Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 55. С. 102–121

УДК 517.977

© *В. Е. Хартовский*

ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ АВТОНОМНОМ ДЕСКРИПТОРНОМ УРАВНЕНИИ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ. II. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА

В статье изучается линейное однородное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots,$$

с прямоугольными (в общем случае) матрицами B_i. Такое уравнение возникает при исследовании задач управления системами с многими соизмеримыми запаздываниями в управлении: задачи 0-управляемости, задачи синтеза регулятора типа обратной связи, обеспечивающего успокоение решения исходной системы, задачи модальной управляемости (управляемости коэффициентов характеристического квазиполинома), задачи спектральной приводимости и задачи синтеза наблюдателей для двойственной системы наблюдения. Основной метод представленного исследования базируется на замене исходного уравнения эквивалентным уравнением в «расширенном» пространстве состояний, которому сопоставили некоторый пучок матриц. Это позволило исследовать ряд структурных свойств исходного уравнения посредством использования канонической формы пучка матриц, а полученные результаты выразить в терминах минимальных индексов и элементарных делителей. В статье получен критерий существования нетривиального допустимого начального условия исходного уравнения, проверка которого основана на вычислении минимальных индексов и элементарных делителей пучка матриц. Изучена следующая задача: требуется построить решение исходного уравнения в виде $g(k+1) = T\psi(k+1)$, $k = 1, 2 \ldots$, где T — некоторая матрица, последовательность векторов $\psi(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет уравнению $\psi(k+1) = S\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, а квадратная матрица S имеет наперед заданный спектр (или часть спектра). Полученные результаты позволяют строить решения исходного дескрипторного уравнения с наперед заданными асимптотическими свойствами, например, равномерно асимптотически устойчивые.

Ключевые слова: линейное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем, подпространство начальных условий, представление решения, пучок матриц.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-08

Введение

Настоящая статья является второй частью работы [1], посвященной изучению линейного однородного автономного дескрипторного уравнения с дискретным временем

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{0.1}$$

где $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0, m}$, $g(k) \in \mathbb{R}^r$, $k = 1, 2, \ldots$. Интерес к такому уравнению возник в [2] в связи с исследованием задачи 0-управляемости, хотя в дальнейшем уравнение (0.1) было использовано и в других задачах управления линейными системами с последействием [1, 3–6].

Одна из основных сложностей при изучении уравнения (0.1) заключается в описании множества начальных условий, для которых уравнение (0.1) имеет решение, а также нахождение одного из решений, порождаемого некоторым начальным условием. В работе [1] предложен метод описания всех допустимых начальных условий, который основан на решении конечной цепочки линейных однородных алгебраических систем, а также дано описание всего множества решений, порождаемого заданным начальным условием. Основное достоинство разработанного в [1] подхода заключается в отсутствии необходимости приведения исходного уравнения (0.1) к какой-либо канонической форме.

В настоящей статье, в отличие от работы [1], на базе канонической формы матричного пучка изучаются структурные свойства этого уравнения. В частности, получено описание структуры матриц уравнения (0.1), имеющего нетривиальные решения, и предложен способ построения решений, удовлетворяющих некоторым заданным асимптотическим свойствам.

Другие подходы к исследованию дескрипторных уравнений можно найти, например, в [7–9].

§ 1. Предварительные сведения

Объект исследования — линейное автономное дескрипторное уравнение с дискретным временем

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{1.1}$$

и начальным условием

$$g(i) = \widetilde{g}_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.2}$$

где $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0,m}$, $g(k) \in \mathbb{R}^r$, $k = 1, 2, \ldots$; $\widetilde{g}_i \in \mathbb{R}^r$, $i = \overline{1,m}$, — некоторые заданные векторы. Считаем, что среди матриц B_i, $i = \overline{0,m}$, по крайней мере две отличны от нулевой матрицы, причем одна из них — это матрица B_0.

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *решением начальной задачи* (1.1), (1.2) будем понимать бесконечную последовательность векторов $g(k) \in \mathbb{R}^r,\ k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую соотношениям (1.1), (1.2).

Для некоторого заданного начального условия (1.2) решение начальной задачи (1.1), (1.2) может не существовать или оказаться не единственным. Набор векторов $\widetilde{g}_i$, $i = \overline{1,m}$, для которого существует решение задачи (1.1), (1.2), будем называть допустимым набором начальных значений для уравнения (1.1). Если $m = 1$, то будем просто говорить о допустимом начальном векторе.

Следуя [1], рассмотрим уравнение

$$\widehat{B}_0 \widehat{g}(k+1) + \widehat{B}_1 \widehat{g}(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{1.3}$$

с начальным условием

$$\widehat{g}(m) = \widehat{g}_0, \tag{1.4}$$

где

$$\widehat{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_{m-1} & B_m \\ -I_r & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -I_r & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

$I_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ — единичная матрица; $\widehat{g}_0 \in \mathbb{R}^{mr}$ — заданный вектор. Решение начальной задачи (1.3), (1.4) определяется так же, как и решение начальной задачи (1.1), (1.2).

Л е м м а 1.1 (см. [1, лемма 1]). *Если выполняется равенство*

$$\widehat{g}_0 = \operatorname{col}\big[\widetilde{g}_m, \ldots, \widetilde{g}_1\big], \tag{1.6}$$

то существование решения одной из начальных задач (1.1)*,* (1.2) *или* (1.3)*,* (1.4) *влечет существование решения другой начальной задачи и справедлива формула*

$$g(k) = \widehat{E}\widehat{g}(k), \quad k = m, m+1, \ldots,$$

где $\widehat{E} = [I_r, 0, \ldots, 0]$, $\widehat{E} \in \mathbb{R}^{r\times mr}$.

Пусть начальное условие для уравнения (1.3) задается соотношением (1.4). Тогда, в силу леммы 1.1, вектор $\widehat{g}_0$, определяемый формулой (1.6), является допустимым начальным вектором для уравнения (1.3) в том и только том случае, когда его компоненты $\widetilde{g}_i$ являются (с сохранением порядка следования) допустимым набором начальных значений для уравнения (1.1).

В силу линейности уравнения (1.3), множество его допустимых начальных векторов, которое обозначим $\mathbf{G}$, образует линейное подпространство в $\mathbb{R}^{mr}$. Если $\widehat{g}(m) \in \mathbf{G}$, то решение $\widehat{g}(k)$, $k = m, m+1, \ldots,$ уравнения (1.3) существует, и в силу автономности уравнения (1.3) векторы $\widehat{g}(k)$, $k = m, m+1, \ldots,$ принадлежат подпространству $\mathbf{G}$. На основании леммы 1.1 подпространство $\mathbf{G}$ дает полное описание всех допустимых наборов начальных значений для уравнения (1.1).

Пусть в подпространстве $\mathbf{G}$ задан некоторый базис. Введем матрицу $\widehat{T} \in \mathbb{R}^{rm\times r_0}$, где $r_0 = \dim \mathbf{G}$, в качестве столбцов которой возьмем векторы этого базиса. Тогда

$$\mathbf{G} = \widehat{T}\,\mathbb{R}^{r_0}.$$

В статье [1] предложен способ построения матрицы $\widehat{T}$, основанный на решении конечной цепочки линейных однородных алгебраических уравнений. При этом, если столбцы матрицы $\widehat{T}$ образуют базис подпространства $\mathbf{G}$, то, очевидно, столбцы матрицы $\widehat{T}C$, где C — произвольная невырожденная матрица, также образуют базис подпространства $\mathbf{G}$. Поэтому матрица $\widehat{T}$ определяется с точностью до постоянного невырожденного матричного множителя, на который матрица $\widehat{T}$ умножается справа.

З а м е ч а н и е 1. Из определения подпространства $\mathbf{G}$ вытекает критерий того, что столбцы произвольной матрицы образуют базис в подпространства $\mathbf{G}$. А именно, если $\dim \mathbf{G} = r_0$, то столбцы матрицы $\widetilde{T} \in \mathbb{R}^{rm\times r_0}$, $\operatorname{rank} \widetilde{T} = r_0$, образуют базис в подпространстве $\mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда множество допустимых начальных векторов уравнения

$$\widehat{B}_0\widetilde{T}\widehat{c}(k+1) + \widehat{B}_1\widetilde{T}\widehat{c}(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{1.7}$$

совпадает с пространством $\mathbb{R}^{r_0}$.

Пусть $\widehat{T}$ — любая, но фиксированная матрица, построенная указанным выше способом. Рассмотрим алгебраическое уравнение относительно неизвестной матрицы $S \in \mathbb{R}^{r_0\times r_0}$

$$\widehat{B}_0\widehat{T}S + \widehat{B}_1\widehat{T} = 0. \tag{1.8}$$

Л е м м а 1.2 (см. [1, лемма 2]). *Матрица S, удовлетворяющая уравнению* (1.8)*, существует.*

Разобьем матрицу $\widehat{T}$ на блоки $\widehat{T} = \operatorname{col}\big[T_1, \ldots T_m\big]$, где матрицы $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_0}$, $i = \overline{1, m}$, состоят из r строк матрицы $\widehat{T}$ с номерами $(i-1)r + 1$ по ir включительно, взятых с сохранением порядка их следования. Зафиксируем матрицу S — решение уравнения (1.8). Положим $T = T_m$, тогда равенство (1.8) можно переписать в виде системы равенств, соответствующих блочной структуре матриц $\widehat{B}_0$, $\widehat{B}_1$:

$$T_i = TS^{m-i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad B_0TS^m + \sum_{i=1}^{m} B_iTS^{m-i} = 0.$$

Т е о р е м а 1.1 (см. [1, теорема 1]). *Векторы* $\widetilde{g}_i$, $i = \overline{1,m}$, *образуют допустимый набор начальных значений для уравнения* (1.1) *тогда и только тогда, когда найдется вектор* $c \in \mathbb{R}^{r_0}$ *такой, что*

$$\widetilde{g}_i = TS^{i-1}c, \quad i = \overline{1,m}.$$

Т е о р е м а 1.2 (см. [1]). *Пусть в начальном условии* (1.2) *векторы* $\tilde{g}_i$ *имеют вид* $\widetilde{g}_i = TS^{i-1}c$, $i = \overline{1,m}$, *с некоторым* $c \in \mathbb{R}^{r_0}$. *Тогда любое решение начальной задачи* (1.1), (1.2) *представимо в виде*

$$g(k) = T\psi(k) + \mu(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.9}$$

где последовательность $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *определяется уравнением*

$$\psi(k+1) = S\psi(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \psi(1) = c, \tag{1.10}$$

а последовательность $\mu(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет уравнению* (1.1) *с нулевым начальным условием.*

§ 2. Критерий существования нетривиального решения начальной задачи

Изучим вопрос существования нетривиального решения задачи (1.1), (1.2), то есть последовательности векторов $g(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей (1.1), (1.2), у которой по крайней мере один член отличен от нулевого вектора. После этого дадим описание подпространства $\mathbf{G}$, указав его размерность и формулу для вычисления одной из возможных матриц $\widehat{T}$, столбцы которой представляют собой базисные векторы подпространства $\mathbf{G}$.

Для выяснения указанных вопросов перейдем от уравнения (1.1) к уравнению (1.3). После этого невырожденным преобразованием приведем матрицы $\widehat{B}_0$, $\widehat{B}_1$ к блочно диагональному виду, диагональные блоки которых имеют «упрощенную» структуру. В силу диагональной структуры полученных после преобразования матриц, исходное уравнение (1.3) будет равносильно конечной цепочке «достаточно простых» уравнений, исследование которых не представляет трудностей.

Для того чтобы одновременно привести пару матриц $\big(\widehat{B}_0, \widehat{B}_1\big)$ к блочно диагональному виду с максимально простой структурой диагональных блоков, заменим эту пару матриц так называемым пучком матриц $\widehat{B}(\lambda) = \lambda\widehat{B}_0 + \widehat{B}_1$ и воспользуемся возможностью приведения этого пучка матриц к каноническому виду [10, с. 331]. В связи с этим приведем некоторые понятия и факты, связанные с вопросами эквивалентности двух пучков матриц [10, с. 331].

Рассмотрим уравнение

$$\widehat{B}(\lambda)q(\lambda) = 0 \tag{2.1}$$

относительно вектора $q(\lambda)$. Ограничимся только теми решениями уравнения (2.1), которые, во-первых, являются полиномами, а во-вторых, среди этих решений рассматриваются только решения наименьшей степени. Под степенью решения $q(\lambda)$ уравнения (2.1) понимается наибольшая степень полиномов, являющихся компонентами вектора $q(\lambda)$.

Предположим, что имеется k нетривиальных решений этого уравнения $q_i(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$. Будем говорить, что решения $q_i(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$, линейно независимы, если

$$\operatorname{rank}[q_1(\lambda), \ldots, q_k(\lambda)] = k.$$

Напомним, что под рангом полиномиальной матрицы понимается [10, с. 335] наибольший порядок ее минора, отличного от тождественного нуля. Если же $\operatorname{rank}[q_1(\lambda), \ldots, q_k(\lambda)] < k$, то решения $q_i(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$, уравнения (2.1) будем называть линейно зависимыми. Обратим внимание, что линейная зависимость решений $q_i(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$, предполагает существование k одновременно не равных нулю скалярных многочленов $\xi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$, таких, что $\sum_{i=1}^{k} \xi_i(\lambda) q_i(\lambda) \equiv 0$.

Среди всех решений уравнения (2.1) выберем ненулевое решение $q_1(\lambda)$ минимальной степени α_1. Далее выберем ненулевое решение $q_2(\lambda)$ уравнения (2.1) минимальной степени α_2, линейно независимое с решением $q_1(\lambda)$. После этого выберем ненулевое решение $q_3(\lambda)$ уравнения (2.1) минимальной степени α_3, линейно независимое с решениями $q_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Будем осуществлять этот процесс до тех пор, пока это возможно. Так как число линейно независимых решений уравнения (2.1) конечно (ранг матрицы $[q_1(\lambda), \ldots, q_k(\lambda)]$ при любом k не может превышать количества ее строк), то этот процесс должен закончиться. На последнем шаге выберем ненулевое решение $q_s(\lambda)$ уравнения (2.1) минимальной степени α_s, линейно независимое с решениями $q_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s-1}$. Понятно, что $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_s$. Заметим, что выбранные решения $q_i(\lambda)$, $i = \overline{1,s}$, уравнения (2.1) могут определяться неоднозначно, но ряд степеней $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ всегда определяется однозначно. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ называются [10, с. 343] *минимальными индексами для столбцов* пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$.

Пусть числа $\beta_1, \ldots, \beta_l$ являются минимальными индексами для столбцов транспонированного пучка матриц $\bigl(\widehat{B}(\lambda)\bigr)^{\mathrm{T}}$. В этом случае числа $\beta_1, \ldots, \beta_l$ называются [10, с. 343] *минимальными индексами для строк* пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$.

Заметим, что уравнение (2.1) может не иметь нетривиальных решений. В этом случае говорят, что у пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$ нет минимальных индексов для столбцов. Если же у пучка матриц $\bigl(\widehat{B}(\lambda)\bigr)^{\mathrm{T}}$ отсутствуют минимальные индексы для столбцов, то у пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$ не будет минимальных индексов для строк.

Напомним, что *бесконечными элементарными делителями пучка матриц* $\widehat{B}(\lambda)$ называются [10, с. 333] элементарные делители вида μ^{γ_i} матрицы $\lambda\widehat{B}_0 + \mu\widehat{B}_1$. Под *конечными элементарными делителями пучка матриц* $\widehat{B}(\lambda)$ понимаются элементарные делители матрицы $\widehat{B}(\lambda)$.

Два матричных пучка $\widehat{B}(\lambda)$ и $\widetilde{B}(\lambda)$ называются строго эквивалентными, если существуют не зависящие от переменной λ невырожденные матрицы Γ_1, Γ_2 такие, что $\widehat{B}(\lambda) = \Gamma_1 \widetilde{B}(\lambda) \Gamma_2$. Известно [10, с. 344], что два пучка матриц строго эквивалентны тогда и только тогда, когда эти пучки матриц имеют одни и те же минимальные индексы для строк и для столбцов и одни и те же элементарные конечные и бесконечные элементарные делители.

Пусть пучок матриц $\widehat{B}(\lambda)$ имеет минимальные индексы для столбцов

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{\tau_1} = 0, \quad \alpha_{\tau_1+1}, \ldots, \alpha_s,$$

и минимальные индексы для строк

$$\beta_1 = \cdots = \beta_{\tau_2} = 0, \quad \beta_{\tau_2+1}, \ldots, \beta_l.$$

Если равные нулю минимальные индексы для столбцов или для строк отсутствуют, то считаем, что $\tau_1 = 0$ или $\tau_2 = 0$ соответственно. Обозначим γ_i, $i = \overline{1,p}$, — степени всех бесконечных элементарных делителей вида μ^{γ_i} пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$. Рассмотрим матрицу $K(\lambda)$ размера $(r(m-1)+n) \times mr$ (то есть такого же размера, что и матрица $\widehat{B}(\lambda)$), которая имеет вид

$$\begin{aligned} K(\lambda) = \operatorname{diag} \bigl[0, L_{\alpha_{\tau_1+1}}(\lambda), \ldots, L_{\alpha_s}(\lambda), (L_{\beta_{\tau_2+1}}(\lambda))^{\mathrm{T}}, \\ \ldots, (L_{\beta_l}(\lambda))^{\mathrm{T}}, N^{(\gamma_1)}(\lambda), \ldots, N^{(\gamma_p)}(\lambda), J(\lambda)\bigr], \quad (2.2) \end{aligned}$$

где нулевой блок, стоящий на первом месте матрицы в правой части (2.2), имеет размер $\tau_2 \times \tau_1$; матрица $L_i(\lambda)$ размера $i \times (i+1)$ имеет вид

$$L_i(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots;$$

$N^{(i)}(\lambda) = \lambda H^{(i)} + I_i$, $H^{(i)}$ — матрица размера $i \times i$, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, остальные элементы равны нулю; пучок матриц $J(\lambda)$ имеет вид $J(\lambda) = \lambda J_0 + J_1$, где J_0, J_1 — произвольные матрицы размера $\vartheta \times \vartheta$, но такие, что $|J_0| \neq 0$, а наборы конечных элементарных делителей пучков матриц $\widehat{B}(\lambda)$ и $J(\lambda)$ совпадают. Матрицы $L_i(\lambda)$ и $N^{(i)}(\lambda)$ не имеют конечных элементарных делителей, бесконечные элементарные делители имеют только блоки вида $N^{(i)}(\lambda)$. Матрица $K(\lambda)$ называется канонической формой пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$.

З а м е ч а н и е 2. В большинстве случае запись вида $\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_l]$ используется для обозначения блочно диагональной матрицы с квадратными диагональными блоками A_i (или просто диагональной матрицы, если A_i — некоторые скалярные величины). Однако в настоящей работе обозначение $\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_l]$ указывает на матрицу с блочно диагональной структурой, диагональные блоки A_i которой в общем случае могут быть прямоугольными.

З а м е ч а н и е 3. Если $\tau_1 = 0$, а $\tau_2 \neq 0$, то в матрице (2.2) первые τ_2 строк равны нулю, оставшиеся строки образуют блочно диагональную матрицу виду (2.2). Если же $\tau_1 \neq 0$, а $\tau_2 = 0$, то в матрице (2.2) первые τ_1 столбцов равны нулю, а оставшиеся столбцы также образуют блочно диагональную матрицу вида (2.2).

Известно [10, с. 342], что для любого пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$ существуют невырожденные матрицы Γ_1, Γ_2, приводящие этот пучок матриц к каноническому виду

$$\Gamma_1 \widehat{B}(\lambda) \Gamma_2 = K(\lambda). \tag{2.3}$$

Пусть имеет место (2.3). Тогда

$$\Gamma_1 \widehat{B}_0 \Gamma_2 = K_0, \quad \Gamma_1 \widehat{B}_1 \Gamma_2 = K_1, \tag{2.4}$$

где $K_1 = K(0)$, $K_0 = K(1) - K_1$ (то есть $K(\lambda) = K_0\lambda + K_1$). Введем матрицы

$$L_{i1} = L_i(0), \quad L_{i0} = L_i(1) - L_{i1}, \tag{2.5}$$

(то есть $L_i(\lambda) = \lambda L_{i0} + L_{i1}$) и рассмотрим уравнения

$$\big(L_{i0}\big)^{\mathrm{T}} g(k+1) + \big(L_{i1}\big)^{\mathrm{T}} g(k) = 0, \quad k = m, m+1, \dots, \tag{2.6}$$

$$H^{(i)} g(k+1) + g(k) = 0, \quad k = m, m+1, \dots. \tag{2.7}$$

Л е м м а 2.1. *Пространства решений уравнений* (2.6) *и* (2.7) *состоят только из нулевых векторов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение (2.6). Представим векторы $g(k)$, $k = 1$, $2, \dots$, в виде $g(k) = [g_1(k), \dots, g_i(k)]^{\mathrm{T}}$. Тогда уравнение (2.6) в координатной форме будет иметь вид

$$\begin{gathered} g_1(k+1) = 0, \quad g_2(k+1) + g_1(k) = 0, \quad \dots, \\ g_i(k+1) + g_{i-1}(k) = 0, \quad g_i(k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Из предпоследнего уравнения в (2.8) с учетом равенства $g_i(k+1) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что $g_{i-1}(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Продолжая эти рассуждения от $(i-1)$-го уравнения до второго уравнения системы (2.8), получим, что $g_j(k) = 0$, $j = \overline{1, i}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Если теперь переписать в координатной форме уравнение (2.7), то получим соотношения (2.8), только без первого уравнения. Проведя такие же рассуждения, приходим к завершению доказательства леммы. □

З а м е ч а н и е 4. Лемму 2.1 можно также доказать, если строить базис пространства решений из уравнений (2.6) и (2.7) по методу статьи [1].

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из следующих условий:*

(a) *пучок* $\widehat{B}(\lambda)$ *имеет минимальные индексы для столбцов;*

(b) *пучок* $\widehat{B}(\lambda)$ *имеет конечные элементарные делители.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрицы Γ_1, Γ_2 реализуют равенство (2.3). В уравнении (1.3) сделаем замену $\widehat{g}(k) = \Gamma_2 \widetilde{g}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, и умножим полученное соотношение на матрицу Γ_1 слева. Тогда последовательность векторов $\widetilde{g}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, в силу (2.4) удовлетворяет уравнению

$$K_0 \widetilde{g}(k+1) + K_1 \widetilde{g}(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots. \tag{2.9}$$

Очевидно, что существование нетривиального решения уравнения (1.3) равносильно существованию нетривиального решения уравнения (2.9), поэтому далее ограничимся исследованием уравнения (2.9). В векторе $\widetilde{g}(k)$ выделим векторные компоненты, соответствующие блокам матрицы (2.2):

$$\begin{gathered} \widetilde{g}(k) = \operatorname{col}\big[\widetilde{g}_{\tau_1}(k), \widetilde{g}_{\alpha_{\tau_1+1}}(k), \ldots, \widetilde{g}_{\alpha_s}(k), \widetilde{g}_{\beta_{\tau_2+1}}(k), \ldots, \\ \widetilde{g}_{\beta_l}(k), \widetilde{g}_{\gamma_1}(k), \ldots, \widetilde{g}_{\gamma_p}(k), \widetilde{g}_J(k)\big], \\ k = m, m+1, \ldots, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $\widetilde{g}_{\tau_1}(k) \in \mathbb{R}^{\tau_1}$, $\widetilde{g}_{\alpha_i}(k) \in \mathbb{R}^{\tau_i+1}$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, $\widetilde{g}_{\beta_i}(k) \in \mathbb{R}^{\beta_i}$, $i = \overline{\tau_2+1, l}$, $\widetilde{g}_{\gamma_i}(k) \in \mathbb{R}^{\gamma_i}$, $i = \overline{1, p}$, $\widetilde{g}_J(k) \in \mathbb{R}^{\vartheta}$. Для нахождения векторных компонент (2.10) заменим уравнение (2.9) в соответствии с блочной структурой матриц K_0, K_1 следующей системой уравнений

$$L_{\alpha_i 0} \widetilde{g}_{\alpha_i}(k+1) + L_{\alpha_i 1} \widetilde{g}_{\alpha_i}(k) = 0, \quad i = \overline{\tau_1+1, s}, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{2.11}$$

$$\big(L_{\beta_i 0}\big)^{\mathrm{T}} \widetilde{g}_{\beta_i}(k+1) + \big(L_{\beta_i 1}\big)^{\mathrm{T}} \widetilde{g}_{\beta_i}(k) = 0, \ i = \overline{\tau_2+1, l}, \ k = m, m+1, \ldots, \tag{2.12}$$

$$H^{(\gamma_i)} \widetilde{g}_{\gamma_i}(k+1) + \widetilde{g}_{\gamma_i}(k) = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{2.13}$$

$$J_0 \widetilde{g}_J(k+1) + J_1 \widetilde{g}_J(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots. \tag{2.14}$$

Отметим, что в качестве векторной компоненты $\widetilde{g}_{\tau_1}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, (если $\tau_1 \neq 0$) можно взять любые векторы подходящего размера.

Проанализируем уравнения (2.11)–(2.14). В силу леммы 2.1 пространства решений уравнений (2.12) и (2.13) состоят только из нулевых векторов. Поэтому уравнения (2.12) и (2.13) имеют только тривиальное решение при нулевых начальных условиях $\widetilde{g}_{\beta_i}(m) = 0$, $i = \overline{\tau_2+1, l}$, $\widetilde{g}_{\gamma_i}(m) = 0$, $i = \overline{1, p}$. Уравнения (2.11) и (2.14) разрешимы при любых начальных условиях $\widetilde{g}_{\alpha_i}(m)$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, $\widetilde{g}_J(m)$, поскольку ранги каждой из матриц $L_{\alpha_i 0}$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, и J_0 равны количеству ее строк. Действительно, в данном случае у каждой из матриц $L_{\alpha_i 0}$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, и J_0 всегда можно выбрать базисный минор, порядок которого равен количеству строк соответствующей матрицы. Поэтому каковы бы ни были векторы $\widetilde{g}_{\alpha_i}(k)$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, $\widetilde{g}_J(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, всегда найдутся векторы $\widetilde{g}_{\alpha_i}(k+1)$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, $\widetilde{g}_J(k+1)$, являющиеся решениями алгебраических уравнений (2.11) и (2.14) относительно неизвестных векторов $\widetilde{g}_{\alpha_i}(k+1)$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, $\widetilde{g}_J(k+1)$. Далее для уравнений (2.11)–(2.14) будем рассматривать только допустимые начальные условия, причем считаем, что для уравнений (2.11) и (2.14) начальные условия являются ненулевыми.

Пусть выполняется условие (a) теоремы 2.1. Тогда в матрице (2.2) присутствуют нулевые столбцы (если $\tau_1 \neq 0$) или блоки вида $L_{\alpha_i}(\lambda)$ (или и то, и другое). Если выполняется условие (b), то в матрице (2.2) имеется блок $J(\lambda)$.

Если $\tau_1 \neq 0$, то одно из решений $\widetilde{g}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, уравнения (2.9) можно получить, если в представлении (2.10) взять в качестве компонент $\widetilde{g}_{\tau_1}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, произвольные ненулевые векторы, а остальные векторные компоненты в (2.10) положить равными нулю. Если в матрице $K(\lambda)$ присутствуют блоки $L_{\alpha_i}(\lambda)$, $i = \overline{\tau_1+1, s}$, то каждому из них будет соответствовать нетривиальное решение $\widetilde{g}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, уравнения (2.9), у которого в представлении (2.10) векторные компоненты $\widetilde{g}_{\alpha_i}(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, есть решение уравнения (2.11), а остальные векторные компоненты равны нулю. Если в матрице $K(\lambda)$ присутствует блок $J(\lambda)$, то в качестве нетривиального решения $\widetilde{g}(k)$, $k = m$, $m+1$, $\ldots$, уравнения (2.9) можно взять векторы, у которых в представлении (2.10) векторные компоненты $\widetilde{g}_J(k)$, $k = m, m+1, \ldots$, есть решение уравнения (2.14), а остальные равны нулю.

Теперь предположим, что ни одно из условий (a) и (b) теоремы 2.1 не выполняются. Тогда в матрице (2.2) нет нулевых столбцов и блоков вида $L_{\alpha_s}(\lambda)$, $J(\lambda)$. В этом случае уравнение (2.9) равносильно уравнениям (2.12), (2.13), которые могут иметь только тривиальные решения при нулевых начальных условиях. Теорема доказана. □

Из представления уравнения (2.9) в виде (2.11)–(2.14) следует, что уравнение (1.3) разрешимо при любом начальном условии (1.4) в том и только том случае, когда в канонической форме $K(\lambda)$ отсутствуют блоки вида $\big(L_i(\lambda)\big)^{\mathbb{T}}$ и $N^{(i)}(\lambda)$, что равносильно отсутствию ненулевых минимальных индексов для строк и бесконечных элементарных делителей пучка матриц. Действительно, в силу блочной структуры матрицы $K(\lambda)$, уравнение (1.3) равносильно в этом случае системе уравнений (2.11), (2.14). Сформулируем это утверждение в терминах, не требующих приведения пучка матриц к каноническому виду.

С л е д с т в и е 2.1. *Множество допустимых векторов уравнения* (1.3) *совпадает со всем пространством* $\mathbb{R}^{rm}$ (*то есть* $\mathbf{G} = \mathbb{R}^{rm}$) *тогда и только тогда, когда пучок матриц* $\widehat{B}(\lambda)$ *не имеет ненулевых минимальных индексов для строк и бесконечных элементарных делителей.*

З а м е ч а н и е 5. Следствие 2.1 дает идею для построения одной из возможных матриц $\widehat{T}$ в случае, когда пучок матриц $\widehat{B}(\lambda)$ имеет каноническую форму (2.2), то есть $\widehat{B}(\lambda) = K(\lambda)$. В соответствии с замечанием 1 уравнение

$$K_0\widehat{T}\widehat{c}(k+1) + K_1\widehat{T}\widehat{c}(k+1) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{2.15}$$

должно быть разрешимо при любом векторе $\widehat{c}(m)$. То есть уравнение (2.15) должно быть равносильно системе уравнений вида (2.11) и (2.14). Поэтому матрицу $\widehat{T}$ можно выбрать так, чтобы в результате умножения матриц $K(\lambda)$ и $\widehat{T}$ образовалась матрица, которая получается из матрицы $K(\lambda)$ путем удаления у нее столбцов, содержащих элементы блоков вида $\big(L_i(\lambda)\big)^{\mathbb{T}}$ и $N^{(i)}(\lambda)$. Перенесем эту идею на общий случай и дадим точную формулировку.

Рассмотрим соотношение (2.3), приводящее пучок матриц $\widehat{B}(\lambda)$ к каноническому виду (2.2). Составим матрицу $\widehat{T}_{\Gamma}$ вида

$$\widehat{T}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} I_{\theta_1} & 0_{\theta_1\times\vartheta} \\ 0_{\theta_2\times\theta_1} & 0_{\theta_2\times\vartheta} \\ 0_{\vartheta\times\theta_1} & I_{\vartheta} \end{bmatrix},$$

где $0_{i\times j}$ обозначает нулевой блок размера $i\times j$, $\theta_1 = \tau_1 + s + \alpha_{\tau_1+1} + \ldots + \alpha_s$ — сумма количеств столбцов всех матриц вида $L_i(\lambda)$, $\theta_2 = \beta_{\tau_2+1} + \ldots + \beta_l + \gamma_1 + \ldots + \gamma_p$ — сумма количеств столбцов всех матриц вида $\big(L_i(\lambda)\big)^{\mathrm{T}}$ и $N^{(i)}(\lambda)$.

С л е д с т в и е 2.2. *В качестве матрицы $\widehat{T}$ можно взять матрицу $\widehat{T} = \Gamma_2\widehat{T}_{\Gamma}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица $K(\lambda)\widehat{T}_{\Gamma}$ получается из матрицы $K(\lambda)$, если в последней удалить столбцы, содержащие элементы блоков $\big(L_{\beta_i}(\lambda)\big)^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{\tau_2+1, l}$, и $N^{(\gamma_i)}(\lambda)$, $i = \overline{1,p}$. Поэтому, согласно следствию 2.1, уравнение

$$K_0\widehat{T}_{\Gamma}\widehat{c}(k+1) + K_1\widehat{T}_{\Gamma}\widehat{c}(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots, \tag{2.16}$$

разрешимо при любом начальном векторе $\widehat{c}(m) \in \mathbb{R}^{rm}$. На основании формул (2.4) уравнение (2.16) запишем в виде

$$\Gamma_1\widehat{B}_0\Gamma_2\widehat{T}_{\Gamma}\widehat{c}(k+1) + \Gamma_1\widehat{B}_1\Gamma_2\widehat{T}_{\Gamma}\widehat{c}(k) = 0, \quad k = m, m+1, \ldots$$

Умножив слева полученное соотношение на матрицу Γ_1^{-1}, приходим к уравнению (1.7), которое будет разрешимо при любом начальном векторе $\widehat{c}(m) \in \mathbb{R}^{rm}$. Обращение к замечанию 1 завершает доказательство. $\square$

Размерность пространства $\mathbf{G}$ совпадает с количеством столбцов матрицы $\widehat{T}$ (или, что то же самое, с количеством столбцов матрицы $\widehat{T}_{\Gamma}$). Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

С л е д с т в и е 2.3. *Размерность r_0 подпространства $\mathbf{G}$ есть разность между количеством столбцов пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$ и суммой всех его ненулевых индексов для строк и всех его степеней бесконечных элементарных делителей: $r_0 = mr - \theta_2$ (или, что то же самое, $r_0 = \theta_1 + \vartheta$).*

Введем матрицу $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i}B_i$. Для того чтобы при вычислении минимальных индексов пучка матриц $\widehat{B}(\lambda)$ уменьшить размерности решаемых уравнений, представляется полезным следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.2. 1) *Любое решение $q(\lambda)$ уравнения* (2.1) *представимо в виде* $q(\lambda) = \operatorname{col}\big[\lambda^{m-1}I_r, \lambda^{m-2}I_r, \ldots, I_r\big]\widetilde{q}(\lambda)$, *где* $\widetilde{q}(\lambda) = \operatorname{col}[\widetilde{q}_1(\lambda), \ldots, \widetilde{q}_r(\lambda)]$ — *векторный полином, удовлетворяющий уравнению*

$$B(\lambda)\widetilde{q}(\lambda) = 0.$$

2) *Любое решение $g(\lambda)$ уравнения $g(\lambda)\widehat{B}(\lambda) = 0$ представимо в виде*

$$g(\lambda) = \widetilde{g}(\lambda)\,\big[I_n,\ B_0\lambda + B_1,\ B_0\lambda^2 + B_1\lambda + B_2, \ldots, B_0\lambda^{m-1} + B_1\lambda^{m-2} + \cdots + B_{m-1}\big],$$

где $\widetilde{g}(\lambda) = [\widetilde{g}_1(\lambda), \ldots, \widetilde{g}_n(\lambda)]$ — *векторный полином, удовлетворяющий уравнению*

$$\widetilde{g}(\lambda)B(\lambda) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую часть теоремы 2.2. Вектор решения $q(\lambda)$ уравнения (2.1) представим в виде $q(\lambda) = \operatorname{col}[q_1(\lambda), \ldots, q_m(\lambda)]$, где $q_i(\lambda)$ — r-векторные многочлены. Тогда, в силу блочной структуры матриц (1.5), уравнение (2.1) равносильно m уравнениям

$$\begin{gathered}\big(\lambda B_0 + B_1\big)q_1(\lambda) + B_2q_2(\lambda) + \cdots + B_mq_m(\lambda) = 0,\\ \lambda q_2(\lambda) - q_1(\lambda) = 0,\\ \ldots\\ \lambda q_m(\lambda) - q_{m-1}(\lambda) = 0.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Положим $q_m(\lambda) = \widetilde{q}(\lambda)$. Тогда последнее уравнение в (2.17) равносильно тому, что $q_{m-1}(\lambda) = \lambda\widetilde{q}(\lambda)$. Предпоследнее уравнение в (2.17) равносильно тому, что $q_{m-2}(\lambda) = \lambda q_{m-1}(\lambda) = \lambda^2\widetilde{q}(\lambda)$, и так далее. Продолжая эти рассуждения получим, что последние $m-1$ уравнений системы (2.17) равносильны соотношениям $q_{m-i}(\lambda) = \lambda^i\widetilde{q}(\lambda)$, $i = \overline{0, m-1}$. Подставляя $q_{m-i}(\lambda)$, $i = \overline{0, m}$, в первое уравнение системы (2.17), приходим к утверждению теоремы.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 2.2. Уравнение $g(\lambda)\widehat{B}(\lambda) = 0$ запишем в виде системы уравнений, советующих блочной структуре матрицы $\widehat{B}(\lambda)$:

$$g_1\big(B_0 + \lambda B_1\big) = g_2, \quad g_1B_2 + \lambda g_2 = g_3, \ \ldots, \ g_1B_{m-1} + \lambda g_{m-1} = g_m, \quad g_1B_m + \lambda g_m = 0,$$

где g_i — векторные компоненты вектора g, то есть $g = [g_1, \ldots, g_m]$. Далее, применив к выписанной системе уравнений рассуждения такого же типа, что и при доказательстве первой части теоремы, придем к справедливости доказываемого утверждения. □

§ 3. Собственные значения матрицы S

На протяжении настоящего параграфа считаем, что зафиксирован произвольный базис подпространства **G**, на базе которого построена некоторая матрица $\widehat{T}$. Рассмотрим формулы (1.9), (1.10). Асимптотическое поведение последовательности векторов $\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, зависит от собственных значений матрицы S, найденной из уравнения (1.8). В общем случае матрица S может определяться неоднозначно. Соответственно и решение начальной задачи (1.1), (1.2) также будет не единственным. Однако при решении некоторых задач управления и наблюдения динамическими системами с запаздыванием матрица S может определять структурные свойства соответствующих регуляторов и наблюдателей [3–6]. Поэтому возникает задача выбора матрицы S, позволяющей получить одно из решений начальной задачи (1.1), (1.2), которое удовлетворяет некоторому заданному асимптотическому свойству, зависящему от собственных значений матрицы S. Ниже приводятся результаты исследования этого вопроса.

Если матрица $\widehat{T}$ равна нулю, то S — любая матрица размера $r_0 \times r_0$ и в дальнейшем исследовании этого случая необходимости нет. Поэтому далее считаем, что $\widehat{T} \neq 0$.

Рассмотрим пару матриц $\Big(\widehat{B}_0\widehat{T}, \ \widehat{B}_1\widehat{T}\Big)$, в соответствие которой поставим пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda) = \lambda\widehat{B}_0\widehat{T} + \widehat{B}_1\widehat{T}$.

Л е м м а 3.1. *Пусть матрица $\widehat{T}$ не равна нулю. Тогда пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ строго эквивалентен пучку матриц*

$$\widetilde{K}(\lambda) = \mathrm{diag}\Big[0, L_{\delta_p}(\lambda), \ldots, L_{\delta_{p+d}}(\lambda), \widetilde{J}(\lambda)\Big], \tag{3.1}$$

где размеры нулевого блока, стоящего на первом месте матрицы в правой части (3.1)*, соответствуют количеству нулевых минимальных индексов пучка $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$; вид матриц $L_i(\lambda)$ описан ранее; $\widetilde{J}(\lambda) = \lambda\widetilde{J}_0 + \widetilde{J}_1$, матрицы $\widetilde{J}_i$, $i = 0, 1$, являются квадратными, причем* $|\widetilde{J}_0| \neq 0$; *числа δ_i, $i = \overline{p, p+d}$, — минимальные не равные нулю индексы для столбцов пучка матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$* (*некоторые из блоков в представлении* (3.1) *могут отсутствовать*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [10, с. 342], существуют невырожденные матрицы Γ_3, Γ_4, приводящие пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ к каноническому виду: $\Gamma_3\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)\Gamma_4 = \widetilde{K}(\lambda)$. Матрица $\widetilde{K}(\lambda)$ в общем случае имеет вид

$$\begin{gathered}\widetilde{K}(\lambda) = \mathrm{diag}\big[0, L_{\delta_p}(\lambda), \ldots, \\ L_{\delta_{p+d}}(\lambda), (L_{\zeta_w}(\lambda))^{\mathrm{T}}, \ldots, (L_{\zeta_{w+z}}(\lambda))^{\mathrm{T}}, N^{(\xi_1)}(\lambda), \ldots, N^{(\xi_s)}(\lambda), \widetilde{J}(\lambda)\big],\end{gathered} \tag{3.2}$$

где ζ_i, $i=\overline{w,w+z}$, — минимальные не равные нулю индексы для строк пучка $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$, матрицы $N^{(i)}(\lambda)$ описаны ранее, ξ_i, $i=\overline{1,s}$, — степени всех бесконечных элементарных делителей вида μ^{ξ_i} пучка $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$, остальные обозначения указаны при описании формулы (3.1). Предположим, что множество индексов $\{\zeta_w,\dots,\zeta_{w+z},\xi_1,\dots,\xi_s\}$ не является пустым.

Рассмотрим уравнение (1.8). Согласно лемме 1.2 это уравнение всегда имеет решение. Пусть S — любое фиксированное решение уравнения (1.8). Обозначим

$$\widetilde{S}=\Gamma_4^{-1}S\Gamma_4 \tag{3.3}$$

и рассмотрим упорядоченный набор квадратных диагональных блоков матрицы $\widetilde{S}$

$$\big(\widetilde{S}_0,\widetilde{S}_{\delta_p},\dots,\widetilde{S}_{\delta_{p+d}},\widetilde{S}_{\zeta_w},\dots,\widetilde{S}_{\zeta_{w+z}},\widetilde{S}_{\xi_1},\dots,\widetilde{S}_{\xi_s},\widetilde{S}_{\widetilde{J}}\big), \tag{3.4}$$

соответствующих блокам матрицы (3.2):

$$0,\ L_{\delta_p}(\lambda),\dots,L_{\delta_{p+d}}(\lambda),(L_{\zeta_w}(\lambda))^{\mathrm{T}},\dots,(L_{\zeta_{w+z}}(\lambda))^{\mathrm{T}},N^{(\xi_1)}(\lambda),\dots,N^{(\xi_s)}(\lambda),\widetilde{J}(\lambda)$$

(то есть размеры блоков (3.4) совпадают с количествами столбцов диагональных блоков матрицы (3.2)). Заметим, что матрица $\widetilde{S}$ в общем случае может не иметь блочно диагональной структуры. Однако блоки матрицы $\widetilde{S}$, отличные от диагональных, для дальнейшего доказательства не нужны.

Обозначим

$$\widetilde{K}_1=\widetilde{K}(0),\quad \widetilde{K}_0=\widetilde{K}(1)-\widetilde{K}_1 \tag{3.5}$$

(то есть $\widetilde{K}(\lambda)=\lambda\widetilde{K}(0)+\widetilde{K}(1)$). Из существования матрицы S следует, что имеет место равенство

$$\widetilde{K}_0\widetilde{S}+\widetilde{K}_1=0. \tag{3.6}$$

Матрицы $\widetilde{K}_0$ и $\widetilde{K}_1$ имеют блочно диагональную структуру. Поэтому из соотношения (3.6) следует система равенств (заметим, что обратная импликация в общем случае неверна)

$$\begin{gathered} L_{\delta_i0}\widetilde{S}_{\delta_i}+L_{\delta_i1}=0,\quad i=\overline{p,p+d},\quad \big(L_{\zeta_i0}\big)^{\mathrm{T}}\widetilde{S}_{\zeta_i}+\big(L_{\zeta_i1}\big)^{\mathrm{T}}=0,\quad i=\overline{w,w+z},\\ H^{(\xi_i)}\widetilde{S}_{\xi_i}+I_{\xi_i}=0,\quad i=\overline{1,s},\quad \widetilde{J}_0\widetilde{S}_{\widetilde{J}}+\widetilde{J}_1=0, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где матрицы L_{δ_i0}, L_{δ_i1} в формулах (3.7) определены соотношениями (2.5), остальные обозначения описаны после формулы (2.2). Однако ни при каких матрицах $\widetilde{S}_i$ равенства вида

$$\big(L_{i0}\big)^{\mathrm{T}}\widetilde{S}_i+\big(L_{i1}\big)^{\mathrm{T}}=0,\quad i\in\{\zeta_w,\dots,\zeta_{w+z}\},\quad H^{(i)}\widetilde{S}_i+I_i=0,\quad i\in\{\xi_1,\dots,\xi_s\},$$

в (3.7) выполняться не могут, поскольку у матриц $\big(L_{i0}\big)^{\mathrm{T}}$ и $H^{(i)}$ последние строки нулевые, а у матриц $\big(L_{i1}\big)^{\mathrm{T}}$ и I_i последние строки нулевыми не являются. Получили противоречие с утверждением о том, что матрица $\widetilde{S}$, а вместе с ней и матрица S, существуют. Поэтому из существования матрицы S следует, что множество индексов $\{\zeta_w,\dots,\zeta_{w+z},\xi_1,\dots,\xi_s\}$ является пустым. А это значит, что в канонической форме пучка $\widetilde{K}(\lambda)$ отсутствуют блоки вида $(L_i(\lambda))^{\mathrm{T}}$, $N^{(i)}(\lambda)$. То есть каноническая форма пучка $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеет вид (3.1). Лемма 3.1 доказана. □

З а м е ч а н и е 6. Обратим внимание, что доказательство леммы 3.1 было основано на существовании решения матричного уравнения (1.8). Однако лемму 3.1 можно доказать иным способом, опираясь на теорему 2.1 и следствие 2.2. Для этого необходимо привести пучок матриц $\widehat{B}(\lambda)$ к каноническому виду $K(\lambda)$, определяемому формулой (2.2), затем умножить полученную матрицу $K(\lambda)$ на матрицу $\widehat{T}_\Gamma$. После этого, на основании доказательства следствия 2.2, остается только переставить строки полученной матрицы $K(\lambda)\widehat{T}_\Gamma$ так, чтобы результатом этого преобразования стала матрица такого же вида, что и матрица $\widetilde{K}(\lambda)$. В этом случае будут выполняться равенства $\alpha_{\tau_1+1} = \delta_p, \ldots, \alpha_s = \delta_{p+d}$. Кроме этого, пучки матриц $J(\lambda)$ и $\widetilde{J}(\lambda)$ будут строго эквивалентными.

З а м е ч а н и е 7. Из леммы 3.1 следует, что если $\widehat{T} \neq 0$, а матричный пучок $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеет минимальные индексы для строк, то эти индексы равны нулю. Бесконечных элементарных делителей матричный пучок $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ иметь не может.

Из доказательства следствия 2.2 понятно, что умножение матрицы $K(\lambda)$ на матрицу $\widehat{T}_{\Gamma}$ «удаляет» у матрицы $K(\lambda)$ столбцы, содержащие элементы блоков $\big(L_i(\lambda)\big)$ и $N^{(i)}(\lambda)$. Поэтому можно сделать следующий вывод.

С л е д с т в и е 3.1. *Матрицы $\widehat{B}(\lambda)$ и $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеют одни и те же минимальные индексы для строк и одни и те же конечные элементарные делители.*

Далее по-прежнему считаем, что матрица $\widehat{T} \neq 0$. Пусть столбцы матрицы S_0 представляют собой фундаментальную систему решений однородного уравнения $\widehat{B}_0\widehat{T}x = 0$ (см. уравнение (1.8)). То есть $\widehat{B}_0\widehat{T}S_0 = 0$, матрица S_0 имеет максимально возможный ранг, и столбцы этой матрицы линейно независимы. Тогда множество всех матриц S, удовлетворяющих уравнению (1.8), определяется равенством

$$S = S_0C + S^*, \tag{3.8}$$

где квадратная матрица S^* есть любое решение уравнения (1.8), $C \in \mathbb{R}^{s_0\times r_0}$ ($s_0 = \operatorname{rank} S_0$) — произвольная матрица.

Обозначим $r_1 = \operatorname{rank}\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$. Заметим, что $r_1 \leqslant r_0$ (напомним, что r_0 — количество столбцов матрицы $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$). Введем в рассмотрение множество Λ_1, состоящее из таких чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, для которых ранг числовой матрицы $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda_i)$ меньше числа ее столбцов:

$$\Lambda_1 = \big\{\lambda_i \in \mathbb{C}\colon \operatorname{rank}\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda_i) < r_0\big\}.$$

Если $r_1 < r_0$, то множество Λ_1 совпадает с множеством $\mathbb{C}$, то есть состоит из бесконечного числа элементов. Такая ситуация может быть, если в матрице $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеются нулевые столбцы или блоки вида $L_i(\lambda)$ (заметим, что матрица $L_i(\lambda)$ имеет размер $i \times (i+1)$, а $\operatorname{rank} L_i(\lambda) = i$). А последнее возможно, если пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеет минимальные индексы для столбцов (напомним, что в силу леммы 3.1 матрица $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ не имеет ненулевых минимальных индексов для строк и бесконечных элементарных делителей).

Пусть $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1,\gamma}$, — система всех конечных элементарных делителей матрицы $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ и

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i=0}^{\gamma}\varphi_i(\lambda),$$

а d_φ — степень полинома $\varphi(\lambda)$, $d_\varphi = \deg\varphi(\lambda)$. Если матрица $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ не имеет конечных элементарных делителей, то полагаем $\varphi(\lambda) = 1$. Предположим, что пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеет минимальные индексы для столбцов

$$\delta_1 = \ldots = \delta_{p-1} = 0, \quad \delta_p, \ \ldots, \ \delta_{p+d}$$

(если у пучка матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ нет нулевых минимальных индексов для столбцов, то считаем, что $p = 1$).

Обозначим $\psi_S(\lambda)$ — характеристический полином матрицы S, найденной из уравнения (1.8).

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $\widehat{T} \neq 0$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) *Множество различных собственных значений всевозможных матриц S, найденных из уравнения* (1.8)*, совпадает с множеством Λ_1.*

(b) *Для характеристического полинома любой матрицы S, найденной из уравнения* (1.8)*, справедливо равенство*

$$\psi_S(\lambda) = \varphi(\lambda)\eta(\lambda), \tag{3.9}$$

где $\eta(\lambda)$ — некоторый приведенный полином, $\deg \eta(\lambda) = r_0 - d_\varphi$.

(c) *Для любых приведенных полиномов с действительными коэффициентами $\nu_0(\lambda)$, $\nu_{p+i}(\lambda)$, $i = \overline{0,d}$, $\deg \nu_0(\lambda) = p - 1$, $\deg \nu_i(\lambda) = \delta_{p+i} + 1$, $i = \overline{0,d}$, существует такое решение S уравнения* (1.8)*, что*

$$\psi_S(\lambda) = \varphi(\lambda)\nu(\lambda), \tag{3.10}$$

где $\nu(\lambda) = \nu_0(\lambda)\nu_p(\lambda)\ldots\nu_{p+d}(\lambda)$ и $\deg \nu(\lambda) = p + d + \delta_p + \ldots + \delta_{p+d} = r_0 - d_\varphi$. В частности, для любого полинома $\nu(\lambda)$, $\deg \nu(\lambda) = r_0 - d_\varphi$ с действительными коэффициентами, имеющего только действительные корни, существует такое решение S уравнения (1.8)*, что имеет место* (3.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Вначале докажем первое утверждение (a) теоремы 3.1. Пусть λ_0 — собственное значение произвольной фиксированной матрицы S, найденной из уравнения (1.8), а $q \in \mathbb{R}^{r_0}$ — собственный вектор матрицы S, отвечающий собственному значению λ_0. Тогда имеет место соотношение

$$(\lambda_0 I_{r_0} - S)\, q = 0. \tag{3.11}$$

Умножим обе части равенства (3.11) слева на матрицу $\widehat{B}_0\widehat{T}$. В силу уравнения (1.8) справедливо равенство $\widehat{B}_0\widehat{T}S = -\widehat{B}_1\widehat{T}$, поэтому можем записать

$$\big(\lambda\widehat{B}_0\widehat{T} + \widehat{B}_1\widehat{T}\big)q = 0. \tag{3.12}$$

Равенство (3.12) по другому можно записать в виде $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)q = 0$. Следовательно $\lambda_0 \in \Lambda_1$. Значит все собственные значения любой матрицы S, найденной из уравнения (1.8), являются элементами множества Λ_1.

Покажем, теперь, что для любого числа $\lambda \in \Lambda_1$ найдется матрица S, удовлетворяющая уравнению (1.8) такая, что число λ есть собственное значение матрицы S. Поскольку $\lambda \in \Lambda_1$, то найдется ненулевой вектор $q \in \mathbb{R}^{r_0}$, удовлетворяющий алгебраической системе $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)q = 0$, то есть системе (3.12). Пусть S^* — любое решение уравнения (1.8), тогда для него справедливо равенство $\widehat{B}_0\widehat{T}S^* = -\widehat{B}_1\widehat{T}$. На основании этой формулы соотношение (3.12) можно переписать в виде $\widehat{B}_0\widehat{T}\big(\lambda I_{r_0} - S^*\big)q = 0$. Значит вектор $\big(\lambda I_{r_0} - S^*\big)q$ есть линейная комбинация столбцов матрицы S_0,

$$\big(\lambda I_{r_0} - S^*\big)q = S_0 c_0, \tag{3.13}$$

где $c_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$ — некоторый постоянный вектор. Для любого вектора $c_0 \in \mathbb{R}^{s_0}$ найдется матрица $C \in \mathbb{R}^{s_0 \times r_0}$ такая, что $c_0 = Cq$. Поэтому равенство (3.13) можно переписать в виде

$$(I_{r_0}\lambda - S_0 C - S^*)\, q = 0. \tag{3.14}$$

Соотношение (3.14) в силу (3.8) говорит о том, что число λ есть собственное значение некоторой матрицы S, найденной из уравнения (1.8).

2) Перейдем к доказательству части (b) теоремы. Пусть S — любая матрица, удовлетворяющая уравнению (1.8). Поскольку преобразование подобия не меняет характеристического полинома матрицы, рассуждения будем вести применительно к матрице $\widetilde{S}$, определяемой формулой (3.3). В этом случае вместо уравнения (1.8) будем использовать уравнение (3.6), матрицы которого определяются формулами (3.5). В силу того что матрица $\widehat{T} \neq 0$, пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ строго эквивалентен пучку матриц $\widetilde{K}(\lambda)$, который имеет вид (3.1). При этом упорядоченный набор (3.4) диагональных блоков матрицы $\widetilde{S}$, описанный в доказательстве леммы 3.1, будет следующим:

$$\big(\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_{\delta_p}, \ldots, \widetilde{S}_{\delta_{p+d}}, \widetilde{S}_{\widetilde{J}}\big). \tag{3.15}$$

Представим матрицы $\widetilde{S}$, $\widetilde{K}_0$, $\widetilde{K}_1$ следующим образом

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} \widehat{S}_{11} & \widehat{S}_{12} \\ \widehat{S}_{21} & \widetilde{S}_{\widetilde{J}} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{K}_0 = \begin{bmatrix} \widehat{K}_{01} & 0 \\ 0 & \widetilde{J}_0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{K}_1 = \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & 0 \\ 0 & \widetilde{J}_1 \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

где $\widehat{S}_{ij}$, $\widehat{K}_{01}$, $\widehat{K}_{11}$ — некоторые блоки подходящих размеров, блок $\widetilde{S}_J$ тот же, что и в (3.15), блоки $\widetilde{J}_0$, $\widetilde{J}_1$ определяют в формуле (3.1) матрицу $\widetilde{J}(\lambda) = \lambda\widetilde{J}_0 + \widetilde{J}_1$. Напомним, что в силу леммы 3.1 $|\widetilde{J}_0| \neq 0$ (а значит, и $\big|\widetilde{J}(\lambda)\big| \not\equiv 0$). Используя (3.16), выполним перемножение матриц в соотношении (3.6), откуда получим, что $\widetilde{J}_0\widehat{S}_{21} = 0$, $\widetilde{J}_0\widetilde{S}_{\widetilde{J}} + \widetilde{J}_1 = 0$. Значит все элементы матрицы $\widetilde{S}$, расположенные в тех же строках, что и блок $\widetilde{S}_{\widetilde{J}}$, но левее его, равны нулю, то есть $\widehat{S}_{21} = 0$, а блок $\widetilde{S}_{\widetilde{J}}$ определяется однозначно формулой $\widetilde{S}_{\widetilde{J}} = -\widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1$. Поэтому матрица $\widetilde{S}$ имеет вид

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} \widehat{S}_{11} & \widehat{S}_{12} \\ 0 & -\widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1 \end{bmatrix}.$$

Все конечные элементарные делители матрицы $\widetilde{K}(\lambda)$ определяются конечными элементарными делителями матрицы $\widetilde{J}(\lambda) = \widetilde{J}_0\big(\lambda I_\vartheta + \widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1\big)$. Значит для характеристического полинома матрицы $\widetilde{S}$ выполняется равенство

$$\psi_{\widetilde{S}}(\lambda) = \big|\lambda I_\vartheta + \widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1\big|\big|\lambda I_{r_0-\vartheta} - \widehat{S}_{11}\big| = \varphi(\lambda)\big|\lambda I_{r_0-\vartheta} - \widehat{S}_{11}\big|$$

(ϑ — размер блока $J(\lambda)$). Отсюда имеем равенство (3.9) при $\eta(\lambda) = \big|\lambda I_{r_0-\vartheta} - \widehat{S}_{11}\big|$. Кроме того видно, что $d_\varphi = \vartheta$. А так как из канонической формы (3.1) следует, что $r_0 = \vartheta + p + {} + d + \delta_p + \ldots + \delta_{p+d}$, то $\deg \nu(\lambda) = r_0 - \vartheta = r_0 - d_\varphi = p + d + \delta_p + \ldots + \delta_{p+d}$.

3) Докажем часть (c) теоремы. Зададим произвольный приведенный полином $\nu(\lambda)$, $\deg \nu(\lambda) = r_0 - d_\varphi$. Покажем теперь, как выбрать блоки матрицы $\widetilde{S}$ так, чтобы выполнялось равенство (3.10).

Введем матрицы $\Phi_i(c_{i0}, \ldots, c_{ii}) \in \mathbb{R}^{(i+1)\times(i+1)}$, $i = 1, 2, \ldots$, формулой

$$\Phi_i(c_{i0}, \ldots, c_{ii}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ c_{i0} & c_{i1} & \ldots & c_{ii} & c_{ii} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где числа $c_{ij} \in \mathbb{R}$ определяются ниже. Для того чтобы выбрать матрицу $\widetilde{S}$, для которой имеет место равенство (3.10), полагаем равными нулю все блоки этой матрицы, за исключением диагональных. Легко увидеть, что матрица $\widetilde{S}$, диагональные блоки (3.15) которой имеют вид

$$\widetilde{S}_0 = C_0, \quad \widetilde{S}_{\delta_i} = \Phi_{\delta_i}(c_{\delta_i 0}, \ldots, c_{\delta_i\delta_i}), \quad i = \overline{p, p+d}, \quad \widetilde{S}_{\widetilde{J}} = -\widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1, \tag{3.17}$$

где C_0 — произвольная матрица соответствующего размера, $c_{\delta_i j}$, $j = \overline{1, \delta_i}$, $i = \overline{p, p+d}$, — любые действительные числа, удовлетворяет уравнению (3.6). При указанном выборе диагональных блоков (3.15) характеристический полином матрицы $\widetilde{S}$ будет иметь вид

$$\psi_{\widetilde{S}}(\lambda) = \left|\lambda I_{p-1} - C_0\right| \left|\lambda I_{\vartheta} + \widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1\right| \prod_{i=p}^{p+d} \left|\lambda I_{\delta_i+1} - \Phi_{\delta_i}(c_{\delta_i 1}, \ldots, c_{\delta_i \delta_i})\right|,$$

где $(p-1)$ — размер блока $\widetilde{S}_0$. Но $\left|\lambda I_{\vartheta} + \widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1\right| = \varphi(\lambda)$. Поэтому остается только выбрать подходящие матрицу C_0 и числа c_{ij} так, чтобы выполнялось равенство

$$\nu(\lambda) = \left|\lambda I_{p-1} - C_0\right| \prod_{i=p}^{p+d} \left(\lambda^{\delta_i+1} + \sum_{j=1}^{\delta_i+1} (-1)^j c_{\delta_i\, \delta_i - j} \lambda^{\delta_i+1-j}\right). \tag{3.18}$$

Для этого достаточно обеспечить выполнение следующих соотношений

$$\nu_0(\lambda) = \left|\lambda I_{p-1} - C_0\right|, \quad \nu_{p+i}(\lambda) = \lambda^{\delta_{p+i}+1} + \sum_{j=1}^{\delta_{p+i}+1} (-1)^j c_{\delta_{p+i}\, \delta_{p+i}-j} \lambda^{\delta_{p+i}+1-j}, \quad i = \overline{0, d},$$

что не представляет труда. Если же равенство (3.10) следует обеспечить для любого приведенного полинома $\nu(\lambda)$ с действительными коэффициентами, то это можно сделать без труда, воспользовавшись равенством (3.18). Теорема 2.1 доказана. □

Напомним следующие понятия [10, с. 332]. Пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ называется *регулярным*, если матрицы $\widehat{B}_i\widehat{T}$, $i = 0, 1$, являются квадратными матрицами и $\left|\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)\right| \not\equiv 0$. Во всех остальных случаях (матрицы $\widehat{B}_0\widehat{T}$, $\widehat{B}_1\widehat{T}$, $i = 0, 1$, не являются квадратными или $\left|\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)\right| \equiv 0$) пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ называется *сингулярным*.

Из доказательства теоремы 3.1 можно сделать следующие выводы.

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть матрица* $\widehat{T} \neq 0$. *Если у пучка матриц* $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ *отсутствуют минимальные индексы для столбцов, то матрица* S *определяется уравнением* (1.8) *однозначно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при выполнении условий следствия 3.2 каноническая форма пучка матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеет вид $\widetilde{K}(\lambda) = \operatorname{col}\left[0, \widetilde{J}(\lambda)\right]$, где $\widetilde{J}(\lambda)$ — регулярный пучок матриц, $\widetilde{J}(\lambda) = \lambda\widetilde{J}_0 + \widetilde{J}_1$. Поскольку в силу леммы 3.1 у пучка $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ отсутствуют бесконечные элементарные делители, то $\left|\widetilde{J}_0\right| \neq 0$. Поэтому матрицу $\widetilde{S}$, определяемую уравнением (3.3), можно однозначно найти из уравнения $\widetilde{J}_0\widetilde{S} + \widetilde{J}_1 = 0$. □

С л е д с т в и е 3.3. *Если пучок матриц* $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ *является регулярным, то матрица* S *определяется уравнением* (1.8) *однозначно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из разрешимости уравнения (1.7) имеет место следующая импликация: если для некоторого вектора g выполняется равенство $g^{\mathrm{T}}\widehat{B}_0\widehat{T} = 0$, то $g^{\mathrm{T}}\widehat{B}_1\widehat{T} = 0$. Но в силу регулярности пучка матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ равенство $g^{\mathrm{T}}\widehat{B}_0\widehat{T} = 0$ возможно только для нулевого вектора g. Действительно, если существует ненулевой вектор g такой, что $g^{\mathrm{T}}\widehat{B}_0\widehat{T} = 0$, то в силу равенства $g^{\mathrm{T}}\widehat{B}_1\widehat{T} = 0$ строки определителя $\left|\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)\right|$ линейно зависимы, что противоречит условию регулярности.

Поскольку равенство $g^{\mathrm{T}}\widehat{B}_0\widehat{T} = 0$ возможно только для нулевого вектора g, то $\left|\widehat{B}_0\widehat{T}\right| \neq 0$, и матрицу S можно определить по формуле $S = -\left(\widehat{B}_0\widehat{T}\right)^{-1}\widehat{B}_1\widehat{T}$. Следствие доказано. □

Рассмотрим формулы (1.9), (1.10). Теорема 3.1 говорит о том, как в ряде случаев можно построить одно из решений начальной задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее некоторым заданным асимптотическим свойствам. Остановимся на этом подробнее.

Предположим имеется необходимость построить равномерно асимптотически устойчивое решение $g(k)$ начальной задачи (1.1), (1.2). Существование такого решения в силу формул (1.9), (1.10) равносильно существованию матрицы S, собственные значения которой меньше единицы. Проанализируем, опираясь на теорему 3.1, возможные случаи исследования этого вопроса.

1) Собственные значения любой матрицы S принадлежат множеству Λ_1. Предположим, что число элементов множества Λ_1 конечно. Это значит, что пучок матриц $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ не имеет минимальных индексов для столбцов и в канонической форме (3.1) имеется только блок $\widetilde{J}(\lambda)$ (и, возможно, нулевые строки). Тогда, если все элементы множества Λ_1 (или корни полинома $\varphi(\lambda)$, что в случае конечной мощности множества Λ_1 тоже самое) по модулю меньше единицы, то нужная матрица S существует. В данном случае ее можно найти как единственное решение уравнения (1.8). Если же среди элементов матрицы Λ_1 (или корней полинома $\varphi(\lambda)$) есть больше или равные по модулю единицы, то соответствующая матрица S не существует.

2) Пусть, теперь, число элементов множества Λ_1 бесконечно. Множество собственных значений любой матрицы S содержит корни полинома $\varphi(\lambda)$. Поэтому если среди корней полинома $\varphi(\lambda)$ есть такие, модуль которых больше или равен единицы, то подходящая матрица S также не существует. А если все корни полинома $\varphi(\lambda)$ по модулю меньше единицы, то нужная матрица S существует. Найти такую матрицу S можно, например, опираясь на доказательство теоремы 3.1.

Проиллюстрируем сказанное примером.

П р и м е р 3.1. Пусть в уравнении (1.1) $m = 1$, а его матрицы имеют вид

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Требуется построить матрицу S, собственные значения которой по модулю меньше единицы. В данном случае матрица $T = I_4$, матричные пучки $\widehat{B}(\lambda)$ и $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ равны: $\widehat{B}(\lambda) = \widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$,

$$\widehat{B}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$r_0 = 4$, $r_1 = 2$, множество Λ_1 состоит из бесконечного числа элементов, система элементарных делителей имеет вид $\varphi_1(\lambda) = \lambda - \dfrac{1}{2}$ и $\varphi(\lambda) = \lambda - \dfrac{1}{2}$. Значит матрица S с подходящими собственными значениями существует. При этом среди собственных значений матрицы S обязательно одно будет равным $\dfrac{1}{2}$, а остальные собственные значения за счет выбора подходящей матрицы S можно сделать произвольными. Выберем матрицу S такой, чтобы ее характеристический полином имел вид $\psi_S(\lambda) = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)^4$, положив $\nu(\lambda) = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)^4$. Легко проверить, что в данном случае $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 1$, $p = 2$, $d = 0$, $\vartheta = 1$, $J(\lambda) = \lambda - \frac{1}{2}$, а матрица $\widehat{B}_{\widehat{T}}(\lambda)$ имеет вид (3.1). Поэтому $S = \widetilde{S}$. Следуя доказательству теоремы 3.1, в (3.17) полагаем $\widetilde{S}_0 = C_0 = \dfrac{1}{2}$, $\widetilde{S}_{\widetilde{J}} = -\widetilde{J}_0^{-1}\widetilde{J}_1 = \dfrac{1}{2}$,

$$\widetilde{S}_{\delta_2} = \Phi_{\delta_2}(c_{\delta_2 0}, c_{\delta_2 1}) = \Phi_1(c_{10}, c_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}.$$

Числа c_{10}, c_{11} выбираем так, чтобы $\bigl|\lambda I_2 - \Phi_1(c_{10}, c_{11})\bigr| = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right)^2$. Для этого полагаем $c_{10} = \dfrac{1}{4}$, $c_{11} = 1$. Далее формируем матрицу $\widetilde{S} = \operatorname{diag}\bigl[\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_{\delta_2}, \widetilde{S}_J\bigr]$ и, учитывая равенство $S = \widetilde{S}$, окончательно получаем

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

§ 4. Заключение

Изучены структурные свойства линейного автономного дескрипторного уравнения с дискретным временем, возникающего в различных задачах управления системами с многими запаздываниями. На базе канонической формы пучка матриц дано описание матриц исходного уравнения, для которого существует нетривиальное решение. Предложен способ выбора решений этого уравнения, удовлетворяющего заданным асимптотическим свойствам. Представляет интерес дальнейшее развитие методов настоящей работы для исследования аналогичного объекта, но зависящего от случайного параметра [11], а также исследования стабилизации [12] неоднородного уравнения (0.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартовский В. Е. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. I. Приложение к задаче 0-управляемости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 290–311. https://doi.org/10.35634/vm200211
2. Хартовский В. Е. Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 3–11. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12988545
3. Хартовский В. Е. Критерий модальной управляемости вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 514–529. https://doi.org/10.1134/S0374064118040088
4. Хартовский В. Е. Приведение к конечному спектру вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с последействием // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 827–841. https://doi.org/10.1134/S0374064118060110
5. Хартовский В. Е. Синтез наблюдателей для линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 409–422. https://doi.org/10.1134/S0374064119030142
6. Хартовский В. Е. Управление спектром линейных вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 1. С. 23–43. https://doi.org/10.31857/S0002338820010084
7. Белов А. А., Курдюков А. П. Дескрипторные системы и задачи задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
8. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000.

9. Riaza R. Differential-algebraic systems: Analytical aspects and circuit applications. Hackensack, NY: World Scientific, 2008. https://doi.org/10.1142/6746
10. Гантмахер Р. Ф. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
11. Родина Л. И., Тютеев И. И. Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 79–86. https://doi.org/10.20537/vm160107
12. Зайцев В. А., Ким И. Г., Хартовский В. Е. Задача назначения конечного спектра для билинейных систем с несколькими запаздываниями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303

Поступила в редакцию 10.10.2020

Хартовский Вадим Евгеньевич, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой логистики и методов управления, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, 230023, Беларусь, г. Гродно, ул. Ожешко, 22.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Цитирование: В. Е. Хартовский. Об одном линейном автономном дескрипторном уравнении с дискретным временем. II. Каноническое представление и структурные свойства // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 102–121.

V. E. Khartovskii

On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. II. Canonical representation and structural properties

Keywords: linear descriptor autonomous equation with discrete time, the subspace of initial conditions, representation of the solution, beam of matrixes.

MSC2010: 93B99, 93C55

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-08

We consider a linear homogeneous autonomous descriptor equation with discrete time

$$B_0 g(k+1) + \sum_{i=1}^{m} B_i g(k+1-i) = 0,\ k = m, m+1, \ldots,$$

with rectangular (in general case) matrices B_i. Such an equation arises in the study of the most important control problems for systems with many commensurate delays in control: the 0-controllability problem, the synthesis problem of the feedback-type regulator, which provides calming to the solution of the original system, the modal controllability problem (controllability to the coefficients of characteristic quasipolynomial), the spectral reduction problem and the synthesis problem observers for dual surveillance system. The main method of the presented study is based on replacing the original equation with an equivalent equation in the "expanded" state space, which allows one to match the new equation of the beam of matrices. This made it possible to study a number of structural properties of the original equation by using the canonical form of the beam of matrices, and express the results in terms of minimal indices and elementary divisors. In the article, a criterion is obtained for the existence of a nontrivial admissible initial condition for the original equation, the verification of which is based on the calculation of the minimum indices and elementary divisors of the beam of matrices. The following problem was studied: it is required to construct a solution to the original equation in the form $g(k+1) = T\psi(k+1)$, $k = 1, 2 \ldots$, where T is some matrix, the sequence of vectors $\psi(k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, satisfies the equation $\psi(k+1) = S\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, and the square matrix S has a predetermined spectrum (or part of the spectrum). The results obtained make it possible to construct solutions of the initial descriptor equation with predetermined asymptotic properties, for example, uniformly asymptotically stable.

REFERENCES

1. Khartovskii V. E. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. I. Appendix to the 0-controllability problem, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 290–311 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200211
2. Khartovskii V. E. A generalization of the problem of complete controllability for differential systems with commensurable delays, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 6, pp. 847–855. https://doi.org/10.1134/S106423070906001X
3. Khartovskii V. E. Criteria for modal controllability of completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 509–524. https://doi.org/10.1134/S0012266118040080
4. Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment for completely regular differential-algebraic systems with aftereffect, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 6, pp. 823–838. https://doi.org/10.1134/S0012266118060113
5. Khartovskii V. E. Synthesis of observers for linear systems of neutral type, *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 404–417. https://doi.org/10.1134/S0012266119030133

6. Khartovskii V. E. Controlling the spectrum of linear completely regular differential-algebraic systems with delay, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, vol. 59, no. 1, pp. 19–38. https://doi.org/10.1134/S1064230720010086
7. Belov A. A., Kurdyukov A. P. *Deskriptornye sistemy i zadachi upravleniya* (Descriptor systems and control problems), Moscow: Fizmatlit, 2015.
8. Boyarintsev Yu. E. *Lineinye i nelineinye algebro-differentsial'nye sistemy* (Linear and nonlinear algebro-differential systems), Novosibirsk: Nauka, 2000.
9. Riaza R. *Differential-algebraic systems: Analytical aspects and circuit applications*, Hackensack, NY: World Scientific, 2008. https://doi.org/10.1142/6746
10. Gantmakher R. F. *Teoriya matrits* (Matrix theory), Moscow: Nauka, 1988.
11. Rodina L. I., Tyuteev I. I. About asymptotical properties of solutions of difference equations with random parameters, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 79–86. https://doi.org/10.20537/vm160107
12. Zaitsev V. A., Kim I. G., Khartovskii V. E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303

Received 10.10.2020

Khartovskii Vadim Evgen'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Logistics and Methods of Control, Y. Kupala State University of Grodno, ul. Ozheshko, 22, Grodno, 230023, Belarus.
E-mail: hartovskij@grsu.by

Citation: V. E. Khartovskii. On a linear autonomous descriptor equation with discrete time. II. Canonical representation and structural properties, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 102–121.