

УДК 519.6

© А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов

**МОДЕЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ УТИЛИЗАЦИИ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ (ИТЕРАЦИИ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗИРУЮЩИХ ВСТАВОК)<sup>1</sup>**

Рассматривается маршрутная задача о последовательном демонтаже системы излучающих элементов. Предполагается, что данная задача имеет достаточно большую размерность, что затрудняет поиск точных решений и заставляет использовать эвристики. Для улучшения качества последних предлагается использовать оптимизирующие вставки умеренной размерности, в пределах которых используется аппарат широко понимаемого динамического программирования. Локализация вставки определяется из соображений, связанных с использованием условий предшествования. Функции стоимости перемещений и (внутренних по смыслу) работ, связанных с утилизацией (демонтажем) источников, допускают зависимость от списка заданий, которые еще не выполнены: «светят» те и только те источники, которые не демонтированы на момент перемещения и/или исполнения работы. Воздействие каждого такого источника на исполнителя обратно пропорционально квадрату расстояния; для оценивания радиационного воздействия при перемещении на конечном промежутке времени упомянутую нелинейную зависимость следует интегрировать. Воздействия различных источников суммируются.

*Ключевые слова:* маршрут, трасса, условия предшествования, динамическое программирование.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-08

**Введение**

В различных прикладных задачах возникает проблема маршрутизации перемещений в условиях ограничений. Нередко по соображениям практического характера возникают усложненные функции стоимости; так, в частности, может возникать потребность в учете зависимости от списка заданий, уже выполненных, либо, напротив, еще не выполненных на данный момент времени. В этих условиях требуется выбрать очередность выполнения заданий и найти конкретную траекторию в пространстве параметров, обеспечивающую реализацию процесса с приемлемым уровнем качества. Одна из прикладных задач такого типа касается минимизации дозовой нагрузки работника АЭС при (последовательном) выполнении комплекса заданий, связанных с утилизацией излучающих элементов в условиях чрезвычайных ситуаций, подобных Чернобылю и Фукусиме.

Разумеется, прототипом вышеупомянутой инженерной задачи является труднорешаемая задача коммивояжера (ЗК) или TSP в англоязычной литературе. Однако большое число особенностей качественного характера делает постановку вышеупомянутой практической задачи существенно новой и представляющей самостоятельный интерес; связь с ЗК прослеживается только на идейном уровне. Отметим, однако, что трудности вычислительной реализации, присущие методам решения ЗК, в полной мере сохраняются для рассматриваемой прикладной задачи. В частности, в случае ощутимой размерности исходной прикладной задачи практически неизбежно использование эвристик, соблюдающих полную систему ограничений. В то же время для локального улучшения данных эвристик можно уже использовать те или иные теоретические методы. Данный подход используется в работе. Отметим, что характерный тип имеющихся ограничений касается т. н. условий предшествования. Это, в частности, может соответствовать случаям размещения одних излучающих объектов на других (задача демонтажа энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации), что требует более раннего демонтажа «верхних» объектов в сравнении с «нижними».

В связи с исследованиями методов решения ЗК отметим [1–8]. В частности, в [6, 7] для решения ЗК использовался метод ДП, который затем многократно обобщался для решения задач типа ЗК; в частности, это касается задачи о посещении мегаполисов или обобщенной

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 17-08-01385, № 16-01-00505, № 16-01-00649).

ЗК (GTSP в англоязычной литературе). Используемый в настоящей статье вариант ДП восходит к [9, § 4.9]; данный вариант соответствует [10–13]. Используемая ниже схема построения оптимизирующих вставок следует работе [14].

Отметим, что вопросы, связанные с различными вариантами маршрутной задачи о снижении дозовой нагрузки и демонтажа энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации, рассмотрены в монографии [15], которой предшествовала большая серия журнальных статей.

Другое направление, касающееся применения методов маршрутизации к задачам, связанным с листовой резкой на машинах с ЧПУ (см. [13, 16, 17]), в настоящей статье не рассматривается, хотя многие положения могут быть применены и для решения вышеупомянутой прикладной задачи из области машиностроения. Излагаемые в статье конструкции определяют (по замыслу авторов) алгоритм на функциональном уровне, касающийся поиска приемлемых решений в задаче маршрутизации, имеющей большую размерность и ориентированную идейно на вышеупомянутые конкретные постановки, связанные со снижением облучаемости исполнителей при выполнении комплекса работ в условиях повышенной радиации.

## § 1. Общие обозначения и определения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки, ...);  $\emptyset$  обозначает пустое множество,  $\triangleq$  — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Произвольным объектам  $\alpha$  и  $\beta$  сопоставляется (единственное) множество  $\{\alpha; \beta\}$ , содержащее  $\alpha$  и  $\beta$  в виде своих элементов и не содержащее никаких других элементов;  $\{\alpha; \beta\}$  есть неупорядоченная пара объектов  $\alpha, \beta$  (при этом  $\{\alpha; \beta\} = \{\beta; \alpha\}$ ). Каждому объекту  $x$  сопоставляется синглетон  $\{x\} \triangleq \{x; x\}$ , содержащий  $x$  (т.е.  $x \in \{x\}$ ). Всякое множество — объект; поэтому (см. [19, с. 87]) произвольным объектам  $y$  и  $z$  сопоставляется упорядоченная пара (УП)  $(y, z) \triangleq \{\{y\}; \{y; z\}\}$  этих объектов; здесь  $y$  — первый, а  $z$  — второй элементы УП  $(y, z)$ . Каждой УП  $z$ , рассматриваемой как целое, сопоставляем первый элемент  $\text{pr}_1(z)$  и второй элемент  $\text{pr}_2(z)$ , однозначно определяемые равенством  $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$ . На основе УП конструируются триплеты: если  $a, b$  и  $c$  — объекты, то [20, с. 17]  $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$ , т.е.  $(a, b, c)$  есть УП с первым элементом  $(a, b)$  и вторым элементом  $c$ .

Каждому множеству  $H$  сопоставляем (непустое) семейство  $\mathcal{P}(H)$  всех подмножеств (п/м)  $H$ ; здесь и ниже семейство понимается как множество, все элементы которого — множества. Полагаем также, что  $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$  (семейство всех непустых п/м множества  $H$ ), а  $\text{Fin}(H)$  — семейство всех непустых конечных п/м  $H$ . Непустым множествам  $A$  и  $B$  сопоставляем (также непустое) множество  $B^A$  всех отображений из  $A$  в  $B$  (см. [19, с. 77]); при  $\mathbf{f} \in B^A$  и  $x \in A$  в виде  $\mathbf{f}(x)$ ,  $\mathbf{f}(x) \in B$ , имеем значение отображения  $\mathbf{f}$  в точке  $x$ . Как обычно, при  $g \in B^A$  и  $C \in \mathcal{P}(A)$  в виде  $g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$  имеем образ множества  $C$  при действии  $g$ ;  $g^1(C) \neq \emptyset$  при  $C \neq \emptyset$ .

Для любых трех непустых множеств  $A, B$  и  $C$  имеем как обычно [20, с. 17], что  $A \times B \times C \triangleq \triangleq (A \times B) \times C$ ; если, к тому же,  $D$  — непустое множество и  $h \in D^{A \times B \times C}$ , то для  $x \in A \times B$  и  $y \in C$  определено значение  $h(x, y) \in D$ , для которого используем также обозначение  $h(x_1, x_2, y)$  при  $x_1 \triangleq \text{pr}_1(x)$  и  $x_2 \triangleq \text{pr}_2(x)$ ,  $h(x_1, x_2, y) = h(x, y) \in D$ .

Непустым множествам  $S$  и  $T$  сопоставляем множество (возможно пустое)  $(\text{Bi})[S; T]$  всех биекций [21, с. 87] множества  $S$  на множество  $T$ . Если  $P$  и  $Q$  — непустые множества, а  $\psi \in (\text{Bi})[P; Q]$ , то определена биекция  $\psi^{-1} \in (\text{Bi})[Q; P]$ , для которой

$$(\psi(\psi^{-1}(q)) = q \quad \forall q \in Q) \& (\psi^{-1}(\psi(p)) = p \quad \forall p \in P). \quad (1.1)$$

Перестановка непустого множества  $A$  есть [21, с. 87] биекция  $A$  на себя, а  $(\text{Bi})[A; A]$  есть множество всех перестановок  $A$ . Заметим, что (1.1) применимо к перестановкам (имеется в виду случай  $P = Q$ ).

Если  $A, B$  и  $C$  — непустые множества,  $g \in B^A$  и  $h \in C^B$ , то, как обычно

$$h \circ g \triangleq (h(g(x)))_{x \in A} \in C^A$$

есть композиция  $g$  и  $h$  (использована индексная форма записи отображения). Если  $g \in (\text{Bi})[A; B]$  и  $h \in (\text{Bi})[B; C]$ , то  $h \circ g \in (\text{Bi})[A; C]$ .

Как обычно,  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая,  $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$  — натуральный ряд,  $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ , и

$$\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0$$

(заметим, что  $\overline{1, 0} = \emptyset$ ; это используется в дальнейшем). Непустому конечному множеству  $K$  сопоставляется его мощность (количество элементов)  $|K| \in \mathbb{N}$ , причем

$$(\text{bi})[K] \triangleq (\text{Bi})[\overline{1, |K|}; K] \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

Полагаем также, что  $|\emptyset| \triangleq 0$ . Из (1.2) следует, что при  $n \in \mathbb{N}$  в виде  $(\text{bi})[\overline{1, n}]$  имеем множество всех перестановок  $\overline{1, n}$ :  $(\text{bi})[\overline{1, n}] = (\text{Bi})[\overline{1, n}; \overline{1, n}]$ . В связи с экстремальными задачами на множестве перестановок отметим монографию [22].

Как обычно  $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$  — неотрицательная полупрямая. Если  $S$  — непустое множество, то  $\mathcal{R}_+[S] \triangleq (\mathbb{R}_+)^S$  — множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на  $S$ .

## § 2. Постановка локальной задачи

Настоящий раздел можно рассматривать в качестве естественного продолжения введения; мы напоминаем об «инструменте» решения «большой» задачи на основе ДП. Сначала совсем кратко приведем общую постановку в духе [9–14], после чего детализируем ее применительно к исходной прикладной задаче об утилизации источников радиоактивного излучения. Рассматриваем сначала постановку задачи, применяемой далее в качестве локальной.

Фиксируем непустое множество  $X$ ,  $x^0 \in X$  (база процесса),  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ , а также множества

$$M_1 \in \text{Fin}(X), \quad \dots, \quad M_N \in \text{Fin}(X); \quad (2.1)$$

кроме того, фиксируем (непустые) отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \quad \dots, \quad \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N). \quad (2.2)$$

Итак, при  $k \in \overline{1, N}$  у нас  $\mathbb{M}_k \subset M_k \times M_k$  и при этом  $\mathbb{M}_k \neq \emptyset$ . Множества (2.1) именуем далее мегаполисами и полагаем, что

$$(x^0 \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1, N}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}).$$

Пусть  $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ . Рассматриваемые ниже процессы имеют следующий смысл: при  $\alpha \in \mathbb{P}$  организуется система перемещений

$$x^0 \rightarrow (x_{1,1} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_{N,1} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in M_{\alpha(N)}), \quad (2.3)$$

где  $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \dots, (x_{N,1}, x_{N,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$ , прямые стрелки соответствуют перемещениям между мегаполисами, а волнистые — перемещениям при выполнении (внутренних) работ, связанных с посещением мегаполисов. Следовательно отношения (2.2) определяют возможные варианты перемещений при выполнении внутренних работ.

Применительно к задаче о последовательной утилизации (демонтаже) излучающих элементов конкретизация (2.1)–(2.3) может, в частности, быть следующей. Мегаполисы могут соответствовать возможным вариантам подхода (прибытия) к излучающим элементам и покидания соответствующих ближних зон. Отношения (2.2) можно в простейшем случае отождествить с декартовыми «квадратами» мегаполисов, хотя возможны и более сложные варианты (например, при каких-то вариантах прибытия может потребоваться разрушение конструкций, что может затруднить покидание ближней зоны тем же путем, что и прибытие). Мегаполисы можно,

по-видимому, трактовать как дискретизацию границы ближней зоны соответствующего источника. Общая логика перемещений (2.3) сводится при этом к последовательному посещению ближних зон с проникновением в намеченных пунктах в упомянутые зоны и приближением всякий раз к источнику, демонтажу последнего и покиданию ближней зоны с целью перемещения к следующему (по порядку) источнику. При этом радиационное воздействие в ближних зонах может существенно превышать аналогичное воздействие на этапах внешних перемещений, что должно, следовательно, учитываться посредством специального задания функций стоимости (заметим, что в случае плоской задачи в качестве  $X$  может выбираться достаточно большой прямоугольник на плоскости, а база  $x^0$  определяет начальное положение исполнителя в упомянутом прямоугольнике).

Возвращаясь к (2.3) в общем случае, отметим, что на перестановку  $\alpha$ , собственно маршрут, накладываются, вообще говоря, условия предшествования, для введения которых сейчас зафиксируем множество  $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N})$ , элементами которого являются УП индексов, именуемые далее адресными. Постулируем, что

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0 \quad (2.4)$$

(условие (2.4) не является обременительным; см. обсуждение в [9, часть 2]). При этом [9, часть 2]

$$\mathbf{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \quad (2.5)$$

С этих пор полагаем, что в (2.3) допустимо использовать только перестановки  $\alpha \in \mathbf{A}$ . В связи с (2.5) введем в рассмотрение  $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$  и оператор  $\mathbf{I}$ , действующий в  $\mathfrak{N}$  по правилу: если  $K \in \mathfrak{N}$ , то

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Xi[K]\}, \quad (2.6)$$

где  $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$ . Посредством (2.6) введено правило вычеркивания (заданий из списка); при этом  $\mathbf{I}(\{t\}) = \{t\} \quad \forall t \in \overline{1, N}$ .

Трассы локальной задачи. Через  $\mathbb{Z}$  обозначаем множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow \mathbb{X} \times \mathbb{X},$$

где  $\mathbb{X} \triangleq \{x^0\} \cup \left( \bigcup_{i=1}^N M_i \right) \in \text{Fin}(X)$ . Если же  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то

$$\mathcal{Z}_\alpha \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathbb{Z} \mid (z_0 = (x^0, x^0)) \& (z_t \in M_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1, N})\}; \quad (2.7)$$

кортежи из множества (2.7) рассматриваются в качестве трасс (траекторий), согласованных с маршрутом  $\alpha$ ; пучек  $\mathcal{Z}_\alpha$  непуст и конечен:  $\mathcal{Z}_\alpha \in \text{Fin}(\mathbb{Z})$ . Тогда

$$\mathbb{D} \triangleq \{(\alpha, z) \in \mathbf{A} \times \mathbb{Z} \mid z \in \mathcal{Z}_\alpha\} \in \text{Fin}(\mathbf{A} \times \mathbb{Z})$$

используем в качестве множества допустимых решений (ДР) соответствующей локальной задачи (сама эта задача будет меняться при использовании итерационной процедуры). Пусть  $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$ ,  $c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$ ,  $\dots$ ,  $c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X} \times \mathbb{X} \times \mathfrak{N}]$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}]$ , тогда при  $\alpha \in \mathbb{P}$  и  $(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$  выражение

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \triangleq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + c_{\alpha(t)}(z_t, \alpha^1(\overline{t, N}))] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)) \quad (2.8)$$

определяет значение аддитивного критерия качества для УП  $(\alpha, \mathbf{z})$ , где  $\mathbf{z} = (z_i)_{i \in \overline{0, N}}$ ; нас, конечно, будет интересовать случай  $\alpha \in \mathbf{A}$ . Получаем следующую (вспомогательную) задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0, N}}] \rightarrow \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbb{D}, \quad (2.9)$$

которая характеризуется значением (экстремумом)

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbb{D}} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \in [0, \infty[ \quad (2.10)$$

и непустым множеством оптимальных решений

$$\mathbb{S} \triangleq \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{D}).$$

Задача вида (2.9) будет использоваться на каждом этапе итерационной процедуры в интересах улучшения результата, доставляемого эвристикой. Решение задачи (2.9) подробно рассматривалось в [11, 12, 23]. Сейчас ограничимся краткой схемой, полагая

$$\mathcal{C} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \ (\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K)\}$$

и  $\mathcal{C}_s \triangleq \{K \in \mathcal{C} \mid s = |K|\} \ \forall s \in \overline{1, N}$ . При  $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$  имеем  $\mathcal{C}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\}$ ,  $\mathcal{C}_N = \{\overline{1, N}\}$ ,

$$\mathcal{C}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathcal{C}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \ \forall s \in \overline{2, N}. \quad (2.11)$$

Посредством (2.11) определяется кортеж  $(\mathcal{C}_i)_{i \in \overline{1, N}}$ . Полагаем, что

$$\mathbf{M}_t \triangleq \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbf{M}_t\} \ \forall t \in \overline{1, N}.$$

Пусть  $\widetilde{\mathcal{M}}$  есть def объединение всех множеств  $\mathbf{M}_i$ ,  $i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1$ ; тогда вводим

$$(D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \widetilde{\mathcal{M}}\}) \& (D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1, N})\}).$$

Если же  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{C}_s$ , то последовательно определяем множества

$$\begin{aligned} J_s(K) &\triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{C}_{s+1}\}, \\ \mathcal{M}_s[K] &\triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j, \quad \mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}; \end{aligned}$$

каждое из упомянутых множеств непусто. С учетом этого полагаем, что при  $s \in \overline{1, N-1}$  множество  $D_s$  совпадает с объединением всех множеств  $\mathbb{D}_s[K]$ ,  $K \in \mathcal{C}_s$ . В виде  $(D_s)_{s \in \overline{0, N}}$  имеем кортеж непустых множеств, а, точнее, п/м множества  $\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1, N})$ , где

$$\mathbf{X} \triangleq \{x^0\} \cup \left( \bigcup_{s=1}^N \mathbf{M}_s \right).$$

Напомним, что [23, (3.13)] при  $s \in \overline{1, N}$ ,  $(x, K) \in D_s$ ,  $k \in \mathbf{I}(K)$  и  $z \in \mathbf{M}_k$  непременно  $(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}$ . Теперь определяем в/з функции

$$v_0 \in \mathcal{R}_+[D_0], \quad v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1], \quad \dots, \quad v_N \in \mathcal{R}_+[D_N],$$

полагая, что  $v_0(x, \emptyset) \triangleq \mathbf{f}(x) \ \forall x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ , и далее определяем рекуррентную процедуру, стартующую из  $v_0$ . Именно, если  $s \in \overline{1, N}$  и функция  $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$  уже построена, то  $v_s$  определяем по правилу

$$v_s(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbf{M}_j} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \ \forall (x, K) \in D_s. \quad (2.12)$$

Отметим, что  $\mathbb{V} = v_N(x^0, \overline{1, N})$ ; см. [23, (3.15)]. Итак, (2.12) реализует процедуру нахождения значения (2.10); в этой связи см. несколько более экономичный алгоритм 1<sup>0</sup> работы [23]. Построение решения  $(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbb{S}$  реализуется на основе алгоритма 2<sup>0</sup> упомянутой работы [23].

Заметим, что задача (2.9) определяется следующим комплексом параметров:

$$(x^0, M_1, \dots, M_N, \mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_N, \mathbf{K}, \mathbf{c}, c_1, \dots, c_N, \mathbf{f}). \quad (2.13)$$

При этом имеется в виду, что множество  $X$  фиксируется во всех последующих построениях,  $\mathbf{A}$  определяется по  $\mathbf{K}$  однозначно (см. (2.5), здесь существенно условие (2.4));  $\mathbb{X}, \mathbb{M}_1, \dots, \mathbb{M}_N$  и  $\mathbf{X}$  однозначно определяются кортежем (2.13). В дальнейшем, рассматривая «большую» задачу, мы оговорим правило преобразования кортежа (2.13), связываемое с итерационной процедурой определения локализации вставки. Точнее, кортеж (2.13) будет (при фиксации эвристики в «большой» задаче) однозначно определяться локализацией планируемой вставки.

### § 3. Основная задача

Рассмотрим задачу маршрутизации, подобную (2.9); будем ориентироваться, однако, на тот случай, когда данная задача имеет достаточно большую размерность, что препятствует использованию ДП для построения оптимального решения. Лучшее, на что приходится рассчитывать, это то, что мы можем, используя, например, жадный алгоритм, найти эвристическое решение, соблюдающее ограничения в этой исходной «большой» задаче. Предполагаем, и это типично в задаче демонтажа излучающих элементов, что у нас (в «большой» задаче) присутствуют условия предшествования и функции стоимости, зависящие от списка заданий. Это означает, что мы находимся в условиях, принятых в [14, 23].

Итак, фиксируем точку  $\mathbf{x}_0 \in X$  в качестве базы (глобального) процесса, число  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{n} \geq 3$ , множества

$$\mathbf{L}_1 \in \text{Fin}(X), \dots, \mathbf{L}_N \in \text{Fin}(X), \quad (3.1)$$

также именуемые мегаполисами, а также (непустые) отношения

$$\mathbb{L}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_1), \dots, \mathbb{L}_n \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}_n \times \mathbf{L}_n)$$

(итак, при  $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$  имеем  $\mathbb{L}_j \subset \mathbf{L}_j \times \mathbf{L}_j$  и, кроме того,  $\mathbb{L}_j \neq \emptyset$ ). Предполагается, что

$$(\mathbf{x}_0 \notin \mathbf{L}_s \quad \forall s \in \overline{1, N}) \& (\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q = \emptyset \quad \forall p \in \overline{1, N} \quad \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}). \quad (3.2)$$

Пусть  $\mathbf{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, \mathbf{n}}]$ . Мы рассматриваем (подобно (2.3)) процессы вида

$$\mathbf{x}_0 \rightarrow (z_1 \in \mathbb{L}_{\beta(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (z_n \in \mathbb{L}_{\beta(\mathbf{n})}), \quad (3.3)$$

где  $\beta \in \mathbf{P}$  (на выбор  $\beta$  могут накладываться ограничения). Содержательный смысл (3.1)–(3.3) вполне соответствует обсуждению в разделе 2, включая ту его часть, которая относится к задаче утилизации излучающих элементов. При этом практически интересной приводимая ниже конструкция является в случае, когда  $\mathbf{n}$  достаточно велико и схема ДП предыдущего раздела в непосредственном виде «не работает» в связи с трудностями вычислительной реализации.

Фиксируем множество  $\mathfrak{K} \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n}} \times \overline{1, \mathbf{n}})$ , определяющее «глобальные» условия предшествования, полагая в дальнейшем, что

$$\forall \mathfrak{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathfrak{K}) \exists z_0 \in \mathfrak{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z_0) \quad \forall z \in \mathfrak{K}_0. \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) получаем (см. [9, часть 2]), что

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\triangleq \{ \alpha \in \mathbf{P} \mid \forall z \in \mathfrak{K} \forall t_1 \in \overline{1, \mathbf{n}} \forall t_2 \in \overline{1, \mathbf{n}} (z = (\alpha(t_1), \alpha(t_2))) \Rightarrow (t_1 < t_2) \} = \\ &= \{ z \in \mathbf{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathfrak{K} \} \neq \emptyset \end{aligned} \quad (3.5)$$

((3.5) означает, что  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathbf{P})$ ); итак,  $\mathcal{A} \in \text{Fin}(\mathbf{P})$ . В (3.5) определено множество всех допустимых по предшествованию маршрутов «большой» задачи. Для последующего определения допустимых трасс полагаем, что

$$\mathfrak{X} \triangleq \{ \mathbf{x}_0 \} \cup \left( \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{L}_i \right),$$

$\mathfrak{X} \in \text{Fin}(X)$ , и вводим множество  $\tilde{\mathfrak{Z}}$  всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} : \overline{0, \mathbf{n}} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}.$$

Тогда при  $\beta \in \mathbf{P}$  множество всех трасс (траекторий) «большой» задачи, согласованных с маршрутом  $\beta$ , имеет вид

$$\mathfrak{Z}_\beta \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \tilde{\mathfrak{Z}} \mid (\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)) \& (z_t \in \mathbb{L}_{\beta(t)} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}})\} \in \text{Fin}(\tilde{\mathfrak{Z}}), \quad (3.6)$$

что соответствует логике (3.3). В виде

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \times \tilde{\mathfrak{Z}} \mid \mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\beta\} \in \text{Fin}(\mathcal{A} \times \tilde{\mathfrak{Z}}) \quad (3.7)$$

имеем (непустое конечное) множество ДР «большой» задачи. В данной задаче полагаются зафиксированными функции стоимости: при  $\mathbf{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$

$$\mathbf{c}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], c_1^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], \dots, c_{\mathbf{n}}^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N}], f^\natural \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}]. \quad (3.8)$$

В терминах этих функций (3.8) определяется аддитивный критерий: при  $\beta \in \mathbf{P}$  и  $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\beta$  полагаем

$$\widehat{\mathbf{c}}_\beta[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} [\mathbf{c}^\natural(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}})) + c_{\beta(t)}^\natural(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n}}))] + f^\natural(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}})). \quad (3.9)$$

Значение (3.9) для нас существенно при  $\beta \in \mathcal{A}$ . Это связано с тем, что наша исходная «большая» (в смысле размерности) задача имеет следующий вид:

$$\widehat{\mathbf{c}}_\beta[\mathbf{z}] \rightarrow \min, \quad (\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}. \quad (3.10)$$

Данной задаче (3.10) отвечает ее значение (экстремум)

$$V \triangleq \min_{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}} \widehat{\mathbf{c}}_\beta[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+ \quad (3.11)$$

и (непустое) множество  $\mathbf{S} \triangleq \{(\beta_0, \mathbf{z}_0) \in \mathbf{D} \mid \widehat{\mathbf{c}}_{\beta_0}[\mathbf{z}_0] = V\}$  оптимальных решений. Поскольку как основной будет рассматриваться (практически интересный) случай достаточно большой размерности задачи (3.10), нахождение  $V$  (3.11) и какого-либо элемента  $\mathbf{S}$  сталкивается с серьезными трудностями вычислительного характера. В этой связи, применяя итерационный режим с использованием оптимизирующих вставок, мы стремимся по возможности лучшим образом оценить  $V$  (3.11) сверху и построить эвристическое решение, реализующее данную оценку. Для достижения этой цели будем использовать вставки «длины»  $N$ ; в дальнейшем предполагается, что  $N \in \overline{2, \mathbf{n}}$ , однако реально интересен случай, когда  $\mathbf{n}$  существенно больше, чем  $N$  (допускается возможность изменения  $N$  при построении итераций).

#### § 4. Оптимизирующая вставка (этап итерационной процедуры)

В настоящем разделе полагаем фиксированным некоторое ДР задачи (3.10): нам известна УП

$$\eta \triangleq (\lambda, (\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}) \in \mathbf{D}; \quad (4.1)$$

тогда  $\lambda \in \mathcal{A}$  и  $(\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathfrak{Z}_\lambda$ . При этом  $\lambda(j) \in \overline{1, \mathbf{n}}$  для  $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . Кроме того,  $\mathbf{h}_j \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \quad \forall j \in \overline{0, \mathbf{n}}$ . Согласно (3.6)  $\mathbf{h}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$  и  $\mathbf{h}_t \in \mathbb{L}_{\lambda(t)} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}}$ .

Мы напомним сейчас построение однократной вставки, следуя [14, 23] и придерживаясь алгоритмического варианта изложения. Итак, в нашем последующем построении  $\eta$  есть (по смыслу) «улучшаемое» ДР, а вставка — инструмент улучшения. Мы должны указать локализацию данной вставки. Однако сделать это надо не только по отношению к фиксированному ДР  $\eta$  «большой» задачи, но и по отношению к другим ее ДР; это существенно для организации

последующей итерационной процедуры, в которой  $\eta$  (4.1) будет исполнять роль начального приближения. В этой связи нам потребуются некоторые новые обозначения, учитывающие «скользящий» характер оптимизирующей вставки.

Итак, если  $(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то  $\text{pr}_2(\mathbf{z}(\nu)) \in \mathfrak{X}$  будет использоваться в качестве  $x^0$  раздела 2. При  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  в виде

$$\Lambda_\nu[\alpha] \triangleq (\alpha(\nu + s))_{s \in \overline{1, N}} \quad (4.2)$$

имеем инъективное отображение  $\Lambda_\nu[\alpha] : \overline{1, N} \rightarrow \overline{1, \mathbf{n}}$ , а также множество-образ

$$\Gamma_\nu[\alpha] \triangleq \Lambda_\nu[\alpha]^{-1}(\overline{1, N}) = \{\alpha(\nu + s) : s \in \overline{1, N}\} \in \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}}), \quad (4.3)$$

для которых справедливо свойство

$$\Lambda_\nu[\alpha] \in (\text{bi})[\Gamma_\nu[\alpha]]. \quad (4.4)$$

С «окном» (4.3) связывается «окно» условий предшествования: при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  полагаем, что

$$Q_\nu[\alpha] \triangleq \{z \in \mathfrak{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in \Gamma_\nu[\alpha]) \& (\text{pr}_2(z) \in \Gamma_\nu[\alpha])\} \in \mathcal{P}(\mathfrak{K}); \quad (4.5)$$

данное «окно» (4.5) преобразуется в систему адресных пар локальной задачи:

$$\mathbf{K}_\nu[\alpha] \triangleq \{(\Lambda_\nu[\alpha]^{-1}(\text{pr}_1(z)), \Lambda_\nu[\alpha]^{-1}(\text{pr}_2(z))) : z \in Q_\nu[\alpha]\} \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N}),$$

для которой выполнено [14] условие

$$\forall \mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_\nu[\alpha]) \exists z_0 \in \mathbf{K}_0 : \text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z_0) \quad \forall z \in \mathbf{K}_0. \quad (4.6)$$

Подчеркнем, что (4.6) выполняется автоматически; это следует из того, что  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Мы получаем, что при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$

$$\mathbf{A}_\nu[\alpha] \triangleq \{\beta \in \mathbb{P} \mid \beta^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}_\nu[\alpha]\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \quad (4.7)$$

В (4.7) мы получили конкретизацию (2.5). Отметим теперь следующее важное свойство (см. [14]): при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$  определен маршрут

$$(\beta\text{-sew})[\alpha; \nu] \in \mathcal{A}, \quad (4.8)$$

для которого

$$\begin{aligned} ((\beta\text{-sew})[\alpha; \nu](t) &\triangleq \alpha(t) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& \\ &\& ((\beta\text{-sew})[\alpha; \nu](t) \triangleq (\Lambda_\nu[\alpha] \circ \beta)(t - \nu) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) вытекает, что при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$  маршрут  $(\beta\text{-sew})[\alpha; \nu] \in \mathcal{A}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} ((\beta\text{-sew})[\alpha; \nu](t) &= \alpha(t) \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& \\ &\& ((\beta\text{-sew})[\alpha; \nu](t) = \alpha(\nu + \beta(t - \nu)) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Процедуру (4.9), (4.10) можно рассматривать как вклеивание допустимого (по предшествованию) маршрута в (также допустимый) глобальный маршрут; см. (4.8). Аналогичная процедура реализуется в отношении трасс (траекторий). Однако прежде чем ее определять, введем некоторые понятия и обозначения.

Полагаем в дальнейшем, что  $\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall s \in \overline{1, N}$

$$(M_s[\alpha; \nu] \triangleq \mathbf{L}_{\Lambda_\nu[\alpha](s)} = \mathbf{L}_{\alpha(\nu+s)}) \& (M_s[\alpha; \nu] \triangleq \mathbb{L}_{\Lambda_\nu[\alpha](s)} = \mathbb{L}_{\alpha(\nu+s)}). \quad (4.11)$$



Посредством (4.11) часть мегаполисов «большой» задачи преобразуется в мегаполисы локальной задачи. Кроме того, имеем в силу (4.11), что

$$\mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \triangleq \{\text{pr}_2(z(\nu))\} \cup \left( \bigcup_{s=1}^N M_s[\alpha; \nu] \right) \in \text{Fin}(\mathfrak{X}) \quad (4.12)$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{A} \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$$

(определена локализация исходного множества  $X$ ); итак, в (4.12) рассматриваются варианты множества  $\mathfrak{X}$  раздела 2. Наконец, при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  полагаем, что  $\mathbb{Z}[\alpha; z; \nu]$  есть множество всех кортежей

$$\tilde{z} : \overline{0, N} \rightarrow \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu];$$

если при этом  $\beta \in \mathbb{P}$ , то полагаем

$$\mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu] \triangleq \{h \in \mathbb{Z}[\alpha; z; \nu] \mid (h(0) = (\text{pr}_2(z(\nu)), \text{pr}_2(z(\nu)))) \& \\ \& (h(t) \in \mathbb{M}_{\beta(t)}[\alpha; \nu] \quad \forall t \in \overline{1, N})\}, \quad (4.13)$$

получая свойство  $\mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu] \in \text{Fin}(\mathbb{Z}[\alpha; z; \nu])$ . С учетом (4.11) получаем из (4.13) при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $\beta \in \mathbb{P}$ , что

$$\mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu] = \{h \in \mathbb{Z}[\alpha; z; \nu] \mid (h(0) = (\text{pr}_2(z(\nu)), \text{pr}_2(z(\nu)))) \& \\ \& (h(t) \in \mathbb{L}_{\alpha(\nu+\beta(t))} \quad \forall t \in \overline{1, N})\}. \quad (4.14)$$

Итак, введены конкретизации множеств (2.7). Таким образом, при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ ,  $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$  и  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]$  в виде  $(\beta, h)$  имеем (см. (4.13), (4.14)) ДР локальной задачи, связанной с посещением мегаполисов (4.11). Получаем

$$\tilde{\mathbb{D}}[\alpha; z; \nu] \triangleq \{(\beta, h) \in \mathbf{A}_\nu[\alpha] \times \mathbb{Z}[\alpha; z; \nu] \mid h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]\} \in \\ \in \text{Fin}(\mathbf{A}_\nu[\alpha] \times \mathbb{Z}[\alpha; z; \nu]) \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}. \quad (4.15)$$

Посредством (4.15) конкретизируем непустое конечное множество  $\mathbb{D}$ . Нам следует, кроме того, ввести нужные в дальнейшем варианты кортежа  $(\mathbf{c}, c_1, \dots, c_N, \mathbf{f})$  раздела 2.

Итак, при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  определяем функции

$$\mathbf{c}[\alpha; z; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathfrak{N}], \\ c_1[\alpha; z; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathfrak{N}], \dots, \\ c_N[\alpha; z; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathfrak{N}], \\ f[\alpha; z; \nu] \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}[\alpha; z; \nu]]$$

посредством следующих правил:

1) в случае  $\nu < \mathbf{n} - N$  полагаем, что

$$\mathbf{c}[\alpha; z; \nu](h, K) \triangleq \mathbf{c}^\natural(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K) \cup \alpha^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})) \\ \forall h \in \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \forall K \in \mathfrak{N} \& \\ \& (c_j[\alpha; z; \nu](h, K) \triangleq c_{\Lambda_\nu[\alpha](j)}^\natural(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K) \cup \alpha^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})) \\ \forall j \in \overline{1, N} \forall h \in \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \forall K \in \mathfrak{N} \& \\ \& (f[\alpha; z; \nu](x) \triangleq \mathbf{c}^\natural(x, \text{pr}_1(z(\nu + N + 1)), \alpha^1(\overline{\nu + N + 1, \mathbf{n}})) \quad \forall x \in \mathbb{X}[\alpha; z; \nu]); \quad (4.16)$$

2) при  $\nu = \mathbf{n} - N$  используем соглашения

$$\mathbf{c}[\alpha; z; \nu](h, K) \triangleq \mathbf{c}^\natural(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K)) \quad \forall h \in \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \forall K \in \mathfrak{N} \& \\ \& (c_j[\alpha; z; \nu](h, K) \triangleq c_{\Lambda_\nu[\alpha](j)}^\natural(h, \Lambda_\nu[\alpha]^1(K)) \\ \forall j \in \overline{1, N} \forall h \in \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \times \mathbb{X}[\alpha; z; \nu] \forall K \in \mathfrak{N} \& \\ \& (f[\alpha; z; \nu](x) \triangleq f^\natural(x) \quad \forall x \in \mathbb{X}[\alpha; z; \nu]). \quad (4.17)$$

Посредством (4.16), (4.17) определены нужные конкретизации кортежа  $(\mathbf{c}, c_1, \dots, c_N, \mathbf{f})$  раздела 2; случай  $\nu = \mathbf{n} - N$  обладает при этом понятной особенностью. В связи с (4.16), (4.17) отметим, что согласно (4.2) при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$

$$\begin{aligned} (\Lambda_\nu[\alpha]^1(K) = \{\alpha(\nu + t) : t \in K\} \in \mathcal{P}'(\Gamma_\nu[\alpha]) \quad \forall K \in \mathfrak{N}) \& \\ \& (\Lambda_\nu[\alpha](j) = \alpha(\nu + j) \quad \forall j \in \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Используя (4.18), выражения (4.16), (4.17) можно переписать в терминах исходного решения  $(\alpha, z) \in \mathbf{D}$  «большой» задачи и параметра  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , определяющего начало вставки. С учетом (4.16) и (4.17) конкретизируется критерий (2.8): если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ ,  $\beta \in \mathbb{P}$  и  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]$ , то полагаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_\beta[h|\alpha; z; \nu] \triangleq \sum_{s=1}^N [\mathbf{c}[\alpha; z; \nu](\text{pr}_2(h(s-1)), \text{pr}_1(h(s)), \beta^1(\overline{s, N})) + \\ + c_{\beta(s)}[\alpha; z; \nu](h(s), \beta^1(\overline{s, N}))] + f[\alpha; z; \nu](\text{pr}_2(h(N))). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Итак, (2.8) «переходит» в (4.19) при  $\mathbf{c} = \mathbf{c}[\alpha; z; \nu]$ ,  $c_1 = c_1[\alpha; z; \nu]$ ,  $\dots$ ,  $c_N = c_N[\alpha; z; \nu]$  и  $\mathbf{f} = f[\alpha; z; \nu]$ . В этой конкретизации следует учитывать (4.16) и (4.19), различая случаи  $\nu < \mathbf{n} - N$  и  $\nu = \mathbf{n} - N$  (в этой связи см. также (4.11) и (4.18)). Итак, (2.9) превращается в задачу

$$\mathfrak{B}_\beta[h|\alpha; z; \nu] \rightarrow \min, (\beta, h) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; z; \nu], \quad (4.20)$$

где  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ ; задаче (4.20) отвечает экстремум

$$\mathbb{V}[\alpha; z; \nu] \triangleq \min_{(\beta, h) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; z; \nu]} \mathfrak{B}_\beta[h|\alpha; z; \nu] \in \mathbb{R}_+ \quad (4.21)$$

и соответствующее непустое множество

$$(\text{SOL})[\alpha; z; \nu] \triangleq \{(\beta_0, h_0) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; z; \nu] \mid \mathfrak{B}_{\beta_0}[h_0|\alpha; z; \nu] = \mathbb{V}[\alpha; z; \nu]\} \quad (4.22)$$

ее оптимальных решений. Данные решения предполагается вклеивать в исходную эвристику с целью улучшения доставляемого ей результата в основной задаче. Напомним некоторые построения [14, 23].

Процедура вклеивания локального маршрута указана в (4.9). Теперь рассмотрим процедуру вклеивания локальной трассы. Если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]$ , то кортеж

$$(\text{sew})[h|\alpha; z; \nu] : \overline{0, \mathbf{n}} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \quad (4.23)$$

определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} ((\text{sew})[h|\alpha; z; \nu](t) \triangleq h(t - \nu) \quad \forall t \in \overline{\nu + 1, \nu + N}) \& \\ \& ((\text{sew})[h|\alpha; z; \nu](t) \triangleq z(t) \quad \forall t \in \overline{0, \mathbf{n}} \setminus \overline{\nu + 1, \nu + N}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Разумеется, (4.23), (4.24) существенны для нас при  $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]$ , где  $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$ . Тогда

$$(\text{sew})[h|\alpha; z; \nu] \in \mathfrak{Z}_{(\beta - \text{sew})[\alpha; \nu]} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall \beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha] \quad \forall h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]. \quad (4.25)$$

Тогда с учетом (3.7), (4.8) и (4.25) получаем, что

$$\begin{aligned} ((\beta - \text{sew})[\alpha; \nu], (\text{sew})[h|\alpha; z; \nu]) \in \mathbf{D} \\ \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall \beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha] \quad \forall h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; z; \nu]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, в (4.26) определено правило преобразования ДР основной задачи. Заметим теперь, что (4.26) применимо, в частности, к оптимальным ДР локальных задач, т. е. к элементам множеств (4.22). Итак,

$$\begin{aligned} ((\beta - \text{sew})[\alpha; \nu], (\text{sew})[h|\alpha; z; \nu]) \in \mathbf{D} \\ \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \quad \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \quad \forall (\beta, h) \in (\text{SOL})[\alpha; z; \nu]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Вариант (4.27) является основным в следующих построениях. Уместно, однако, сначала отметить еще один частный случай (4.26). Для этого введем в рассмотрение тождественную перестановку  $\mathbf{e} \in \mathbb{P}$ :  $\mathbf{e}(s) \triangleq s \forall s \in \overline{1, N}$ . Напомним, что (см. [14])  $\mathbf{e} \in \mathbf{A}_\nu[\alpha] \forall \alpha \in \mathcal{A} \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ . С учетом этого имеем из (4.8), что при  $\alpha \in \mathcal{A}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  определен маршрут  $(\mathbf{e}-\text{sew})[\alpha; \nu] \in \mathcal{A}$  и, более того (см. [14, (3.10)]),

$$(\mathbf{e}-\text{sew})[\alpha; \nu] = \alpha. \quad (4.28)$$

С учетом (4.28) имеем, что  $\mathbf{e}$  отождествимо с сужением исходного маршрута  $\alpha$ . Полезно учесть в этой связи (4.10).

Вернемся к (4.23), используя вышеупомянутые свойства  $\mathbf{e}$ . Если  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то определена следующая локальная трасса:  $(\text{nar})[z|\alpha; \nu] \in \mathfrak{Z}_\mathbf{e}[\alpha; z; \nu]$ , при этом

$$\begin{aligned} ((\text{nar})[z|\alpha; \nu](0) &\triangleq (\text{pr}_2(z(\nu)), \text{pr}_2(z(\nu))) \& \\ &\& ((\text{nar})[z|\alpha; \nu](t) \triangleq z(\nu + t) \quad \forall t \in \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (4.29)$$

разумеется,  $(\mathbf{e}, (\text{nar})[z|\alpha; \nu]) \in \tilde{\mathbf{D}}[\alpha; z; \nu]$ , а потому

$$\mathbb{V}[\alpha; z; \nu] \leq \mathfrak{B}_\mathbf{e}[(\text{nar})[z|\alpha; \nu]|\alpha; z; \nu]$$

и, следовательно,  $\kappa[\alpha; z; \nu] \triangleq \mathfrak{B}_\mathbf{e}[(\text{nar})[z|\alpha; \nu]|\alpha; z; \nu] - \mathbb{V}[\alpha; z; \nu] \in \mathbb{R}_+$ . Как следствие при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $(\beta_0, h_0) \in (\text{SOL})[\alpha; z; \nu]$

$$\kappa[\alpha; z; \nu] = \mathfrak{B}_\mathbf{e}[(\text{nar})[z|\alpha; \nu]|\alpha; z; \nu] - \mathfrak{B}_{\beta_0}[h_0|\alpha; z; \nu]; \quad (4.30)$$

в то же время согласно (4.25) и (4.28) имеем

$$(\text{sew})[(\text{nar})[z|\alpha; \nu]|\alpha; z; \nu] = z \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}. \quad (4.31)$$

В дополнение к (4.29)–(4.31) заметим, что [23] при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $(\beta_0, h_0) \in (\text{SOL})[\alpha; z; \nu]$

$$\widehat{\mathfrak{C}}_{(\beta_0-\text{sew})[\alpha; \nu]}[(\text{sew})[h_0|\alpha; z; \nu]] = \widehat{\mathfrak{C}}_\alpha[z] - \kappa[\alpha; z; \nu]. \quad (4.32)$$

В свою очередь, из (4.27) и (4.32) следует важная оценка экстремума основной задачи

$$V \leq \widehat{\mathfrak{C}}_\alpha[z] - \kappa[\alpha; z; \nu] \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \forall z \in \mathfrak{Z}_\alpha \forall \nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}. \quad (4.33)$$

Реализация оценок (4.32) и (4.33) связана с заменами

$$\alpha \rightarrow (\beta_0-\text{sew})[\alpha; \nu], \quad z \rightarrow (\text{sew})[h_0|\alpha; z; \nu] \quad (4.34)$$

в обозначениях, обеспечивающих (4.32), т.е. при  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $z \in \mathfrak{Z}_\alpha$ ,  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  и  $(\beta_0, h_0) \in (\text{SOL})[\alpha; z; \nu]$ .

## § 5. Итерационная процедура с оптимизирующими вставками

Рассмотрим сейчас вопрос об организации последовательности итераций, использующих замены (4.34). Итак, вернемся к (4.1). Полагаем, что

$$\eta^{(0)} \triangleq \eta, \quad \lambda^{(0)} \triangleq \lambda, \quad \mathbf{h}^{(0)} \triangleq (\mathbf{h}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}. \quad (5.1)$$

Пусть, кроме того, у нас выбрано  $\nu^{(0)} \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$  на основании информации об  $\eta^{(0)}$  (5.1). Мы осуществляем (4.34) при условиях

$$\alpha = \lambda^{(0)}, \quad z = \mathbf{h}^{(0)}, \quad \nu = \nu^{(0)};$$

УП  $(\beta_0, h_0)$  в (4.34) такова, что  $(\beta_0, h_0) \in (\text{SOL})[\lambda^{(0)}; z^{(0)}; \nu^{(0)}]$ . После этого полагаем, что

$$\lambda^{(1)} \triangleq (\beta_0-\text{sew})[\lambda^{(0)}; \nu^{(0)}], \quad \mathbf{h}^{(1)} \triangleq (\text{sew})[h_0|\lambda^{(0)}; \mathbf{h}^{(0)}; \nu^{(0)}], \quad \eta^{(1)} \triangleq (\lambda^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)}). \quad (5.2)$$

Используем ДР  $\eta^{(1)}$  (учитывая (4.27)) в качестве новой эвристики:  $\eta^{(1)} \in \mathbf{D}$ . После этого на основании информации о  $\eta^{(1)}$  и, возможно,  $\nu^{(0)}$  мы выбираем  $\nu^{(1)} \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , после чего осуществляем (4.34) при условиях

$$\alpha = \lambda^{(1)}, z = \mathbf{h}^{(1)}, \nu = \nu^{(1)}.$$

Далее процедура повторяется. Сейчас уточним наши построения. Будем предполагать, что задано отображение

$$\Phi : \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N} \rightarrow \mathcal{P}'(\overline{0, \mathbf{n} - N}); \quad (5.3)$$

ясно, что (5.3) есть мультифункция, определенная на  $\mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N}$ . Если  $(\alpha, z) \in \mathbf{D}$  и  $\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то индексы  $\tilde{\nu} \in \Phi(\alpha, z, \nu)$  могут использоваться для замены  $\nu$  с целью построения вставки, улучшающей ДР  $(\alpha, z)$  большой задачи по схеме раздела 4. Сама мультифункция (5.3) может определять по-разному; мы рассмотрим ниже один из вариантов (5.3). Сейчас ограничимся описанием процедуры в терминах произвольного отображения (5.3), считая  $\eta^{(0)}$  и  $\nu^{(0)}$  заданными ( $\eta^{(0)}$  определено в (5.1)). После этого конструируем  $\eta^{(1)}$  в соответствии с (5.2) и выбираем  $\nu^{(1)} \in \Phi(\eta^{(1)}, \nu^{(0)})$ ,  $\Phi(\eta^{(1)}, \nu^{(0)}) = \Phi(\lambda^{(1)}, \mathbf{h}^{(1)}, \nu^{(0)})$  (см. раздел 2). Тем самым осуществляется преобразование  $(\eta^{(0)}, \nu^{(0)})$  в  $(\eta^{(1)}, \nu^{(1)})$ .

Пусть вообще  $r \in \mathbb{N}_0$  и УП  $(\eta^{(r)}, \nu^{(r)})$ , где  $\eta^{(r)} \in \mathbf{D}$  и  $\nu^{(r)} \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , уже построена. Определяем  $\eta^{(r+1)} \in \mathbf{D}$  по следующему правилу: при  $\eta^{(r)} = (\lambda^{(r)}, \mathbf{h}^{(r)})$ , где  $\lambda^{(r)} \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{h}^{(r)} \in \mathfrak{Z}_{\lambda^{(r)}}$ , выбираем

$$(\beta^0, h^0) \in (\text{SOL})[\lambda^{(r)}; \mathbf{h}^{(r)}; \nu^{(r)}]$$

и полагаем, что

$$\begin{aligned} \lambda^{(r+1)} &= (\beta^0 - \text{sew})[\lambda^{(r)}; \nu^{(r)}], \quad \mathbf{h}^{(r+1)} \triangleq (\text{sew})[h^0 | \lambda^{(r)}; \mathbf{h}^{(r)}; \nu^{(r)}], \\ \eta^{(r+1)} &\triangleq (\lambda^{(r+1)}, \mathbf{h}^{(r+1)}), \end{aligned}$$

после чего выбираем, при условии продолжения эксперимента по реализации процедуры, число

$$\nu^{(r+1)} \in \Phi(\eta^{(r+1)}, \nu^{(r)}),$$

иными словами,  $\nu^{(r+1)} \in \Phi(\lambda^{(r+1)}, \mathbf{h}^{(r+1)}, \nu^{(r)})$ , чем и завершается формирование новой УП  $(\eta^{(r+1)}, \nu^{(r+1)})$ . Если же после определения  $\eta^{(r+1)}$  принимается решение об остановке процедуры, то  $\nu^{(r+1)}$  не определяется, а  $\eta^{(r+1)}$  объявляется полученным решением. Останов может осуществляться:

- 1) по причине заданного изначально числа итераций,
- 2) по достижении приемлемого качества  $\widehat{\mathfrak{C}}_{\lambda^{(r+1)}}[\mathbf{h}^{(r+1)}]$ .

Возможны и другие правила останова. При этом согласно (4.32) на каждом шаге итерационной процедуры реализуется следующая оценка: если  $s \in \mathbb{N}_0$  и мы, располагая УП  $(\eta^{(s)}, \nu^{(s)}) \in \mathbf{D} \times \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , где  $\eta^{(s)} = (\lambda^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)})$ , при  $\lambda^{(s)} \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{h}^{(s)} \in \mathfrak{Z}_{\lambda^{(s)}}$ , осуществляем переход к  $(\eta^{(s+1)}, \nu^{(s+1)})$  по вышеупомянутой процедуре, то в силу (4.32)

$$\widehat{\mathfrak{C}}_{\lambda^{(s+1)}}[\mathbf{h}^{(s+1)}] = \widehat{\mathfrak{C}}_{\lambda^{(s)}}[\mathbf{h}^{(s)}] - \kappa[\lambda^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}, \nu^{(s)}], \quad (5.4)$$

где  $\lambda^{(s+1)} \in \mathcal{A}$  и  $\mathbf{h}^{(s+1)} \in \mathfrak{Z}_{\lambda^{(s+1)}}$  реализуют  $\eta^{(s+1)}$  в виде  $\eta^{(s+1)} = (\lambda^{(s+1)}, \mathbf{h}^{(s+1)})$ . Итак (см. (5.4)), осуществляется последовательное улучшение (возможно, неухудшение) достигаемого качества при любом выборе мультифункции  $\Phi$  (5.3). Сейчас обсудим один из вариантов выбора  $\Phi$ , ориентируясь на [24].

При исследовании процедур маршрутизации на основе ДП давно было замечено, что большее число адресных пар, используемых при введении условий предшествования, позволяет снижать сложность вычислений и эффективно решать задачи большой размерности. В этой связи представляется естественным при построении мультифункции (5.3) задействовать идею,

связанную с выбором фрагмента имеющегося решения с наибольшим числом адресных пар, попадающих в окно (4.3). Таким образом (см. [24]), начало вставки предлагается выбирать из соображений максимизации мощности множества (4.5). Иными словами, правило выбора  $\Phi$  (5.3) при  $\mathbf{n} - N \geq 2$  может быть следующим: если  $(\bar{\alpha}, \bar{z}) \in \mathbf{D}$  и  $\bar{\nu} \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$ , то

$$\Phi(\bar{\alpha}, \bar{z}, \bar{\nu}) \triangleq \left\{ \nu_* \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \setminus \{\bar{\nu}\} \mid |Q_{\nu_*}[\alpha]| = \max_{\nu \in \overline{0, \mathbf{n} - N} \setminus \{\bar{\nu}\}} |Q_{\nu}[\alpha]| \right\}. \quad (5.5)$$

Исключение из рассмотрения в (5.5) (предыдущего по смыслу) значения  $\bar{\nu}$  связано с тем, что мы исследуем только новые возможности в части построения вставки, в то время как по логике итерационной процедуры  $\bar{\nu}$  отвечает случаю уже использованного ранее «момента» начала вставки.

## § 6. Задача о последовательном демонтаже источников излучения

Конструкции предыдущих разделов имели общий характер, они распространяют методы [24] на случаи более сложной задачи с функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Примером такого случая как раз и является содержательная инженерная задача утилизации источников излучения, намеченная во Введении. В этой связи рассмотрим конкретизацию общих построений предыдущих разделов для упомянутой инженерной задачи, имея в виду алгоритмический вариант изложения. Будем рассматривать постановку, в которой цель посещения каждого мегаполиса состоит в демонтаже одного излучающего элемента. Сами мегаполисы получают всякий раз посредством дискретизации границы ближней зоны соответствующего источника.

Сейчас при  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  мы конкретизируем некоторые свойства функций (3.8). Прежде всего условимся, что при  $z \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  и  $K \in \mathbf{N}$

$$(\mathbf{c}^{\natural}(z, K) = \sum_{t \in K} \mathbf{c}^{\natural}(z, \{t\}) \& (c_j^{\natural}(z, K) = \sum_{t \in K} c_j^{\natural}(z, \{t\}) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}); \quad (6.1)$$

иными словами, воздействия источников излучения на исполнителя суммируются как на этапе внешних перемещений, так и при выполнении (внутренних по смыслу) работ, связанных с посещением мегаполисов. Данное свойство типично для вышеупомянутой инженерной задачи. В силу (6.1) для построения функций  $\mathbf{c}^{\natural}, c_1^{\natural}, \dots, c_{\mathbf{n}}^{\natural}$  достаточно располагать их вариантами, отвечающими всякий раз одноэлементным спискам, что характеризует воздействия, создаваемые отдельными источниками. Иными словами, нам потребуются значения

$$(\mathbf{c}^{\natural}(z, \{t\}) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall z \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}}) \& (c_j^{\natural}(z, \{t\}) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall z \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \quad \forall t \in \overline{1, \mathbf{n}}). \quad (6.2)$$

Мы начинаем рассмотрение с исследования способов описания первой группы значений в (6.2), касающихся внешних перемещений при воздействии одного источника. Мы будем придерживаться модели, в которой каждая элементарная доза облучения, получаемая в процессе перемещения исполнителя (осуществляющего демонтаж), обратно пропорциональна квадрату евклидова расстояния от исполнителя до источника. Дозы, получаемые исполнителем на непересекающихся промежутках времени, суммируются, что в конечном итоге приводит к интегралу вышеупомянутой зависимости, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Могут, однако, возникать ситуации прохождения через источник, которые будут учитываться особым способом и рассматриваться как критические. В рассматриваемой ниже модели такие ситуации оцениваются очень большими значениями, т. е. штрафами, фактически исключаяющими упомянутые патологические ситуации.

В отношении внутренних работ условимся о следующем их варианте. Каждому мегаполису сопоставляется источник, находящийся «в пределах мегаполиса». Последнее означает, что источник определяет своеобразный центр ближней зоны, в то время как мегаполисы получают, как уже отмечалось, дискретизацией ее границы. Выполнение внутренних работ сводится всякий раз к посещению «города» в мегаполисе, являющемся пунктом прибытия, перемещению

от пункта прибытия к источнику (в пределах ближней зоны), демонтажу последнего (т. е. фактически его «выключению») и последующему перемещению к «городу», используемому в качестве пункта отправления. При этом сам источник оказывает радиационное воздействие на исполнителя при его движении от пункта прибытия к данному источнику. На этапе движения от источника к пункту отправления упомянутое воздействие уже отсутствует, т. к. источник демонтирован и, таким образом, «выключен». Разумеется, данная модель неполна, она не учитывает ряд особенностей такого рода работ, но мы рассматриваем ее в качестве своеобразного первого приближения.

Итак, условимся, что каждому индексу  $j \in \overline{1, N}$  сопоставлена точка  $u_j \in X$ , охватываемая мегаполисом в упомянутом выше смысле; данная точка характеризует положение источника излучения.

**Регулярный случай (внешнего) перемещения в пункт прибытия.** Рассмотрим определение  $\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\})$ , где  $\bar{z} \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  и  $s \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . Пусть  $\bar{x} \triangleq \text{pr}_1(\bar{z})$  и  $\bar{y} \triangleq \text{pr}_2(\bar{z})$ ; ясно, что  $\bar{x} \in \mathfrak{X}$  и  $\bar{y} \in \mathfrak{X}$ . Постулируем при этом, что  $\bar{x} \neq \bar{y}$ . Будем полагать, что перемещение из  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  осуществляется по прямой, проходящей через эти точки, а точка  $u_s$  не лежит на данной прямой. Будем полагать, кроме того, что интенсивность источника, находящегося в  $u_s$ , определяется числом  $\gamma_s$ ,  $\gamma_s > 0$ . Мы рассматриваем случай, когда целью нашего перемещения является прибытие в точку  $\bar{y}$  и мы не занимаемся демонтажом источника с номером  $s$ .

Будем считать, что исполнитель перемещается по прямой равномерно со скоростью  $v$ ,  $v > 0$ . Пусть  $\bar{R} \triangleq \rho(\bar{x}, \bar{y})$ , где (здесь и ниже)  $\rho$  — евклидово расстояние на плоскости  $X$ . Тогда время перемещения из  $\bar{x}$  в  $\bar{y}$  есть

$$\bar{T} \triangleq \frac{\bar{R}}{v} \in \mathbb{R}_+.$$

Исполнитель последовательно проходит точки

$$w_t \triangleq \bar{x} + \frac{vt}{\bar{R}}(\bar{y} - \bar{x}), \quad t \in [0, \bar{T}].$$

При этом зависимость  $\rho(u_s, w_t)$ ,  $t \in [0, \bar{T}]$ , определяет радиационное воздействие на исполнителя в виде интеграла

$$\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \gamma_s \int_0^{\bar{T}} \frac{1}{(\rho(u_s, w_t))^2} dt, \quad (6.3)$$

где функция  $t \mapsto \rho(u_s, w_t) : [0, \bar{T}] \rightarrow \mathbb{R}_+$  строго положительна и непрерывна, а потому отделена от нуля. Удобно заменить переменную интегрирования (в (6.3) это — время) на расстояние от  $\bar{x}$  до  $w_t$ , т. е. ввести

$$r_t \triangleq \rho(\bar{x}, w_t) = \frac{vt}{\bar{R}}\bar{R} = vt \quad \forall t \in [0, \bar{T}].$$

При этом  $r_t$  изменяется от 0 до  $\bar{R}$ . Получаем, что

$$\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \int_0^{\bar{R}} \frac{1}{(\rho(u_s, \bar{w}_r))^2} dr, \quad (6.4)$$

где значения  $\bar{w}_r$ ,  $r \in [0, \bar{R}]$ , определяется следующим образом: при  $r \in [0, \bar{R}]$

$$\bar{w}_r = w_t \Big|_{t=\frac{r}{v}} = \bar{x} + \frac{r}{\bar{R}}(\bar{y} - \bar{x}).$$

Теперь для определения (6.3), (6.4) можно использовать геометрические представления. В рассматриваемом сейчас случае построения, с одной стороны, имеет смысл связать с треугольником, вершинами которого являются точки  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  и  $u_s$  на плоскости  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , а с другой, при  $r \in [0, \bar{R}]$  — с треугольником, имеющим своими вершинами  $\bar{x}$ ,  $u_s$  и  $\bar{w}_r$ .

Пусть  $a \triangleq \rho(\bar{x}, u_s)$ ,  $b \triangleq \rho(u_s, \bar{y})$  и  $c \triangleq \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{R}$ . Кроме того, через  $\alpha$  обозначим угол между векторами

$$\bar{y} - \bar{x}, \quad u_s - \bar{x}.$$

Тогда по теореме косинусов имеем, что

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha. \quad (6.5)$$

Введем, кроме того, при фиксации  $r \in [0, \overline{R}]$  в рассмотрение  $\tilde{b} \triangleq \rho(u_s, \overline{w}_r)$  и  $\tilde{c} \triangleq \rho(\overline{x}, \overline{w}_r)$ . Тогда по теореме косинусов

$$\tilde{b}^2 = a^2 + \tilde{c}^2 - 2a\tilde{c} \cos \alpha. \quad (6.6)$$

Из (6.5) получаем следующее равенство

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

а тогда согласно (6.6) имеем, что

$$\tilde{b}^2 = a^2 + \tilde{c}^2 - \tilde{c} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c}. \quad (6.7)$$

Из определения  $\overline{w}_r$  получаем, что

$$\tilde{c} = \frac{r}{\overline{R}} \|\overline{x} - \overline{y}\| = \frac{r}{\overline{R}} \cdot c = r.$$

Поэтому из (6.7) вытекает равенство

$$\tilde{b}^2 = a^2 + r^2 - r \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{c}.$$

Из данного равенства следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{b}^2 &= \left( r - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 + a^2 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4c^2} \left[ (2cr - (a^2 + c^2 - b^2))^2 + (4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

При этом  $\tilde{b} > 0$  (действительно  $u_s$  не лежит на прямой, которая содержит  $\overline{x}$  и  $\overline{y}$ ). Соответственно,

$$\frac{1}{\tilde{b}^2} = \frac{4c^2}{(2cr - (a^2 + c^2 - b^2))^2 + (4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2)}. \quad (6.9)$$

Введем теперь в рассмотрение следующую функцию  $R$ , определенную на  $[0, \overline{R}]$  посредством выражения: при  $r \in [0, \overline{R}]$

$$R(r) \triangleq 2cr - (a^2 + c^2 - b^2). \quad (6.10)$$

Кроме того, полагаем, что

$$\tilde{A} \triangleq 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2, \quad (6.11)$$

Тогда, используя (6.9) и определение  $\tilde{b}$  в (6.9), мы получаем, что  $\forall r \in [0, \overline{R}]$

$$\frac{1}{(\rho(u_s, \overline{w}_r))^2} = \frac{4c^2}{R^2(r) + \tilde{A}}. \quad (6.12)$$

Заметим, что  $[0, \overline{R}] = [0, c]$ . Итак, посредством (6.12) определена подынтегральная функция в (6.4). В дальнейшем мы рассмотрим отдельно случаи  $\tilde{A} > 0$  и  $\tilde{A} \leq 0$ . Кроме того, заметим, что

$$R(0) = -(a^2 + c^2 - b^2) = b^2 - a^2 - c^2, \quad (6.13)$$

$$R(c) = R(\overline{R}) = 2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2) = b^2 + c^2 - a^2. \quad (6.14)$$

Два последних выражения определяют «новые» пределы интегрирования.

1) Итак, рассмотрим сначала случай, когда  $\tilde{A} > 0$ . В этом случае мы полагаем, что

$$A \triangleq \sqrt{\tilde{A}} = \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}. \quad (6.15)$$

Ясно, что  $A > 0$  и в данном случае согласно (6.4)

$$\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \int_0^c \frac{4c^2}{R^2(r) + A^2} dr. \quad (6.16)$$

С учетом (6.10) и (6.16) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) &= \frac{\gamma_s}{v} \int_{R(0)}^{R(c)} \frac{2c}{y^2 + A^2} dy = \frac{2c\gamma_s}{v} \int_{R(0)}^{R(c)} \frac{dy}{y^2 + A^2} = \frac{2c\gamma_s}{v} \cdot \frac{1}{A} \arctan \frac{y}{A} \Big|_{R(0)}^{R(\bar{R})} = \\ &= \frac{2c\gamma_s}{v} \cdot \frac{1}{A} \left[ \arctan \frac{R(c)}{A} - \arctan \frac{R(0)}{A} \right]; \end{aligned} \quad (6.17)$$

напомним, что  $c = \bar{R}$ ,  $A$  определено в (6.15), а  $R(0)$  и  $R(c)$  таковы, что  $R(0) < R(c)$ , т. к.  $\bar{x} \neq \bar{y}$ .

2) Рассмотрим теперь случай  $\tilde{A} \leq 0$ . Тогда  $-A \geq 0$  и определено значение

$$B \triangleq \sqrt{-\tilde{A}} = \sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2} \geq 0.$$

В этом случае имеем, конечно, равенство  $\tilde{A} = -B^2$ , т. е.

$$\tilde{A} = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 \leq 0.$$

Поэтому согласно (6.12) при  $r \in [0, \bar{R}]$  (т. е. при  $r \in [0, c]$ )

$$\frac{1}{(\rho(u_s, \bar{w}_r))^2} = \frac{4c^2}{R^2(r) - [(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2]} = \frac{4c^2}{R^2(r) - B^2}. \quad (6.18)$$

При этом существенно при наших условиях, что  $\rho(u_s, \bar{w}_r) > 0 \quad \forall r \in [0, c]$  (более того, для некоторого числа  $\varepsilon > 0$

$$\rho(u_s, \bar{w}_r) \geq \varepsilon \quad \forall r \in [0, c],$$

что следует из свойств непрерывных функций на компакте). Тогда в силу (6.18) имеем, что

$$R^2(r) - B^2 > 0 \quad \forall r \in [0, c]. \quad (6.19)$$

Мы снова можем использовать (см. (6.19)) табличные интегралы, получая из (6.4) и (6.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) &= \frac{\gamma_s}{v} \int_0^c \frac{4c^2}{R^2(r) - B^2} dr = \frac{2c\gamma_s}{v} \int_{R(0)}^{R(c)} \frac{dy}{y^2 - B^2} = \frac{2c\gamma_s}{v} \cdot \frac{1}{2B} \ln \frac{y - B}{y + B} \Big|_{R(0)}^{R(c)} = \\ &= \frac{c\gamma_s}{Bv} \left[ \ln \frac{R(c) - B}{R(c) + B} - \ln \frac{R(0) - B}{R(0) + B} \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

В связи с представлением (6.20) отметим свойства [18, III, с. 367, 368].

С учетом (6.17) и (6.20) мы получаем возможность (см. (6.13), (6.14)) вычислить дозу радиации при перемещении из  $\bar{x}$  в  $\bar{y}$ , где  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , обусловленную воздействием источника, находящегося в точке  $u_s$ . Если  $\bar{x} = \bar{y}$ , то по понятной причине  $\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = 0$ . Случай, рассмотренный в настоящем разделе, называем регулярным; он соответствует перемещению исполнителя мимо источника. Заметим, что в качестве  $\bar{x}$  может использоваться база  $x^0$ , либо точка мегаполиса. В качестве  $\bar{y}$  используется точка мегаполиса, т. к. мы рассматриваем сейчас внешнее перемещение. Однако мы можем применить формулы (6.20) и в других ситуациях. Так, в частности, такие оценки можно применять в случае перемещений исполнителя при выполнении внутренних работ в мегаполисе, номер которого отличен от  $s$ .



Отметим, что возможны, конечно, случаи, когда  $u_s$  находится на прямой, проходящей через  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

**Аномальные случаи внешнего перемещения.**

Вернемся к ситуации, когда задана УП  $\bar{z} \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  с

$$\bar{x} = \text{pr}_1(\bar{z}), \bar{y} = \text{pr}_2(\bar{z}), \bar{x} \neq \bar{y}.$$

По-прежнему рассматриваем определение величины  $\mathbf{c}^\sharp(\bar{z}, \{s\})$ , где  $s \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . Однако сейчас будем предполагать, что точка  $u_s$  находится на прямой, проходящей через точки  $\bar{x} \in X$  и  $\bar{y} \in X$ . Возможны следующие два варианта:

- 1)  $u_s = \bar{x} + \frac{r}{R}(\bar{y} - \bar{x})$  при некотором  $r \in [0, \bar{R}]$ ;
- 2)  $u_s \neq \bar{x} + \frac{r}{R}(\bar{y} - \bar{x}) \quad \forall r \in [0, \bar{R}]$ .

Случаи 1), 2) рассмотрим отдельно. Сначала, фиксируя очень большое число  $\mu \in \mathbb{R}_+$ , обсудим случай

1. В этом случае (прохождения через источник) полагаем, что

$$\mathbf{c}^\sharp(\bar{z}, \{s\}) \triangleq \mu \tag{6.21}$$

(поскольку  $\mu \gg 0$ , условие (6.21) означает, грубо говоря, отождествление  $\mathbf{c}^\sharp(\bar{z}, \{s\})$  с  $\infty$ ). В силу (6.21) мы получаем, что прохождение через источник есть разрешенное формальное, но крайне невыгодное перемещение.

2. Пусть теперь  $u_s \neq \bar{x} + \frac{r}{R}(\bar{y} - \bar{x})$  при  $r \in [0, \bar{R}]$ . Следующим шагом согласования регулярного случая в отношении констант  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогда

$$u_s \neq \bar{x} + \frac{r}{c}(\bar{y} - \bar{x}) \quad \forall r \in [0, c]. \tag{6.22}$$

В то же время  $u_s = \bar{x} + \xi(\bar{y} - \bar{x})$  для некоторого  $\xi \in \mathbb{R}$ . Удобно «разделить» данный случай на два:

$$(\xi < 0) \vee (\xi > 0) \tag{6.23}$$

(в силу (6.22)  $\xi \neq 0$ ). При  $\xi < 0$  исполнитель удаляется, и при  $\xi > 0$  приближается к источнику.

- 2'. Пусть  $\xi < 0$ . Мы по-прежнему используем формулы (6.5), (6.6). При этом, однако, для  $r \in [0, \bar{R}]$

$$\rho(u_s, \bar{w}_r) = \left( \frac{r}{\bar{R}} - \xi \right) \bar{R} = r + c|\xi|. \tag{6.24}$$

В этом случае, как видно из (6.4), имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^\sharp(\bar{z}, \{s\}) &= \frac{\gamma_s}{v} \int_0^c \frac{1}{(\rho(u_s, \bar{w}_r))^2} dr = \frac{\gamma_s}{v} \int_{c|\xi|}^{c(1+|\xi|)} \frac{dy}{y^2} = \\ &= \frac{\gamma_s}{v} \left( -\frac{1}{y} \right) \Big|_{c|\xi|}^{c(1+|\xi|)} = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{c|\xi|} - \frac{1}{c(1+|\xi|)} \right). \end{aligned} \tag{6.25}$$

- 2''. Рассмотрим теперь случай  $\xi > 0$ , используя (6.5), (6.6). В этом случае при  $r \in [0, c]$

$$\rho(u_s, \bar{w}_r) = \left\| \xi(\bar{y} - \bar{x}) - \frac{r}{c}(\bar{y} - \bar{x}) \right\| = \left| \xi - \frac{r}{c} \right| c,$$

где  $\xi > \frac{r}{c}$ , т. к. иначе мы получили бы случай 1, а это не так (действительно, при  $\xi \leq \frac{r}{c}$  имеем, что  $c\xi \in [0, r]$  и

$$u_s = \bar{x} + \xi(\bar{y} - \bar{x}) = \bar{x} + \frac{c\xi}{c}(\bar{y} - \bar{x}),$$

а это противоречит (6.22), т. к.  $r \leq c$ . Тогда

$$\rho(u_s, \bar{w}_r) = c\xi - r = c|\xi| - r.$$

Тогда, как следует из (6.4),

$$\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \int_0^c \frac{1}{(c\xi - r)^2} dr = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{c(\xi - 1)} - \frac{1}{c\xi} \right) = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{c(|\xi| - 1)} - \frac{1}{c|\xi|} \right). \quad (6.26)$$

Заметим теперь в отношении (6.25) и (6.26), что

$$c|\xi| = \|\xi(\bar{y} - \bar{x})\| = \|u_s - \bar{x}\| = \rho(\bar{x}, u_s). \quad (6.27)$$

Далее мы рассмотрим при  $\xi < 0$  представление величины  $c(1 + |\xi|) = c + c|\xi|$ . При этом согласно (6.27)

$$c(1 + |\xi|) = c + \rho(\bar{x}, u_s) = \rho(\bar{x}, \bar{y}) + \rho(\bar{x}, u_s) = \rho(\bar{y}, u_s), \quad (6.28)$$

поскольку  $\bar{x}$  принадлежит «отрезку», соединяющему  $u_s$  и  $\bar{y}$ . Из (6.25), (6.27) и (6.28) получаем в случае  $\xi < 0$ , что

$$\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{\rho(\bar{x}, u_s)} - \frac{1}{\rho(\bar{y}, u_s)} \right).$$

Итак, получаем импликацию

$$(\xi < 0) \Rightarrow \left( \mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{\rho(\bar{x}, u_s)} - \frac{1}{\rho(\bar{y}, u_s)} \right) \right). \quad (6.29)$$

Рассмотрим теперь представление величины  $c(|\xi| - 1)$  при  $\xi > 0$ . Тогда

$$c(|\xi| - 1) = c|\xi| - c = c\xi - c = \rho(\bar{x}, u_s) - \rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, u_s),$$

т.к. в данном случае  $\bar{y}$  принадлежит «отрезку», соединяющему  $\bar{x}$  и  $u_s$ . В этом случае из (6.26) и (6.27) имеем, что

$$\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{\rho(\bar{y}, u_s)} - \frac{1}{\rho(\bar{x}, u_s)} \right).$$

Итак, установлена следующая импликация

$$(\xi > 0) \Rightarrow \left( \mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\}) = \frac{\gamma_s}{v} \left( \frac{1}{\rho(\bar{y}, u_s)} - \frac{1}{\rho(\bar{x}, u_s)} \right) \right). \quad (6.30)$$

Таким образом, все возможные варианты представления  $\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\})$  установлены (напомним, что при  $\bar{x} = \bar{y}$  упомянутое значение  $\mathbf{c}^{\natural}(\bar{z}, \{s\})$  полагается нулевым). Это означает, поскольку выбор  $\bar{z}$  и  $s$  был произвольным, что установлены все функции

$$\mathbf{c}^{\natural}(\cdot, \{k\}) \triangleq (\mathbf{c}^{\natural}(z, \{k\}))_{z \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}}, \quad k \in \overline{1, \mathbf{n}}.$$

В силу (6.1) получаем, что определены все значения  $\mathbf{c}^{\natural}(z, K)$ ,  $z \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ ,  $K \in \mathbf{N}$ . Иными словами, построена вся функция  $\mathbf{c}^{\natural}$ , определяющая стоимость внешних перемещений.

**Оценивание внутренних работ.** Рассмотрим представление функций  $c_1^{\natural}, \dots, c_{\mathbf{n}}^{\natural}$ . Для этого зафиксируем в пределах настоящего пункта индекс  $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$  и будем конструировать

$$c_j^{\natural} : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+. \quad (6.31)$$

Разумеется, для наших целей, как видно из (2.7) и (2.8), существенны лишь значения

$$c_j^{\natural}(z, K), \quad z \in \mathbb{M}_j, \quad K \in \mathfrak{N}. \quad (6.32)$$

Все прочие значения функции (6.31) могут быть произвольными; в частности, их можно полагать нулевыми, поскольку они никак не участвуют в формировании аддитивного критерия (2.8). Принимая для определенности последнее соглашение, мы сосредоточимся на описании значений (6.32); при этом будем использовать (6.1), а потому нас будут интересовать только значения

$$c_j^{\natural}(z, \{t\}), \quad z \in \mathbb{M}_t, \quad t \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (6.33)$$

Если (см. (6.33))  $j \neq t$ , то в принципе описание  $c_j^{\natural}(z, \{t\})$  мало чем отличается от полученного для  $c^{\natural}(z, \{t\})$ ; особенностью является лишь то, что  $c_j^{\natural}(z, \{t\})$  получается суммированием доз, подобных  $c^{\natural}(\tilde{z}, \{t\})$ ,  $\tilde{z} \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ , и отвечающих двум перемещениям: от  $\text{pr}_1(z)$  к  $u_j$  и от  $u_j$  к  $\text{pr}_2(z)$ . Здесь  $\text{pr}_1(z)$  рассматривается как пункт отправления,  $u_t$  — как внешний источник и  $u_j$  — как пункт прибытия; затем  $u_j$  выступает в качестве пункта отправления,  $u_t$  снова играет роль внешнего источника, а  $\text{pr}_2(z)$  является пунктом прибытия. Соответственно

$$c_j^{\natural}(z, \{t\}) = \Pi_1 + \Pi_2, \quad (6.34)$$

где  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответствуют первому и второму из вышеупомянутых перемещений соответственно;  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — дозы радиации, соответствующие упомянутым перемещениям первого и второго типов соответственно.

Конкретизируем  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , полагая, что  $z = \bar{z}$  связано с  $M_j$ , где  $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$  и  $t \in \overline{1, \mathbf{n}} \setminus \{j\}$ . В этом случае мы анализируем варианты ранее рассмотренных случаев 1, 2 при  $s = t$ . Однако сейчас, полагая, что (по сути) перемещение осуществляется в ближней зоне источника  $u_j$ , «охватываемой» мегаполисом  $M_j$ , где  $j \neq t$ , постулируем, что аналог случая 1 невозможен. Уточним это суждение.

Мы полагаем далее, что при  $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$  точка  $u_l$  содержится в выпуклой оболочке плоского множества  $M_l$ . Усиливая несколько предположение о попарной дизъюнктности множеств-мегаполисов, полагаем в дальнейшем, что попарно дизъюнктными являются выпуклые оболочки упомянутых мегаполисов  $M_1, \dots, M_{\mathbf{n}}$  (сами мегаполисы — конечные множества на плоскости).

Итак, случай 1 в рассматриваемой ситуации, связанной с оцениванием  $\Pi_1$ , невозможен. Аналогичными рассуждениями проверяется, что при оценивании  $\Pi_2$  случай 1 также невозможен, т. к. появление источника  $u_t$  в пределах выпуклой оболочки  $M_j$  невозможно. Поэтому при оценивании дозы радиации, создаваемой источником, расположенным в точке  $u_t \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , на этапе внутренних работ ограничиваемся только рассмотрением случая 2.

Итак, мы рассмотрим сначала перемещение из  $\text{pr}_1(z)$  к точке  $u_j$  и будем анализировать только влияние «постороннего» источника, находящегося в точке  $u_t$ . В этом случае мы используем (6.4) при следующей конкретизации параметров.

$$\bar{z} = (\text{pr}_1(z), u_j), \quad s = t, \quad \bar{R} = \rho(\text{pr}_1(z), u_j) \quad (6.35)$$

(см. также (6.25), (6.26)). Для определения  $\Pi_1$  в (6.34) будет, следовательно, использоваться (при конкретизации (6.35)) одна из формул (6.17), (6.20), (6.29), (6.30). Конкретный выбор нужной формулы связан с ранее упомянутыми (для случая внешних перемещений) соображениями, касающимися взаимного расположения  $\text{pr}_1(z)$ ,  $u_j$  и  $u_s$ .

Аналогичные соображения касаются определения  $\Pi_2$  в (6.34). В этом случае мы полагаем, что в (6.4)

$$\bar{z} = (u_j, \text{pr}_2(z)), \quad s = t, \quad \bar{R} = \rho(u_j, \text{pr}_2(z)). \quad (6.36)$$

При этих условиях для  $\Pi_2$  мы будем использовать одну из формул (6.17), (6.20), (6.29), (6.30). Конкретный вариант этого применения определяется соображениями, указанными ранее для случая внешних перемещений при условиях (6.36).

Теперь мы рассмотрим случай, когда  $t = j$ . Иными словами, речь пойдет об определении значения

$$c_j^{\natural}(z, \{j\}) \in \mathbb{R}_+. \quad (6.37)$$

В этой ситуации мы отказываемся от модели (6.4) из-за понятной особенности: в (6.4) знаменатель подынтегрального выражения может зануляться. В этой связи мы несколько изменяем модель. Нам требуется при этом, однако, рассмотреть особо только приближение к источнику с целью его демонтажа, поскольку после окончания демонтажа этот источник, как уже отмечалось, будет выключен.

Итак, мы полагаем, что  $z \in \mathbb{M}_j$  и рассматриваем определение значения (6.37), полагая сейчас, что

$$c_j^{\natural}(z, \{j\}) = \frac{3\gamma_j}{v} \int_0^{\tilde{R}} \frac{1}{(\rho(\tilde{w}_r, u_j))^2 + 1} dr, \quad (6.38)$$

где предполагается, что

$$\tilde{R} \triangleq \rho(\text{pr}_1(z), u_j), \quad \tilde{w}_r \triangleq \text{pr}_1(z) + \frac{r}{\tilde{R}}(u_j - \text{pr}_1(z));$$

множитель 3 выбран с целью учета временных затрат на осуществление демонтажа самого источника. При этом для  $r \in [0, \tilde{R}]$

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{w}_r, u_j) &= \|\tilde{w}_r - u_j\| = \|u_j - \tilde{w}_r\| = \|(u_j - \text{pr}_1(z)) - \frac{r}{\tilde{R}}(u_j - \text{pr}_1(z))\| = \\ &= \|(1 - \frac{r}{\tilde{R}})(u_j - \text{pr}_1(z))\| = (1 - \frac{r}{\tilde{R}})\|u_j - \text{pr}_1(z)\| = (1 - \frac{r}{\tilde{R}})\rho(u_j, \text{pr}_1(z)) = \\ &= (1 - \frac{r}{\tilde{R}})\rho(\text{pr}_1(z), u_j) = \tilde{R} - r, \end{aligned}$$

а тогда получаем из (6.38), что

$$\begin{aligned} c_j^{\natural}(z, \{j\}) &= \frac{3\gamma_j}{v} \int_0^{\tilde{R}} \frac{1}{(\tilde{R} - r)^2 + 1} dr = \frac{3\gamma_j}{v} \int_0^{\tilde{R}} \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{3\gamma_j}{v} \arctan y \Big|_0^{\tilde{R}} = \\ &= \frac{3\gamma_j}{v} (\arctan \tilde{R} - \arctan 0) = \frac{3\gamma_j}{v} \arctan(\rho(\text{pr}_1(z), u_j)). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Таким образом, все возможные варианты значений (6.33) получены. Теперь следует использовать (6.1).

Функцию  $f^{\natural}$  полагаем в настоящем исследовании тождественно равной нулю (в принципе данную функцию можно использовать для оценивания остаточного фона, т. е. уровня радиации после демонтажа всех источников; тогда значения данной функции могут быть не нулевыми).

Итак, мы получаем задачу маршрутизации со сложными функциями стоимости и ограничениями, в которой практически неизбежным является применение эвристик.

## § 7. Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе приведено краткое описание программы и результаты вычислительного эксперимента при решении задачи раздела 2. Итак, рассматривается локальная задача и процедура ДП для ее решения. С точки зрения построений раздела 5, мы получаем, по сути дела, перестраиваемый фрагмент основной задачи, для которого реализуется оптимальная процедура. В разделе 4 указан конкретный механизм встраивания исследуемой ниже локальной задачи, определяющий этап решения основной задачи; излагаемая ниже конструкция как раз и посвящена реализации данного этапа. Для решения «большой» задачи по схеме раздела 5 требуется последовательное повторение данной конструкции при соответствующем перестраивании параметров. В настоящей работе мы ограничиваемся анализом упомянутого блока ощутимой размерности ( $N = 31$ ). В результате получаем достаточно большое время счета, что (на данный момент) приводит к затруднениям при практической реализации итерационного режима.

В разделе 6 настоящей статьи подробно рассмотрена адаптация теоретических конструкций предыдущих параграфов к упрощенной модели, которая количественно описывает получаемую исполнителем дозу радиации при выполнении демонтажа источников излучения. Данный алгоритм был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++ и работающей под управлением 64-х разрядной операционной системы семейства Windows, начиная с Windows 7. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения и увеличения отдельных участков

графика; изображение может быть сохранено в файл графического формата bmp. Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1.

Рассмотрим вариант применения данной программы для следующего модельного примера на плоскости, т. е. в пространстве  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Пусть мегаполисы (2.1) представлены дискретными структурами, являющимися равномерными «сетками» на окружностях или прямоугольниках; будем рассматривать примеры, в которых  $N = 31$ . Излучающим элементам  $(u_i)_{i \in \overline{1, N}}$ , подлежащим демонтажу, соответствуют точки в пределах выпуклых оболочек мегаполисов («границ» ближних зон). Пусть перемещения исполнителя начинаются и заканчиваются в начале координат, т. е.  $x^0 = (0, 0)$  (возврат на базу представляется естественным с технологической точки зрения; относительно функции  $\mathbf{f} = f^{\natural}$  см. рассуждения в конце предыдущего раздела), а функция  $\rho$  в формулах раздела 6 — суть евклидово расстояние. Количество адресных пар (мощность множества  $\mathbf{K}$ ) равно 34. Пусть, кроме того, в формулах раздела 6 скорость  $v$  перемещения между мегаполисами в формулах (6.17), (6.20), а также (6.29) и (6.30), в 4 раза больше, чем аналогичный параметр в формулах (6.38) и (6.39), описывающих перемещения в ближней зоне, связанные с демонтажем источников излучения, а интенсивности излучения  $(\gamma_j)_{j \in \overline{1, N}}$  одинаковые и равны 3.3. Приведем теперь различные примеры применения программы; на рисунках излучающие элементы помечены «звездочками».

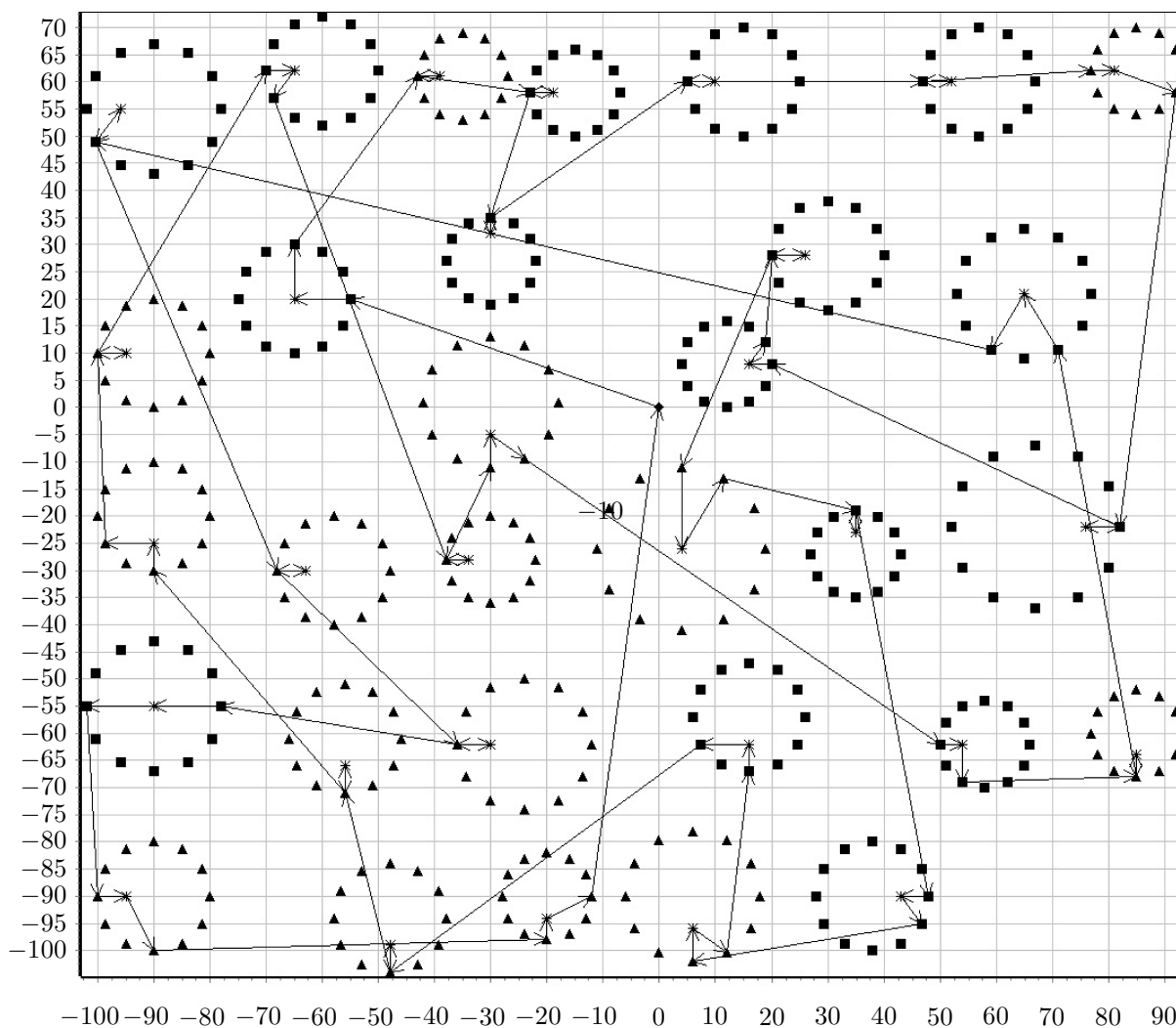


Рис. 1. Маршрут и трасса обхода «круглых» мегаполисов

Рассмотрим сначала пример, в котором мегаполисы являются равномерными «сетками» на окружностях.

Результаты работы программы:

Величина совокупных затрат (3.11):  $V = 436.88$ .

Время счета составило: 5 час. 15 мин. 37 сек.

Время вычисления матриц затрат на внутренние работы: 55 мин. 1 сек.

Время вычисления матриц затрат на внешние перемещения: 3 час. 25 мин. 24 сек.

График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

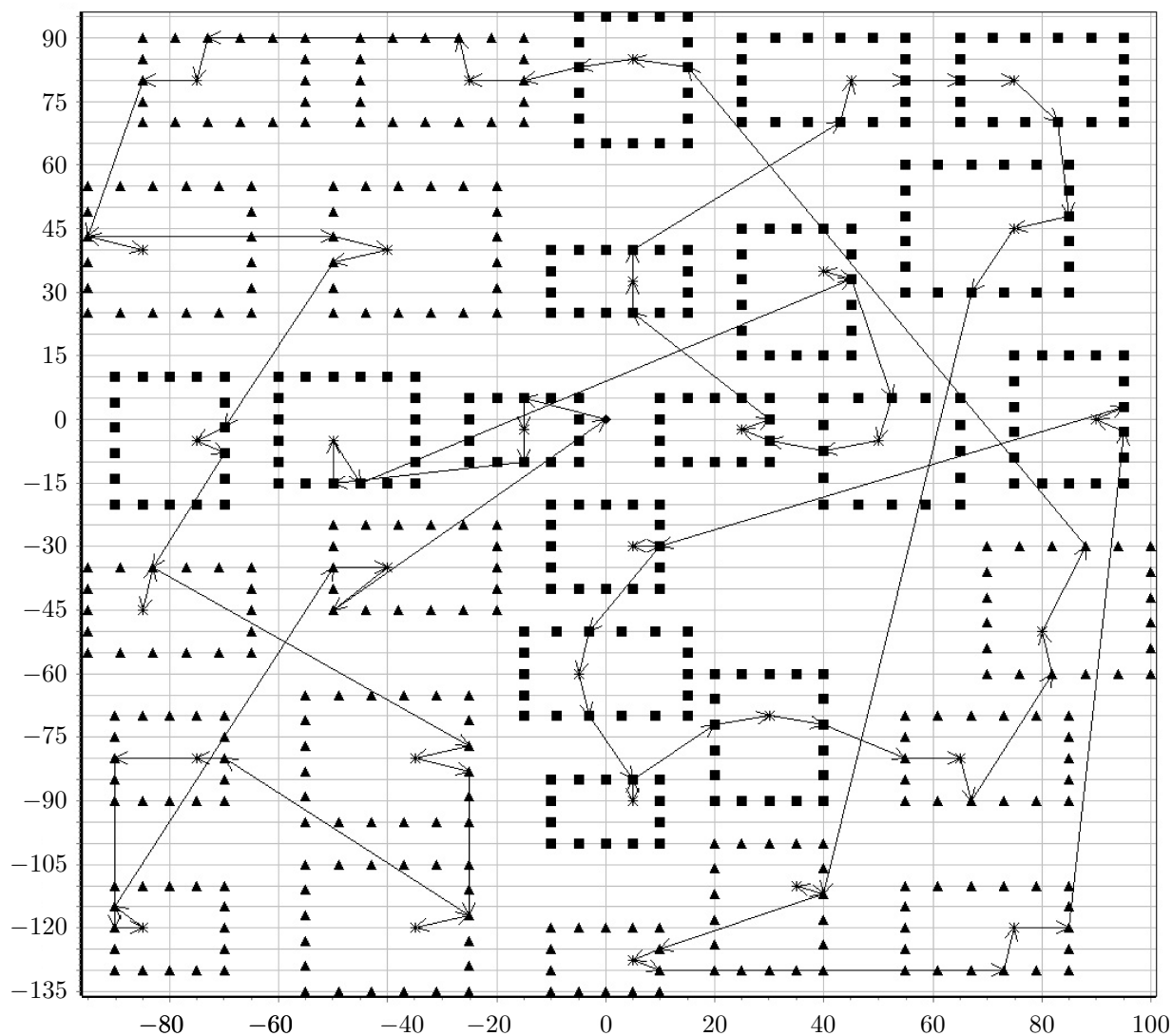


Рис. 2. Маршрут и трасса обхода «прямоугольных» мегаполисов

Пусть мегаполисы представлены равномерными «сетками» на прямоугольниках.

Результаты работы программы:

Величина совокупных затрат (3.11):  $V = 454.21$ .

Время счета составило: 10 час. 12 мин. 28 сек.

Время вычисления матриц затрат на внутренние работы: 1 час. 58 мин. 7 сек.

Время вычисления матриц затрат на внешние перемещения: 7 час. 19 мин. 35 сек.

График маршрута и трассы приведен на рис. 2.

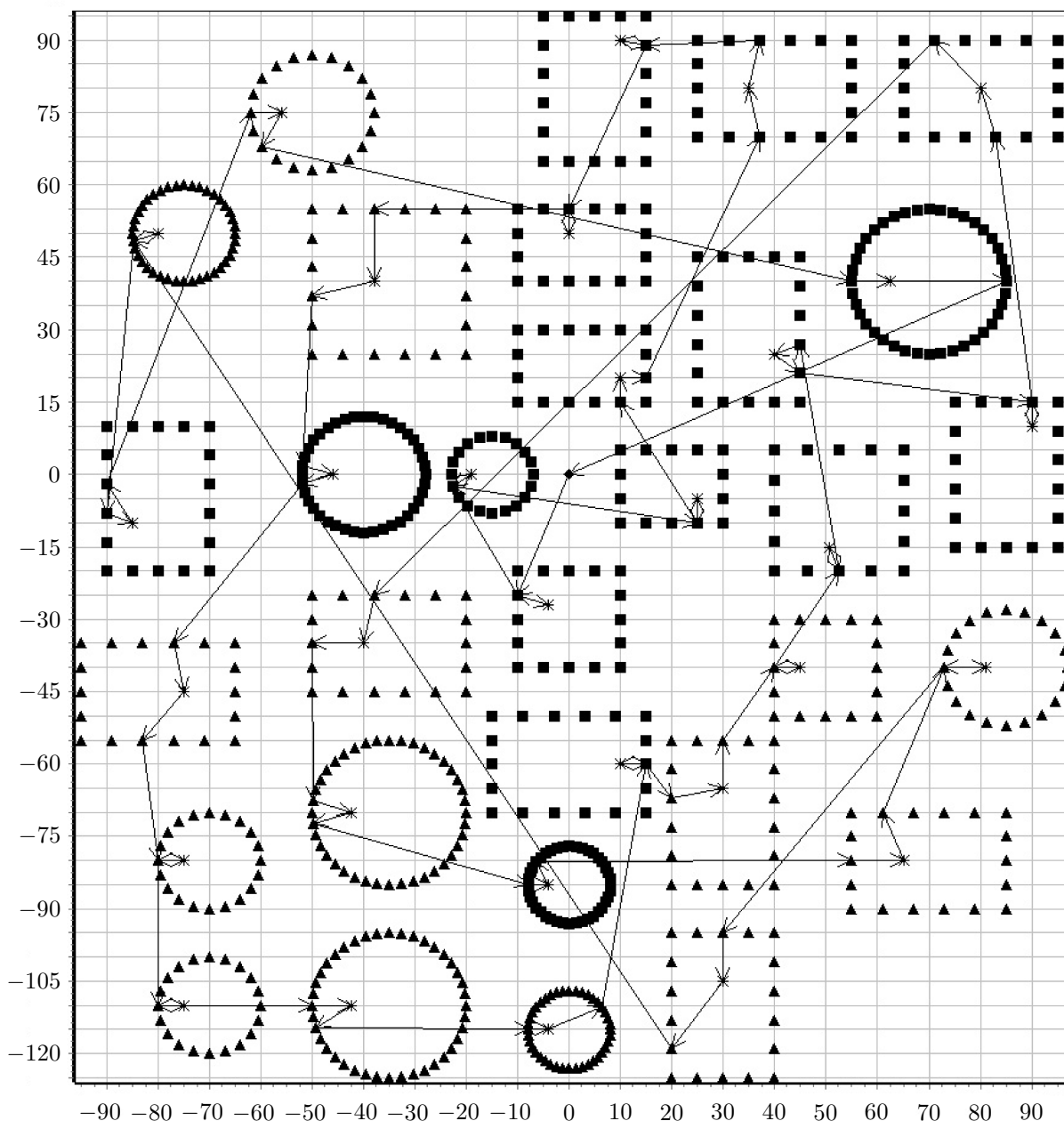


Рис. 3. Маршрут и трасса обхода мегаполисов обоих типов

Рассмотрим теперь пример, в котором присутствуют мегаполисы обоих типов из приведенных выше случаев применения программы.

Результаты работы программы:

Величина совокупных затрат (3.11):  $V = 444.76$ .

Время счета составило: 15 час. 49 мин. 15 сек.

Время вычисления матриц затрат на внутренние работы: 3 час. 30 мин. 36 сек.

Время вычисления матриц затрат на внешние перемещения: 11 час. 13 мин. 58 сек.

График маршрута и трассы приведен на рис. 3.

З а м е ч а н и е 7.1. Приведенные примеры расположены по возрастанию времени счета. Увеличение времени счета обусловлено ростом средней мощности мегаполисов (2.1). Попробуем более детально проанализировать это явление. Отметим, что общее время счета складывается из трех составляющих:

1) вычисление элементов матрицы попарных сравнений мегаполисов для оценки внешних перемещений (используются формулы вида (6.17) и (6.20), а также (6.29) и (6.30));

2) вычисление элементов матрицы попарных сравнений «городов» для каждого мегаполиса, т. е. затрат на демонтаж источников и движение к выходу из каждого мегаполиса (используются формулы вида (6.39), а также (6.17) и (6.20));

3) реализация беллмановской процедуры (2.12) по определению глобального экстремума  $V$  (2.10) задачи оптимизации маршрута и трассы, а также пары маршрут–трасса, его доставляющей.

Мощности всех мегаполисов в примере 1 равны 12. В примере 2 средняя мощность мегаполисов равна 17.7, наименьшая — 14, наибольшая — 20. В примере 3 средняя мощность равна 22.9, наименьшая — 14, а наибольшая (для 7 мегаполисов) — 40.

Если сопоставить все 3 примера, то можно отметить, что все три составляющих времени счета растут с ростом средней мощности мегаполисов. При этом время счета для составляющей 3) (а это разность суммарного времени счета и времен счета составляющих 1) и 2)) наиболее слабо зависит от средней мощности мегаполисов и составляет около 1 часа (в примере 1 и 2 немного меньше, чем 1 час (но в примере 1 чуть меньше, чем в примере 2), в примере 3 — чуть больше 1 часа). Время счета составляющей 1) напротив растет сильнее всех других составляющих. Рост компоненты 2) времени счета с увеличением мощности мегаполисов заметно больше, чем для компоненты 3), но и существенно меньше, чем для составляющей 1). Природа такого поведения времени счета вытекает из объема вычислений, которые выполняются на каждом из рассматриваемых этапов решения задачи. А именно, беллмановская процедура лишена затратной в вычислительном плане части, касающейся вычисления величин доз облучения, которые весьма трудоемки и выполняются для каждого «города» каждого мегаполиса (они скрыты в данном случае на этапах 1) и 2)) — напротив, все сводится к выбору элементов из уже посчитанных матриц; разумеется, чем больше в мегаполисах элементов, тем больше требуется перебрать вариантов в процедуре (2.12), но вычислительная сложность этого процесса существенно меньше, чем подсчет интегралов по формулам предыдущего раздела. В компоненте 2) времени счета вычисляются затраты на все возможные перемещения между «городами» каждого мегаполиса от точки входа к излучающему элементу и далее к точке выхода, поэтому зависимость более значительная, чем в случае 3); чем больше мощность мегаполиса, тем больше его элементов надо сопоставлять для каждого его «города». Наибольший характер роста компоненты 1) обусловлен необходимостью вычисления доз облучения для всех возможных пар «городов» всех мегаполисов, первый компонент которых — это пункт выхода из мегаполиса или база, а второй — точка входа в другой мегаполис. Понятно, что с ростом мощностей мегаполисов имеем для каждого элемента каждого мегаполиса в  $N - 1$  раз увеличение объема сопоставляемых ему «городов» и, разумеется, сопутствующих вычислений доз облучения, что существенно больше, чем в случае 2), где увеличение количества подлежащих сравнению компонентов мегаполиса осуществляется без упомянутого коэффициента.

## Заключение

В статье исследованы возможности улучшения эвристических решений задач маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости. Исследуемая постановка ориентирована на задачи, связанные со снижением дозовой нагрузки персонала АЭС при проведении большого комплекса работ в условиях повышенной радиации. В исследовании обозначена роль ДП, как улучшающего фактора для эвристик, использование которых в задачах большой размерности практически неизбежно. Проведено детальное исследование и самих оптимизирующих фрагментов. В частности, показано средствами вычислительного эксперимента, что размерность мегаполисов, подлежащих посещению, также является (наряду с количеством самих мегаполисов) существенно осложняющим фактором при конкретном решении локальных задач методом ДП. Серьезную проблему (в части сокращения времени счета, что важно в исходной прикладной задаче) составляет и насчитывание функций (а фактически, матриц) стоимостей; данный этап решения составляет основную часть временных затрат, хотя, на первый взгляд, он и находится за пределами математической постановки. Тем не менее, он оказывается практически значимым.

## Список литературы

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–33.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.



4. Gutin G., Punnen A.P. The traveling salesman problem and its variations. Springer US, 2007. DOI: 10.1007/b101971
5. Cook W.J. In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton University Press, 2012. 248 p. DOI: 10.1515/9781400839599
6. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1. Вып. 1. С. 90–107.
9. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.
10. Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 68–77.
11. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 154–158. DOI: 10.7868/S0869565215320043
12. Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
13. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 96–117.
14. Ченцов А.Г. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 122–141. DOI: 10.20537/vm140410
15. Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.
16. Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник УГАТУ. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т. 13. № 2 (35). С. 280–286.
17. Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2013. Вып. 2 (169). С. 103–111.
18. Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. (Ред.) Энциклопедия элементарной математики. Книга 3. Функции и пределы. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. 559 с.
19. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
20. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
21. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2000. 960 с.
22. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016. 216 с.
23. Ченцов А.Г. Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 565–578. DOI: 10.20537/vm160410
24. Петунин А.А., Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Элементы динамического программирования в конструкциях локального улучшения эвристических решений задач маршрутизации с ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2017. № 4. С. 106–125.

Поступила в редакцию 16.08.2017

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;  
 профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.  
 E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
 E-mail: chentsov.a@binsys.ru

**A. G. Chentsov, A. A. Chentsov**

**A model variant of the problem about radiation sources utilization (iterations based on optimization insertions)**

**Citation:** *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 83–109 (in Russian).

*Keywords:* route, trace, preceding conditions, dynamic programming.

MSC2010: 97N40

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-08

The route problem about sequential dismantling of the system of radiating elements is considered. It is assumed that this problem has a sufficiently large dimension, this makes it difficult to find exact solutions and encourages the use of heuristics. It is assumed to use an optimizing insertions with a medium dimension for the improvement of quality of these heuristics, the broadly understood dynamic programming is used within the limits of these insertions. A localization of the insertion is defined with respect to use of preceding conditions. Functions of moving costs and (internal) tasks are connected with an utilization (dismantling) of the radiation sources and are allowed a dependence on the unperformed tasks list: there are radiating only for those sources which are not dismantled at the moment of this moving or performing the task. The exposure of each radiation source which is not dismantled on the personal is inversely to the square of the distance to the radiation source; it is need to integrate this nonlinear dependence for the estimation of the radiation impact at the final stage of movements. Impacts of different radiation sources are summed.

## REFERENCES

1. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. I: Theoretical issues, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
2. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. II: Exact methods, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms, *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
4. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations*, Springer US, 2007.  
DOI: 10.1007/b101971
5. Cook W.J. *In pursuit of the traveling salesman. Mathematics at the limits of computation*, Princeton University Press, 2012, 248 p. DOI: 10.1515/9781400839599
6. Bellman R. Application of dynamic programming method for the traveling salesman problem, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228 (in Russian).
7. Kheld M., Karp R.M. Application of dynamic programming method for the sorting problems, *Kibernet. Sb.*, Moscow: Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218 (in Russian).
8. Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research*, 1963, vol. 11, issue 6, pp. 972–989. DOI: 10.1287/opre.11.6.972
9. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), Moscow–Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2008, 240 p.
10. Sesekin A.N., Chentsov A.A., Chentsov A.G. A generalized courier problem with the cost function depending on the list of tasks, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2010, vol. 49, no. 2, pp. 234–243. DOI: 10.1134/S1064230710020097
11. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 685–688. DOI: 10.1134/S1064562415060083
12. Chentsov A.G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 4, pp. 728–744. DOI: 10.1134/S0005117914040122
13. Chentsov A.G., Chentsov P.A. Routing under constraints: problem of visit to megalopolises, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. DOI: 10.1134/S0005117916110060
14. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in the route problem with constraints and complicated cost functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 4, pp. 122–141 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140410
15. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* (Routing methods and their applications in problems of improving the safety and efficiency of operation of nuclear power plants), Moscow: Novye Tekhnologii, 2012, 234 p.

16. Petunin A.A. About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines, *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Upravlenie, Vychislitel'naya Tekhnika i Informatika*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), pp. 280–286 (in Russian).
17. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of the sheet cutting, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*, 2013, issue 2 (169), pp. 103–111 (in Russian).
18. Aleksandrov P.S., Markushevich A.I., Khinchin A.Ya. *Entsiklopediya elementarnoi matematiki. Kniga 3. Funktsii i predely* (Encyclopedia of Elementary Mathematics. Part 3. Functions and Limits), Moscow–Leningrad: GITTL, 1952, 559 p.
19. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967, xi+417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow: Mir, 1970, 416 p.
20. Dieudonne J. *Foundations of modern analysis*, New York: Academic Press, 2006, 408 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964, 430 p.
21. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. Introduction to algorithms (1st ed.), MIT Press and McGraw-Hill, 1990. Translated under the title *Algoritmy. Postroenie i analiz*, Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2000, 960 p.
22. Gimadi E.Kh., Khachai M.Yu. *Ekstremal'nye zadachi na mnozhestvakh perestanovok*, Yekaterinburg: UMC UPI, 2016, 216 p.
23. Chentsov A.G. The Bellmann insertions in the route problem with constraints and complicated cost functions. II, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 565–578. DOI: 10.20537/vm160410
24. Petunin A.A., Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Elements of dynamic programming in local improvement constructions for heuristic solutions of routing problems with constraints, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 4, pp. 666–681. DOI: 10.1134/S0005117917040087

Received 16.08.2017

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.  
 Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 600002, Russia.  
 E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksei Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.  
 E-mail: chentsov.a@binsys.ru