Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2019. Том 54. С. 63–73

УДК 517.977

© *В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, М. В. Першаков*

ОБ ОДНОМ ДОПОЛНЕНИИ К ОЦЕНКЕ Л. С. ПОНТРЯГИНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ МНОЖЕСТВ НА ПЛОСКОСТИ

В работе рассматриваются два обобщения выпуклых множеств на плоскости. Первым обобщением являются α-множества. Они представляют собой множества, которые допускают существование нескольких проекций на себя из произвольной точки на плоскости. Однако, эти проекции должны быть видны из этой точки под углом, не превышающим некоторого значения α. Второе обобщение представляет собой ослабление определения выпуклых множеств, согласно которому отрезок, соединяющий две точки выпуклого множества, также находится внутри него. Рассмотрены центрально симметричные множества, для которых это утверждение выполняется только для двух точек, лежащих по разные стороны некоторой заданной прямой. Для этих двух типов невыпуклых множеств рассмотрена задача нахождения максимального по площади подмножества. Решение данной задачи может быть полезно для нахождения субоптимальных решений задач оптимизации и, в частности, линейного программирования. Доказано обобщение оценки Понтрягина для геометрической разности α-множества и круга в $\mathbb{R}^2$. Кроме того, в качестве следствие приведено утверждение о том, что α-множество на плоскости обязательно содержит ненулевую точку с целочисленными координатами в случае, если его площадь превышает некоторое критическое значение. Это следствие представляет собой одно из обобщений теоремы Минковского для невыпуклых множеств.

Ключевые слова: α-множество, теорема Минковского, невыпуклое множество, выпуклое подмножество, геометрическая разность.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-06

Введение

α-Множества были введены в 2000-х годах учеными Института математики и механики УрО РАН для классификации множеств достижимости управляемых систем по степени их невыпуклости [1]. α-Множества являются одним из видов так называемых обобщенно выпуклых множеств. К таким множествам также относятся слабо и сильно выпуклые множества по Виалю и по Стечкину [2], линейно выпуклые множества в пространстве над полем комплексных чисел [3], α-паравыпуклые множества Э. Майкла [4], созданные на их основе функционально паравыпуклые множества [5] и другие.

Заметим, что многие обобщенно выпуклые множества имеют числовые меры невыпуклости, причем эти меры часто взаимосвязаны между собой. Например, в теореме 3.3.2 из [2, § 3.3] доказано соотношение между паравыпуклым множествами и слабо выпуклыми множествами, а в работе [6] установлена взаимосвязь между α-множествами и паравыпуклыми множествами Э. Майкла. А именно, в [6] доказано, что если рассматривать произвольное α-множество как $\hat{\alpha}$-паравыпуклое множество, то $\hat{\alpha} \geqslant 1 - \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Прикладная значимость в теории управления и актуальность изучения α-множеств также основывается на двух предположениях, что, во-первых, для некоторых управляемых систем степень невыпуклости α у множеств достижимости растет постепенно с течением времени (аналог теоремы 3.6.2 из [2, гл. 3, § 3.6]), а, во-вторых, α-множества обладают свойствами, полезными для решения задач (в качестве аналога можно отметить работы [7–9]).

Несмотря на то что первое предположение на данный момент не доказано, выявление класса таких управляемых систем не представляется принципиально сложным и может быть перспективным исследованием. Настоящая работа посвящена доказательству новых потенциально полезных свойств α-множеств, и ее основным результатом является доказательство того, что из любого α-множества $A \subset \mathbb{R}^2$ можно выделить выпуклое подмножество M, приближающееся к A при $\alpha \to 0$ как по площади, так и в хаусдорфовой метрике.

В качестве первого следствия этого результата доказан аналог одной оценки Л. С. Понтрягина [10, § 3, неравенство (1)] для α-множеств, в качестве второго следствия приведено обобщение теоремы Минковского (см., например, [11, гл. 2, § 5]) для α-множеств. Отметим, что второе следствие относится уже к геометрической теории чисел, и в качестве известных его аналогов можно отметить следующие результаты. Например, Малер [12] обобщил теорему Минковского на ограниченное выпуклое тело T с коэффициентом асимметрии σ и доказал, что если объем такого тела $V(T) > (1+\sigma)^n$, то T содержит по крайней мере одну ненулевую точку с целочисленными координатами. Однако, Сойер [13] с помощью применения теоремы Минковского к надлежащим образом выбранному подмножеству тела T показал, что условие $V(T) > (1+\sigma)^n$ можно заменить на более слабое условие $V(T) > (1+\sigma)^n\{1-(1-\sigma^{-1})^n\}$. Этот и другие результаты по обобщению теоремы Минковского более подробно описаны в [11, гл. 1, § 7; приложение к главе 7, § xviii.1])

В качестве дополнения в данной работе рассматривается задача выделения максимального по площади выпуклого подмножества из второго класса невыпуклых множеств, не относящихся к α-множествам, но сочетающая лаконичность описания и сложность решения.

§ 1. Основной результат

Далее мы будем использовать следующие стандартные обозначения [14].

Посредством $\operatorname{co} M$ обозначим выпуклую оболочку множества M,
$\langle x_*, x^* \rangle$ — скалярное произведение x_* и x^* из $\mathbb{R}^n$,
$||x_*|| = \langle x_*, x_* \rangle^{1/2}$ — стандартную норму (порожденную скалярным произведением) в евклидовом пространстве,
$\angle(x_*, x^*) = \arccos \dfrac{\langle x_*, x^* \rangle}{||x_*|| \cdot ||x^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами x_* и x^*,
$\operatorname{con} M = \{y = \lambda x : \lambda \geqslant 0, x \in M\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество M и с вершиной в нуле.

Через $r(A)$ обозначим внутренний радиус [15] множества M. Для произвольного множества M из линейного нормированного пространства он определяется следующим образом:

$$r(M) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in M} \inf_{\substack{T \subset M, \\ x \in \operatorname{co} T}} R(T),$$

где $R(T)$ — чебышевский радиус (см., например, [16]) множества T, который, в свою очередь, определяется как нижняя грань радиусов шаров, содержащих T.

Определение 1.1. Под проекцией p^* точки x^* на множество M мы понимаем ближайшую к x^* точку из M. Множество всех проекций точки x^* на множество M обозначим через $\Omega_M(z^*)$. Отметим, что множество проекций $\Omega_M(z^*)$ может быть несчетным для невыпуклого множества M или пустым для открытого множества M. Если $z^* \in M$, то $\Omega_M(z^*) = \{z^*\}$.

Определение 1.2. Пусть A — замкнутое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Через $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co} \Omega_A(z^*) - z^*)$ обозначим конус, натянутый на множество $\operatorname{co} \Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co} \Omega_A(z^*)\}$. Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$. Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Тогда множество A назовем α-множеством, где $\alpha = \alpha_A$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть A — α-множество ($\alpha < \pi$) в $\mathbb{R}^2$ с простой замкнутой кусочно-непрерывной границей границей ∂A.*

Тогда оно содержит выпуклое подмножество M, площадь которого

$$S_M \geqslant S_{\operatorname{co} A} - 2P_{\operatorname{co} A} \cdot r(A) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где $S_{\operatorname{co} A}$ — площадь выпуклой оболочки $\operatorname{co} A$, $P_{\operatorname{co} \Phi}$ — периметр $\operatorname{co} A$, $r(A)$ — внутренний радиус множества A [15].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} h(\partial A, \partial \operatorname{co} A)$, где $h(X, Y)$ — хаусдорфово отклонение множества X от множества Y. Из последнего ненумерованного соотношения

$$h(\partial M_\alpha, \partial \operatorname{co} M_\alpha) \leqslant \lambda(M_\alpha) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где $\lambda(M_\alpha)$ — диаметр α-множества M_α, в доказательстве [17, теорема 1] и [17, замечание 3] вытекает оценка

$$\varepsilon \leqslant 2 \cdot r(A) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \tag{1.1}$$

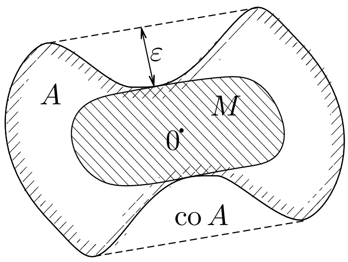

Рис. 1. Множество A и его выпуклое подмножество M

В качестве выпуклого подмножества $M \subset A$ определим следующее (рис. 1)

$$M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{co} A \mathbin{\dot{-}} B(0, \varepsilon).$$

Здесь $B(0, \varepsilon)$ — шар с центром в нуле и радиусом ε, $\operatorname{co} A \mathbin{\dot{-}} B(0, \varepsilon)$ — альтернированная разность множеств $\operatorname{co} A$ и $B(0, \varepsilon)$.

Кроме того, введем множество

$$H \overset{\text{def}}{=} (\operatorname{co} A) \backslash M.$$

С учетом оценки (1.1), можно оценить площадь множества H следующим образом:

$$S_H \leqslant \varepsilon P_{\operatorname{co} A} \leqslant 2P_{\operatorname{co} A} \cdot r(A) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$S_M = S_{\operatorname{co} A} - S_H \geqslant S_{\operatorname{co} A} - 2P_{\operatorname{co} A} \cdot r(A) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$\square$

§ 2. Приложения

В работе Л. С. Понтрягина [10, § 3, неравенство (1)] приведена следующая оценка для геометрической разности компактного выпуклого множества и шара:

$$h(V, V \dot{-} B(0,R)) \leqslant \frac{d(V)}{q(V)} \cdot R, \tag{2.1}$$

где $d(V) = \max\limits_{x,y \in V} ||x-y||$ — диаметр множества V, $q(V)$ — максимальное значение R, при котором $V \dot{-} B(0,R) \neq \varnothing$ или, иными словами, наибольший радиус шара, который можно вписать в V.

Используя теорему 1.1, мы можем получить такого рода оценки для α-множества A.

Л е м м а 2.1. *Пусть A — ограниченное α-множество в $\mathbb{R}^2$ с простой замкнутой кусочно-непрерывной границей и такое, что $q(A) - \varepsilon \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon = 2r(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Тогда в нем можно выделить выпуклое подмножество M, удовлетворяющее неравенству*

$$h(A, M) \leqslant \frac{d(\operatorname{co} A)}{q(\operatorname{co} A)} \cdot \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что поскольку любое α-множество по определению является замкнутым, то множество A является замкнутым и ограниченным множеством в конечномерном пространстве, что влечет за собой компактность A по известной теореме Гейне–Бореля.

Определим подмножество $M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{co} A \dot{-} B(0,\varepsilon)$ так же, как и в теореме 1.1.

Используя оценку Л. С. Понтрягина (2.1) для компакта $\operatorname{co} A$, построим следующую цепочку неравенств:

$$h(A, M) \leqslant h(\operatorname{co} A, M) \leqslant \frac{d(\operatorname{co} A)}{q(\operatorname{co} A)} \cdot \varepsilon.$$

□

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть A — ограниченное α-множество в $\mathbb{R}^2$ с простой замкнутой кусочно-непрерывной границей и такое, что $q(\operatorname{co} A) \geqslant 2\varepsilon$, где $\varepsilon = 2r(A)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. И пусть число $R \leqslant q(\operatorname{co} A) - \varepsilon$.*

Тогда

$$h(A, A \dot{-} B(0,R)) \leqslant \Big(1 - \frac{2\varepsilon}{q(\operatorname{co} A)}\Big)\frac{d(\operatorname{co} A)}{q(\operatorname{co} A) - \varepsilon} R.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим требуемую величину через сумму двух слагаемых следующим образом:

$$h(A, A \dot{-} B(0,R)) \leqslant h(A, M \dot{-} B(0,R)) \leqslant h(A, M) + h(M, M \dot{-} B(0,R)),$$

где $M = \operatorname{co} A \dot{-} B(0,\varepsilon)$.

В силу леммы 2.1 для первого слагаемого справедливо неравенство

$$h(A, M) \leqslant \frac{d(\operatorname{co} A)}{q(\operatorname{co} A)} \cdot \varepsilon.$$

Применяя оценку (2.1) для второго слагаемого, получаем, что

$$h(M, M \dot{-} B(0,R)) \leqslant \frac{d(M)}{q(M)} \cdot R.$$

Однако, если учесть, что, во-первых,

$$d(M) \geqslant d(\operatorname{co} A) - 2h(\operatorname{co} A, M) \geqslant d(\operatorname{co} A) - 2\frac{d(\operatorname{co} A)}{q(\operatorname{co} A)} \cdot \varepsilon = d(\operatorname{co} A)\Big(1 - \frac{2\varepsilon}{q(\operatorname{co} A)}\Big),$$

а, во-вторых,

$$q(M) = q(\operatorname{co}(A)) - \varepsilon,$$

то будем иметь соотношение в формулировке следствия. □

Выделение выпуклого подмножества также можно использовать в алгебраической геометрии, а именно, для доказательства существования точек с целочисленными координатами внутри некоторого множества.

Одной из ключевых теорем алгебраической геометрии является теорема Минковского [11, гл. 2, § 5]. Приведем ее формулировку.

Т е о р е м а 2.1 (Минковского). *Замкнутое центрально-симметричное выпуклое тело K в $\mathbb{R}^n$ с объемом $V(K) > 2^n$ содержит хотя бы одну ненулевую точку с целочисленными координатами.*

Под понятием тела здесь имеется ввиду следующее определение [11, гл. 1, § 1].

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество M такое, что $\operatorname{int} M \neq \varnothing$ и $M \subset \operatorname{cl}\operatorname{int} M$ будем называть *телом*.

О п р е д е л е н и е 2.2. Тело на плоскости будем называть фигурой.

Можно заметить, что если тело K не является выпуклым, но в нем можно выделить достаточно объемное выпуклое подмножество, то оно также будет содержать ненулевую точку с целочисленными координатами. Например, для α-множеств на плоскости теорему Минковского можно обобщить следующим образом.

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть*

(1) *фигура Φ — α-множество в $\mathbb{R}^2$ с простой замкнутой кусочно-непрерывной границей,*

(2) *выпуклая оболочка $\operatorname{co}\Phi$ — центрально симметричная фигура с центром в нуле,*

(3) $S_{\operatorname{co}\Phi} > 4 + 2P_{\operatorname{co}\Phi} \cdot r(\Phi) \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, *где $S_{\operatorname{co}\Phi}$ — площадь фигуры $\operatorname{co}\Phi$, $P_{\operatorname{co}\Phi}$ — периметр фигуры $\operatorname{co}\Phi$, $r(\Phi)$ — внутренний радиус Φ.*

Тогда фигура Φ содержит, помимо начала координат, хотя бы одну точку с целочисленными координатами.

§ 3. Дополнение

В дополнение рассмотрим задачу, поставленную чл.-корр. РАН В. Н. Ушаковым.

О п р е д е л е н и е 3.1. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ назовем выпуклым относительно прямой l, проходящей через него, если для любых двух точек из множества M, и лежащих по разные стороны от прямой l либо на самой прямой l, отрезок, соединяющий их, целиком лежит во множестве M.

Задача 1. Пусть центрально-симметричное относительно начала координат тело $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ является множеством выпуклым относительно некоторой прямой l, проходящей через начало координат. Требуется выделить выпуклое подмножество $M \subset \Phi$ наибольшей площади.

Для решения данной задачи требуется не только выделить выпуклое подмножество, но и доказать, что его площадь является максимальной. Однако, докажем лишь гораздо более слабое утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть замкнутая фигура $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ обладает следующими свойствами:*

(1) Φ *центрально симметрична относительно начала координат;*

(2) Φ *является выпуклой относительно некоторой прямой l, проходящей через начало координат.*

Тогда в Φ можно выделить выпуклое подмножество M площадью $S_M \geqslant \dfrac{1}{2}S_\Phi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать прямую l ориентированной условно слева направо по вектору $\vec{v}$, являющемуся направляющим вектором прямой l. Отметим точки $P_1 = \operatorname*{argmin}\limits_{P \in \mathrm{cl}\,\Phi \cap l} \left\langle \overrightarrow{OP}, \vec{v} \right\rangle$ и $P_2 = \operatorname*{argmax}\limits_{P \in \mathrm{cl}\,\Phi \cap l} \left\langle \overrightarrow{OP}, \vec{v} \right\rangle$, то есть, соответственно, самую левую и самую правую точки из множества $\mathrm{cl}\,\Phi \cap l$ (рис. 2).

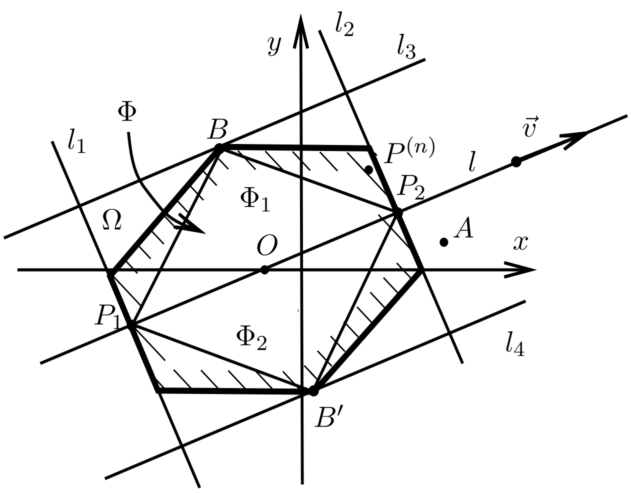

Рис. 2. Параллелограмм P_1BP_2B', лежащий полностью внутри фигуры Φ

Обозначим через Φ_1 те точки множества Φ, которые лежат левее прямой l, ориентированной по вектору $\vec{v}$, т.е. $\Phi_1 = \{P \in \Phi : \sin\angle\left(\overrightarrow{OP}, \vec{v}\right) > 0)\}$. Также введем второе множество $\Phi_2 = \Phi \backslash \{\Phi_1 \cup l\}$, которое находится по правую сторону от прямой l, ориентированной по направлению $\vec{v}$.

Каждой точке $P \in \Phi_1 \backslash l$ сопоставим угол $\angle(\overrightarrow{P_2P}, \vec{v})$. Обозначим через $\beta = \inf\limits_{P \in \Phi_1} \angle(P_2P, \vec{v})$. Проведем через точку P_2 прямую l_2 так, чтобы, во-первых, угол между прямыми l и l_2 был равен β, а, во-вторых, существовала последовательность точек $P^{(n)} \in \Phi_1$ таких, что $\angle(\overrightarrow{P^{(n)}P}, \vec{v}) \to \beta$ (чтобы исключить второе возможное положение прямой l_2).

Заметим, что таким образом проведенная прямая l_2 разделяет плоскость на две полуплоскости: одна полуплоскость содержит множество Φ, а вторая полуплоскость, наоборот, не содержит ни одной точки из Φ. Действительно, предположим, что во второй полуплоскости находится некоторая точка A из Φ. Если такая точка $A \in \Phi_1$, то сразу получаем противоречие с определением инфимума β. Если такая точка $A \in \Phi_2 \cup l$, то тогда выбрав точку $P^{(n)}$ с достаточно большим номером и соединив ее отрезком с точкой A, получим противоречие с тем, что P_2 — самая правая точка множества Φ на прямой l.

В силу центральной симметричности фигуры Φ через точку P_1 можно провести прямую l_1, центрально симметричную прямой l_2 относительно точки O и такую, что все множество Φ лежит по одну сторону от прямой l_1 (возможно, и на самой прямой l_1). Тем самым мы показали, что множество Φ лежит в полосе между параллельными прямыми l_1 и l_2.

Выберем из $\mathrm{cl}\,\Phi$ точку B, наиболее удаленную от прямой l. В силу условия (2) отрезок P_1P_2 и треугольник ΔP_1P_2B полностью лежит в Φ. Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно точки O. В силу центральной симметричности треугольник $\Delta P_1P_2B'$ также полностью лежит внутри фигуры Φ.

Проведем через точки B и B' прямые l_3 и l_4, параллельные прямой l. В силу выбора точки B фигура Φ полностью лежит внутри параллелограмма Ω, ограниченного прямыми l_1, l_2, l_3 и l_4. С другой стороны, параллелограмм $B'P_1BP_2$ полностью содержится в фигуре Φ, причем его площадь

$$S_{B'P_1BP_2} = \frac{1}{2}S_\Omega \geqslant \frac{1}{2}S_\Phi.$$

Здесь посредством S_Ω и S_Φ обозначены площади параллелограмма Ω и фигуры Φ соответственно. □

З а м е ч а н и е 1. Доказательство теоремы 3.1 раскрывает структуру фигуры Φ, выпуклой относительно прямой l. Построение фигуры Φ можно осуществить следующим образом. Выберем на прямой l точки P_1 и P_2. Затем очертим параллелограмм Ω, ограничивающий фигуру Φ. Тогда фигура Φ представляет собой возможно несчетное объединение треугольников $\Delta P_1B_kP_2$ и $\Delta P_1B'_kP_2$, где каждая точка B_k выбирается из параллелограмма Ω, точка B'_k симметрична точке B_k относительно начала координат O, а индекс k выбирается из некоторого возможно несчетного множества.

З а м е ч а н и е 2. Используя аффинное преобразование, не меняющее соотношения между площадями фигур на плоскости, параллелограмм Ω можно трансформировать в прямоугольник Ω'. Учитывая симметричность, можно прийти к выводу, что задача 1 эквивалентна сформулированной ниже задаче 2.

Задача 2. Пусть в полуполосе $ABCD$ с основанием BC и углами $\angle ABC = \angle BCD = \pi/2$ задана замкнутая фигура $F \subset \mathbb{R}^2$ такая, что для любой точки $X_1 \in F$ и любой точки $X_2 \in BC$ отрезок X_1X_2 целиком лежит в F (рис. 3). Требуется выделить выпуклое подмножество G наибольшей площади.

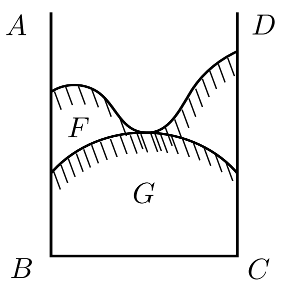

Рис. 3. Пример фигуры F и ее выпуклого подмножества G в полосе $ABCD$

З а м е ч а н и е 3. Из теоремы 3.1 следует, что из фигуры F в задаче 2 можно выделить подмножество G площадью не менее $\frac{1}{2}S_F$. Однако, по-видимому, это не является максимальной величиной для любой такой фигуры. С другой стороны, следующий пример (рис. 4) демонстрирует, что не для всех фигур F можно выделить выпуклое подмножество площадью более $\frac{2}{3}S_F$.

§ 4. Заключение

Нами была рассмотрена задача о выделении выпуклого подмножества наибольшей площади для двух видов невыпуклых множеств. Найденные подмножества, по-видимому, не являются максимальными по площади, и поэтому соответствующие оценки могут быть улучшены. Рассмотрены два применения решения данной задачи. Однако, отметим, что решение данной задачи имеет гораздо больше полезных применений в теории управления,

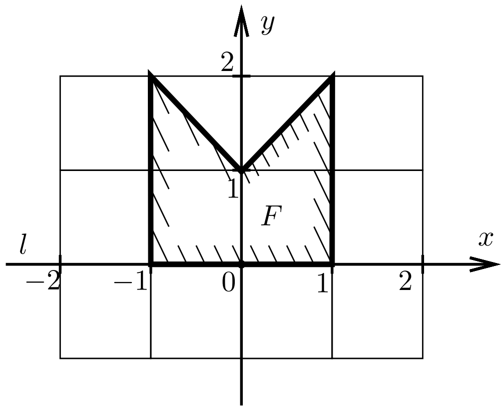

Рис. 4. Пример фигуры F, из которой невозможно выделить выпуклое подмножество площадью более $\dfrac{2}{3}S_F$

линейного программирования и оптимизации, что обуславливает интерес к ее решению в различных постановках. В качестве подходящего направления дальнейших исследований можно указать, например, использование полученной оценки геометрической разности для α-множеств в теории линейных дифференциальных игр, и, в частности, для обобщения результатов работы Л. С. Понтрягина [10] на случай невыпуклых начальных множеств.

Финансирование. Работа первого и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–01–00264_а. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–31–00018 мол_а. Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α-множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
2. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.
3. Зелинский Ю.Б. Выпуклость. Избранные главы. Киев: Институт математики НАН Украины, 2012. 280 с.
4. Ngai H.V., Penot J.-P. Paraconvex functions and paraconvex sets // Studia Mathematica. 2008. Vol. 184. No. 1. P. 1–29. https://doi.org/10.4064/sm184-1-1
5. Семенов П.В. Функционально паравыпуклые множества // Математические заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 74–81. http://mi.mathnet.ru/mz2452
6. Ершов А.А., Першаков М.В. О соотношении альфа-множеств с другими обобщениями // VI Информ. школа молодого ученого: сб. науч. тр. Екатеринбург, 2018. С. 143–150. https://doi.org/10.32460/ishmu-2018-6-0017
7. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и их свойства // Математические заметки. 2006. Т. 79. № 1. С. 60–86. https://doi.org/10.4213/mzm2674
8. Иванов Г.Е., Половинкин Е.С. Второй порядок сходимости алгоритма вычисления цены линейных дифференциальных игр // Доклады РАН. 1995. Т. 340. № 2. С. 151–154. http://mi.mathnet.ru/dan4573
9. Ivanov G.E., Golubev M.O. Strong and weak convexity in nonlinear differential games // IFAC-PapersOnline. 2018. Vol. 51. Issue 32. P. 13–18. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.345

10. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980. Т. 112 (154). № 3 (7). С. 307–330. http://mi.mathnet.ru/msb2728
11. Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. Геометрия чисел. М.: Наука, 2008. 728 с.
12. Mahler K. Ein Übertragunsprinzip für konvexe Kŏrper // Časopis Pěst. Mat. Fys. 1939. Vol. 68. P. 93–102.
13. Sawyer D.B. The lattice determinants of asymmetric convex regions // J. London Math. Soc. 1954. Vol. 29. P. 251–254.
14. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 438 с.
15. Starr R.M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences // Econometrica. 1969. Vol. 37. Issue 1. P. 25–38. https://doi.org/10.2307/1909201
16. Гаркави А.Л. О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 6. С. 139–145. http://mi.mathnet.ru/umn6276
17. Ушаков В.Н., Ершов А.А. Об оценке хаусдорфова расстояния между множеством и его выпуклой оболочкой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 223–235. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-223-235

Поступила в редакцию 06.10.2019

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, профессор, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич, к. ф.-м. н., научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
старший научный сотрудник, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: ale10919@yandex.ru

Першаков Максим Вадимович, студент, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;
математик, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: Mper192@yandex.ru

Цитирование: В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, М. В. Першаков. Об одном дополнении к оценке Л. С. Понтрягина геометрической разности множеств на плоскости // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 63–73.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov, M. V. Pershakov

On one addition to evaluation by L. S. Pontryagin of the geometric difference of sets in a plane

Keywords: α-set, Minkowski theorem, nonconvex set, convex subset, geometric difference.

MSC2010: 52A01, 11H16

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-06

In this paper, two generalizations of convex sets on the plane are considered. The first generalization is the concept of the α-sets. These sets allow for the existence of several projections onto them from an arbitrary point on the plane. However, these projections should be visible from this point at an angle not exceeding α. The second generalization is related to the definition of a convex set according to which the segment connecting the two points of the convex set is also inside it. We consider central symmetric sets for which this statement holds only for two points lying on the opposite sides of some given line. For these two types of nonconvex sets, the problem of finding the maximum area subset is considered. The solution to this problem can be useful for finding suboptimal solutions to optimization problems and, in particular, linear programming. A generalization of the Pontryagin estimate for the geometric difference of an α-set and a ball is proved. In addition, as a corollary, the statement that the α-set in the plane necessarily contains a nonzero point with integer coordinates if its area exceeds a certain critical value is given. This corollary is one of generalizations of the Minkowski theorem for nonconvex sets.

Funding. The study of the first and the third authors was funded by RFBR, project number 18–01–00264. The study of the second author was funded by RFBR, project number 18–31–00018. The work was funded by Act 211 of the Government of the Russian Federation, contract number 02.A03.21.0006.

REFERENCES

1. Uspenskii A.A., Ushakov V.N., Fomin A.N. *α-sets and their properties*, IMM UB RAS, Yekaterinburg, 2004. 62 p. Deposited in VINITI 02.04.2004, no. 543-B2004 (in Russian).
2. Ivanov G.E. *Slabo vypuklye mnozhestva i funktsii: teoriya i prilozheniya* (Weak convex sets and functions: theory and applications), Moscow: Fizmatlit, 2006.
3. Zelinskii Yu.B. *Vypuklost'. Izbrannye glavy* (Convexity. Selected chapters), Kiev: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 2012.
4. Ngai H.V., Penot J.-P. Paraconvex functions and paraconvex sets, *Studia Mathematica*, 2008, vol. 184, no. 1, pp. 1–29. https://doi.org/10.4064/sm184-1-1
5. Semenov P.V. Functionally paraconvex sets, *Mathematical Notes*, 1993, vol. 54, no. 6, pp. 74–81. https://doi.org/10.1007/BF01209085
6. Ershov A.A., Pershakov M.V. On matching up the alpha-sets with other generalizations of convex sets, *VI Information school of a young scientist*, Yekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2018, pp. 143–150 (in Russian). https://doi.org/10.32460/ishmu-2018-6-0017
7. Ivanov G.E. Weakly convex sets and their properties, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, issue 1-2, pp. 55–78. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0005-y
8. Ivanov G.E., Polovinkin E.S. Second-order convergence of an algorithm calculating the value of linear differential games, *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 51, no. 1, pp. 29–32.
9. Ivanov G.E., Golubev M.O. Strong and weak convexity in nonlinear differential games, *IFAC-PapersOnline*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 13–18. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.345
10. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. https://doi.org/10.1070/SM1981v040n03ABEH001815
11. Gruber P.M., Lekkerkerker C.G. *Geometry of numbers*, North-Holland, 1987.
12. Mahler K. Ein Übertragunsprinzip für konvexe Kŏrper, *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 1939, vol. 68, pp. 93–102.
13. Sawyer D.B. The lattice determinants of asymmetric convex regions *J. London Math. Soc.*, 1954, vol. 29, pp. 251–254.

14. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* (Elements of convex and strongly convex analysis), Moscow: Fizmatlit, 2007.
15. Starr R.M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences, *Econometrica*, 1969, vol. 37, issue 1, pp. 25–38. https://doi.org/10.2307/1909201
16. Garkavi A.L.On the Chebyshev center and convex hull of a set, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1964, vol. 19, no. 6, pp. 139–145 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/umn6276
17. Ushakov V.N., Ershov A.A. An estimate of the Hausdorff distance between a set and its convex hull in Euclidean spaces of small dimension, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, vol. 24, no. 1, pp. 223–235 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-223-235

Received 06.10.2019

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Professor, Chief Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ershov Aleksandr Anatol'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Senior Researcher, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ale10919@yandex.ru

Pershakov Maksim Vadimovich, Student, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Mathematician, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: Mper192@yandex.ru

Citation: V. N. Ushakov, A. A. Ershov, M. V. Pershakov. On one addition to evaluation by L. S. Pontryagin of the geometric difference of sets in a plane, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 63–73.