_s (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}), \quad (1.7)$$

где m_s — масса оболочки, \mathbf{I}_s — главный центральный тензор инерции оболочки.

Кинетическая энергия жидкости

$$T_f = \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Lambda}_v \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}_\omega \boldsymbol{\omega}), \quad (1.8)$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_v = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — тензор присоединенных масс, $\boldsymbol{\Lambda}_\omega = \operatorname{diag}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ — тензор присоединенных моментов инерции. Диагональный вид тензоров $\boldsymbol{\Lambda}_v$ и $\boldsymbol{\Lambda}_\omega$ обусловлен формой рассматриваемой оболочки и выбором подвижных осей $O_M \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для оболочки произвольной формы при соответствующем выборе системы координат тензор $\boldsymbol{\Lambda}_v$ будет диагональным, а тензор $\boldsymbol{\Lambda}_\omega$ — симметричным. Кроме того, если оболочка обладает винтовой формой, выражение кинетической энергии жидкости будет содержать дополнительное слагаемое вида $(\mathbf{v}, \mathbf{B} \boldsymbol{\omega})$.

Кинетическая энергия k -го ротора определяется выражением

$$T_k = \frac{1}{2} m_k (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k, \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} + \Omega_k(t) \mathbf{n}_k, \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \Omega_k(t) \mathbf{n}_k)), \quad (1.9)$$

где m_k — масса k -го ротора, \mathbf{I}_k — центральный тензор инерции k -го ротора, \mathbf{r}_k — радиус-вектор центра масс k -го ротора, \mathbf{n}_k — единичный вектор, задающий направление оси вращения k -го ротора, $\Omega_k(t)$ — угловая скорость вращения k -го ротора.

Так как вектор \mathbf{n}_k является собственным для матрицы \mathbf{I}_k , то выполняется соотношение $\mathbf{I}_k \mathbf{n}_k = j_k \mathbf{n}_k$, где j_k — момент инерции ротора относительно оси вращения. С учетом этого суммарную кинетическую энергию системы с точностью до известной функции времени можно представить в виде

$$T = T_s + T_f + \sum_{k=1}^3 T_k = \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \mathbf{C}\mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}(t)), \quad (1.10)$$

где $\mathbf{K}(t) = \sum_{k=1}^3 j_k \Omega_k(t) \mathbf{n}_k$ — вектор гиросtatического момента. Матрицы \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{I} имеют вид

$$\mathbf{B} = m \begin{pmatrix} 0 & \rho_3 & -\rho_2 \\ -\rho_3 & 0 & \rho_1 \\ \rho_2 & -\rho_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = m\mathbf{E} + \boldsymbol{\Lambda}_v = \text{diag}(c_1, c_2, c_3), \quad m = m_s + \sum_{k=1}^3 m_k, \\ \mathbf{I} = \boldsymbol{\Lambda}_\omega + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k + \sum_{k=1}^3 m_k (\mathbf{r}_k^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k) = \text{diag}(i_1, i_2, i_3), \quad (1.11)$$

а ρ_1, ρ_2, ρ_3 — компоненты радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}$ центра масс системы.

Потенциальная энергия U определяется выражением

$$U = (m - m_f)gz + mg(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.12)$$

где m_f — масса жидкости, вытесненной оболочкой, а g — ускорение свободного падения.

Подставив выражения (1.10) и (1.12) в уравнения (1.6) и обозначив импульс системы и ее кинетический момент как

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}(t), \quad (1.13)$$

получим уравнения движения в виде

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} + (m_f - m)g\boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{v} - mg\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad (1.14)$$

где \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ выражаются через \mathbf{p} , \mathbf{M} из уравнений (1.13). Уравнения (1.2), (1.3), (1.14) (либо, что то же самое, (1.2), (1.5), (1.14)) полностью описывают динамику рассматриваемой системы.

Уравнения (1.3) допускают шесть геометрических интегралов

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (1.15)$$

Вследствие инвариантности уравнений движения относительно группы преобразований (горизонтальной) плоскости $E(2)$, система (1.2), (1.3), (1.14) допускает еще три автономных интеграла движения

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = P_1, \quad (\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = P_2, \quad (\mathbf{M} + (\mathbf{Q}\mathbf{R}) \times \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) = N_3. \quad (1.16)$$

Кроме того, уравнения (1.2), (1.3), (1.14) допускают еще один неавтономный интеграл движения

$$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}) - (m_f - m)gt = P_3. \quad (1.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В отсутствие силы тяжести ($g = 0$) либо при совпадении центра масс с центром давления ($\boldsymbol{\rho} = 0$) система уравнений (1.2), (1.3), (1.14) допускает еще два интеграла кинетического момента

$$(\mathbf{M} + (\mathbf{QR}) \times \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha}) = N_1, \quad (\mathbf{M} + (\mathbf{QR}) \times \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = N_2. \quad (1.18)$$

Управляемость такой системы была рассмотрена ранее в работе [19].

Далее мы будем рассматривать случай нейтральной плавучести (см. предположение 4°), то есть $m_f = m$. В этом случае интеграл (1.17) становится автономным, а уравнения (1.2), (1.3), (1.14) допускают четыре независимых автономных интеграла движения.

1.3. Задача управления

Рассмотрим движение системы на нулевом уровне интеграла импульса, то есть при $P_1 = P_2 = P_3 = 0$. Эти равенства имеют место тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{p} = 0. \quad (1.19)$$

При этом поступательная скорость может быть выражена через угловую из первого соотношения (1.13) следующим образом:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}. \quad (1.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из (1.20) следует, что поступательная скорость всегда перпендикулярна фиксированному в теле вектору $\mathbf{v} \perp \mathbf{C}\boldsymbol{\rho}$. Это, однако, не препятствует движению в абсолютном пространстве в любом направлении, совмещающему поступательное и вращательное движение.

С помощью (1.13) и (1.20) выразим вектор угловой скорости через кинетический и гиостатический моменты

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{I}}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t)), \quad \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}. \quad (1.21)$$

Матрица $\tilde{\mathbf{I}}$ является обратимой в силу невырожденности квадратичной формы, определяющей кинетическую энергию системы, на нулевом уровне интеграла импульса. С учетом (1.19), (1.20), (1.21) уравнения (1.2), (1.5) и второе уравнение (1.14) могут записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \hat{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{I}}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t)), \\ \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \left(\tilde{\mathbf{I}}^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{K}(t)) \right) - m g \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\mathbf{q} = (\psi, \theta, \varphi, x, y, z)$ — вектор позиционных переменных, а столбцы матрицы $\hat{\mathbf{X}}$ задаются следующими векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \cos \varphi, -\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \theta}, \frac{m\rho_2\alpha_3}{c_3} - \frac{m\rho_3\alpha_2}{c_2}, \frac{m\rho_2\beta_3}{c_3} - \frac{m\rho_3\beta_2}{c_2}, \frac{m\rho_2\gamma_3}{c_3} - \frac{m\rho_3\gamma_2}{c_2} \right), \\ \mathbf{X}_2 &= \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta}, -\sin \varphi, -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{tg} \theta}, \frac{m\rho_3\alpha_1}{c_1} - \frac{m\rho_1\alpha_3}{c_3}, \frac{m\rho_3\beta_1}{c_1} - \frac{m\rho_1\beta_3}{c_3}, \frac{m\rho_3\gamma_1}{c_1} - \frac{m\rho_1\gamma_3}{c_3} \right), \\ \mathbf{X}_3 &= \left(0, 0, 1, \frac{m\rho_1\alpha_2}{c_2} - \frac{m\rho_2\alpha_1}{c_1}, \frac{m\rho_1\beta_2}{c_2} - \frac{m\rho_2\beta_1}{c_1}, \frac{m\rho_1\gamma_2}{c_2} - \frac{m\rho_2\gamma_1}{c_1} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Уравнения (1.22) описывают управляемое посредством вращения роторов движение рассматриваемой системы на нулевом уровне интеграла импульса. Рассмотрим далее задачу управления для системы (1.22) в следующей формулировке:

пусть в начальный момент времени тело покоится ($M(0) = 0$, $\rho \times \gamma(0) = 0$) и угловые скорости роторов равны нулю $K(0) = 0$. Можно ли подобрать такое управление $K(t)$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, чтобы в момент времени $t = T$ тело находилось в заданной точке с некоторой заданной ориентацией?

2. Условия управляемости с помощью трех роторов

Рассмотрим вопрос об управляемости системы (1.22) в указанной выше постановке. Оказывается, справедливо следующее предложение

Предложение 1. *Пусть в начальный момент времени тело покоится $M(0) = 0$, $\rho \times \gamma(0) = 0$ и угловые скорости вращения роторов равны нулю $K(0) = 0$. Тогда подходящим выбором управляющих воздействий $K(t)$ можно переместить эллипсоидальное тело в любую заданную точку с любой конечной ориентацией за исключением следующих случаев формы оболочки и распределения масс:*

- 1) система «оболочка + роторы» уравновешена;
- 2) оболочка имеет сферическую форму;
- 3) оболочка имеет форму эллипсоида вращения, а центр масс всей системы расположен на оси симметрии.

Доказательство. Разобьем доказательство предложения на две части

1. Рассмотрим в качестве управлений не гиросtatические моменты, а угловые скорости. Тогда управляемое в конфигурационном пространстве движение описывается следующим уравнением:

$$\dot{q} = X_1(\psi, \theta, \varphi)\omega_1 + X_2(\psi, \theta, \varphi)\omega_2 + X_3(\psi, \theta, \varphi)\omega_3. \quad (2.1)$$

В работе [19] было показано, что система (2.1) вполне управляема посредством варьирования угловых скоростей (за исключением случаев, перечисленных в формулировке предложения). При этом угловые скорости удовлетворяют граничным условиям $\omega(0) = \omega(T) = 0$.

Таким образом, для доказательства предложения достаточно показать, что необходимую зависимость $\omega(t)$ можно реализовать с помощью управлений $K(t)$.

2. Выразив кинетический момент M через угловую скорость ω с помощью соотношения (1.21) и подставив результат в (1.22), запишем уравнения эволюции векторов K и γ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K \times \omega - \tilde{I}\dot{\omega} - \omega \times \tilde{I}\omega - mg\rho \times \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \gamma \times \omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставив требуемую зависимость $\omega(t)$ в (2.2), получим систему неавтономных уравнений относительно K и γ . Данная система позволяет вычислить управления $K(t)$, реализующие требуемую зависимость $\omega(t)$ с заданными начальными условиями $K(0) = 0$, $\gamma(0) = \gamma_0$.

В случае гладкой зависимости $\omega(t)$ система (2.2) удовлетворяет теореме о существовании и единственности решения задачи Коши [14]. Таким образом, любая гладкая зависимость $\omega(t)$ может быть реализована подходящими управлениями $K(t)$.

При доказательстве управляемости системы (2.1) используются кусочно-постоянные управления $\omega(t)$. Для таких управлений зависимость $\mathbf{K}(t)$ может быть построена путем склейки решений системы (2.2), полученных на промежутках постоянства угловой скорости ω . Получающиеся при этом решения $\mathbf{K}(t)$ будут иметь разрыв первого рода.

Из управляемости системы (2.1) с помощью изменения угловых скоростей и реализуемости необходимой зависимости $\omega(t)$ с помощью управлений $\mathbf{K}(t)$ следует управляемость системы (1.22) по конфигурационным переменным \mathbf{q} (за исключением случаев, перечисленных в формулировке предложения). ■

В доказательстве предложения 1 мы ограничились исследованием существования и единственности решения уравнений (2.2). В некоторых случаях данные уравнения могут быть решены явно. В частности, при равномерном вращении тела решение уравнения (2.2) выражается в элементарных функциях (данный случай рассмотрен в следующем разделе), а при равноускоренных вращениях вокруг постоянной оси — через интегральные синус и косинус.

Отметим, что угловые скорости, используемые для управления системой (2.1), удовлетворяют граничному условию $\omega(T) = 0$. Однако в конечный момент времени управляющее воздействие в общем случае отлично от нуля $\mathbf{K}(T) \neq 0$. При отключении управлений тело приобретет некоторую угловую (и поступательную) скорость и начнет двигаться из конечной точки в соответствии с уравнениями свободного движения. Такое движение в теории управления называется дрейфом. Таким образом, с помощью указанного способа управления можно достичь произвольной точки конфигурационного пространства, однако с ненулевой конечной скоростью.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Интересно, что в случае свободного движения ($\mathbf{K}(t) = 0$) система (1.22), описывающая дрейф, совпадает с классическими уравнениями Эйлера – Пуассона с точностью до квадратуры для вектора \mathbf{R} .

Рассмотрим далее вопрос о стабилизации тела в конечной точке (компенсация дрейфа). Аналогичный вопрос для управляемого движения двумерного тела в присутствии циркуляции жидкости подробно рассмотрен в работе [8]. Оказывается справедливо следующее предложение.

Предложение 2. *Компенсация дрейфа в конечной точке траектории при ограниченных величинах гиростатических моментов $\mathbf{K}(t)$ возможна только в случае $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}(T) = 0$.*

Доказательство. Потребуем, чтобы при $t > T$ угловая скорость и угловое ускорение тела были равны нулю, то есть $\omega = 0$ и $\dot{\omega} = 0$; тогда первое уравнение (2.2) примет вид

$$\dot{\mathbf{K}} = -mg\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}(T), \quad (2.3)$$

а его решение при $t > T$ запишется следующим образом:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(T) - mg\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}(T)t. \quad (2.4)$$

Из (2.4) видно, что для компенсации дрейфа при $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}(T) \neq 0$ угловые скорости роторов должны расти линейно по времени, а при $\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\gamma}(T) = 0$ величина \mathbf{K} будет оставаться постоянной. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для системы (1.22), по-видимому, можно доказать более строгое утверждение об управляемости не только в конфигурационном пространстве, но и в полном фазовом пространстве на заданном уровне интеграла $N_3 \{(\psi, \theta, \varphi, x, y, z, M_1, M_2, M_3) \mid (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = N_3\}$. Это, в частности, позволит доказать возможность управляемого движения в произвольную точку из состояния покоя в состояние покоя. Такой подход применялся, например, в работах [6, 8], однако для рассматриваемой системы он оказывается достаточно трудоемким и требует отдельного исследования.

3. Движение по спиральным траекториям

Рассмотрим движение системы в случае постоянной угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_0 \mathbf{l}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{l} — единичный вектор. Решение уравнений (1.3) при движении с угловой скоростью (3.1) можно представить в виде

$$\mathbf{Q} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{l}, \omega_0 t) \mathbf{Q}(0), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{Q}(0)$ — значение матрицы \mathbf{Q} в начальный момент времени, а $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{n}, \varphi)$ — матрица поворота на угол φ вокруг единичного вектора \mathbf{n} , компоненты которой определяются соотношениями

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{n}, \varphi)_{ij} = \delta_{ij} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) n_i n_j + e_{ijk} n_k \sin \varphi. \quad (3.3)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, а e_{ijk} — абсолютно антисимметричный единичный тензор.

Подставив решение (3.2) в уравнение (1.2) для радиус-вектора центра масс тела $\mathbf{R}(t)$ и проинтегрировав его, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}(0) - u \mathbf{L} t + \left(\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^T(\mathbf{L}, \omega_0 t + \frac{\pi}{2}) - \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^T(\mathbf{L}, \frac{\pi}{2}) \right) \mathbf{d}, \\ u &= (\mathbf{l}, \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{l}) \omega_0, \quad \mathbf{L} = \mathbf{Q}^T(0) \mathbf{l}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{Q}^T(0) (\mathbf{l} \times (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{l} \times \mathbf{l})). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что центр тела движется по винтовой траектории, ось которой направлена вдоль вектора угловой скорости (или, что то же самое, вектора \mathbf{L}). Шаг винта s (продвижение вдоль оси за один оборот тела) и его радиус R_s задаются соотношениями

$$s = 2\pi (\mathbf{l}, \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{l}), \quad R_s^2 = (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{l})^2 - (\mathbf{l}, \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{l})^2. \quad (3.5)$$

Таким образом, форма траектории зависит только от массо-геометрических характеристик самого тела и направления вектора угловой скорости, а величина угловой скорости ω_0 влияет только на скорость продвижения в направлении \mathbf{L} . Из (3.4) следует, что продвижение указанным способом невозможно вдоль главных осей инерции ($\mathbf{l} \parallel \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$), радиус-вектора центра масс ($\mathbf{l} \parallel \boldsymbol{\rho}$) и в направлении $\mathbf{l} \parallel \mathbf{C} \boldsymbol{\rho}$. В этих случаях спиральная траектория вырождается в окружность.

Управления, реализующие движение с угловой скоростью (3.1), могут быть найдены из уравнения (2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \widehat{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{l}, \omega_0 t) \left(\mathbf{K}(0) + \omega_0 \tilde{\mathbf{l}} - \frac{mg}{\omega_0} \boldsymbol{\gamma}(0) \times (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{l}) \right) + \\ &+ \frac{mg}{\omega_0} \left((\boldsymbol{\gamma}(0), \mathbf{l}) \boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\gamma}(t), \boldsymbol{\rho}) \mathbf{l} \right) - \omega_0 \tilde{\mathbf{l}} + \mu(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{l}) (\boldsymbol{\gamma}(t) \times \mathbf{l}) t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.6) видно, что в общем случае для реализации движения с постоянной угловой скоростью нужно прикладывать управления с амплитудой, линейно растущей по времени.

Однако движение по спиральным траекториям возможно и с помощью ограниченного управления. В частности, анализ выражений (3.4) и (3.6) показывает, что справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Неограниченное передвижение тела по спиральной траектории (3.4) с помощью ограниченных управляющих воздействий $\mathbf{K}(t)$ возможно при выполнении условия $(\mathbf{l}, \mathbf{C}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{l}) \neq 0$ и одного из следующих ограничений на направление оси спирали:*

- 1) *ось спирали перпендикулярна радиус-вектору центра масс $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{l}) = 0$,*
- 2) *ось спирали направлена вдоль вертикали.*

Первое условие в предложении обеспечивает ненулевой шаг спирали, а два последующих — ограниченность соответствующих управлений.

Таким образом, несмотря на наличие силы тяжести, возможно передвижение тела в вертикальном направлении с помощью ограниченных управляющих воздействий. Более того, последовательно двигаясь вдоль разных спиральных траекторий, можно реализовать движение в произвольной направлении.

4. Заключение

Отметим наиболее интересные, с нашей точки зрения, оставшиеся открытыми вопросы, связанные с управляемым движением тела в жидкости с помощью роторов.

В данной работе было показано, что с помощью вращения роторов можно реализовать перемещение в произвольную заданную точку. Однако после достижения этой точки тело в общем случае продолжит движение. Более того, компенсация этого движения с помощью ограниченных управляющих воздействий возможна только при определенной конечной ориентации тела. Поэтому интересно было бы решить задачу о возможности управляемого движения рассматриваемой системы из состояния покоя в состояние покоя и привести соответствующие явные алгоритмы управления.

Еще одним интересным направлением развития данных исследований является обобщение полученных результатов на случай тела ненулевой плавучести. В частности, открытым остается вопрос о возможности всплытия (погружения) тела рассматриваемыми методами в случае его отрицательной (положительной) плавучести.

Список литературы

- [1] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, т. 65, № 4, с. 592–601.
- [2] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // Докл. РАН, 2002, т. 382, № 4, с. 478–481.
- [3] Козлов В. В., Онищенко Д. А. О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // ПММ, 2003, т. 67, № 4, с. 620–633.
- [4] Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. Москва: АН СССР, 1962. 404 с.
- [5] Килин А. А., Ветчанин Е. В. Управление движением твердого тела в жидкости с помощью двух подвижных масс // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 4, с. 633–645.
- [6] Ветчанин Е. В., Килин А. А. Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела // Докл. РАН, 2016, т. 466, № 3, с. 293–297.
- [7] Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управляемое движение твердого тела с внутренними механизмами в идеальной несжимаемой жидкости // Современные проблемы математики: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Г. Сергеев (ред.). (Тр. МИАН, т. 295.) Москва: МАИК, 2016. С. 321–351.



- [8] Vetchanin E. V., Kilin A. A. Control of body motion in an ideal fluid using the internal mass and the rotor in the presence of circulation around the body // *J. Dyn. Control Syst.*, 2017 (to appear).
- [9] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [10] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.
- [11] Ivanova T. B., Pivovarova E. N. Comments on the paper by A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev «How to control the Chaplygin ball using rotors: 2» // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 1, pp. 140–143.
- [12] Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. On the iterative steering of a rolling robot actuated by internal rotors // *Analysis, Modelling, Optimization, and Numerical Techniques: Proc. of the Internat. Conf. on Applied Mathematics and Informatics (ICAMI'2013, San Andrés Island, Nov 2013) / G. O. Tost, O. Vasilieva (Eds.). (Springer Proc. Math. Stat., vol. 121.) Cham: Springer, 2015. P. 205–218.*
- [13] Ращевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // *Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук*, 1938, т. 3, № 2, с. 83–94.
- [14] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: ИЛ, 1958. 475 с.
- [15] Guirao J. L. G., Vera J. A. Equilibria, stability and Hamiltonian Hopf bifurcation of a gyrostat in an incompressible ideal fluid // *Phys. D*, 2012, vol. 241, no. 19, pp. 1648–1654.
- [16] Woolsey C. A., Leonard N. E. Stabilizing underwater vehicle motion using internal rotors // *Automatica J. IFAC*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 2053–2062.
- [17] Crouch P. E. Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models // *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1984, vol. 29, № 4, pp. 321–331.
- [18] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [19] Борисов А. В., Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управление движением трехосного эллипсоида в жидкости с помощью роторов // *Мат. заметки*, 2017 (в печати).
- [20] Vetchanin E. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Control of the motion of a helical body in a fluid using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, nos. 7–8, pp. 874–884.
- [21] Борисов А. В., Кузнецов С. П., Мамаев И. С., Тененев В. А. Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных // *Письма в ЖТФ*, 2016, т. 42, № 17, с. 9–19.
- [22] Тененев В. А., Ветчанин Е. В., Илалетдинов Л. Ф. Хаотическая динамика в задаче о падении тела винтовой формы в жидкости // *Нелинейная динамика*, 2016, т. 12, № 1, с. 99–120.
- [23] Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S. Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2007, vol. 12, no. 5, pp. 531–565.
- [24] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // *Chaos*, 2006, vol. 16, no. 1, 013118, 7 pp.
- [25] Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 1, pp. 100–117.
- [26] Ветчанин Е. В., Тененев В. А. Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2011, т. 3, № 4, с. 371–381.
- [27] Рамоданов С. М., Тененев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 3, с. 635–647.
- [28] Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T. A bug on a raft: Recoil locomotion in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 669, pp. 527–556.



- [29] Ehlers K. M., Koiller J. Micro-swimming without flagella: Propulsion by internal structures // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 6, pp. 623–652.
- [30] Lighthill M. J. On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1952, vol. 5, pp. 109–118.
- [31] Koiller J., Ehlers K., Montgomery R. Problems and progress in microswimming // *J. Nonlinear Sci.*, 1996, vol. 6, no. 6, pp. 507–541.
- [32] Рамоданов С. М., Тененев В. А., Трещев Д. В. Самопродвижение в идеальной жидкости тела с твердой оболочкой и переменной циркуляцией // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 4, с. 799–813.
- [33] Tallapragada P., Kelly S. D. Self-propulsion of free solid bodies with internal rotors via localized singular vortex shedding in planar ideal fluids // *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2015, vol. 224, no. 17, pp. 3185–3197.
- [34] Rust I. C., Asada H. H. The eyeball ROV: Design and control of a spherical underwater vehicle steered by an internal eccentric mass // *Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 9–13 May, 2011, pp. 5855–5862.
- [35] Quillen A. C., Askari H., Kelley D. H., Friedmann T., Oakes P. W. A coin vibrational motor swimming at low Reynolds number // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, vol. 21, nos. 7–8, pp. 902–917.

Control of the motion of an unbalanced heavy ellipsoid in an ideal fluid using rotors

Evgeny V. Vetchanin¹, Alexander A. Kilin²

¹Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

^{1,2}M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

ul. Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069, Russia

²Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

ul. S. Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹eugene186@mail.ru, ²aka@rcd.ru

This paper is concerned with the motion of an unbalanced heavy three-axial ellipsoid in an ideal fluid controlled by rotation of three internal rotors. It is proved that the motion of the body considered is controlled with respect to configuration variables except for some special cases. An explicit control that makes it possible to implement unbounded motion in an arbitrary direction has been calculated. Directions for which control actions are bounded functions of time have been determined.

MSC 2010: 70E60, 70Q05, 70Hxx

Keywords: ideal fluid, motion of a rigid body, Kirchhoff equations, control by rotors, gaits

Received November 25, 2016, accepted December 13, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 663–674 (Russian)

