Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2022. Том 59. С. 55–66

УДК 517.977

© *Н. Н. Петров*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДВУХ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей двух убегающих, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v,\ u_i, \quad v \in V.$$

Предполагается, что убегающие используют одно и то же управление. Преследователи используют контрстратегии на основе информации о начальных позициях и предыстории управления убегающих. Множество допустимых управлений V — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начало координат. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего двумя преследователями или поимка двух убегающих. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий.

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-59-05

Введение

Теория лифференциальных игр, создание которой начал Р. Айзекс [1], в настоящее время представляет собой глубокий содержательный раздел математики, в котором развиваются различные подходы к анализу конфликтных ситуаций, описываемых дифференциальными уравнениями [2–8]. Были разработаны различные методы решения игровых задач: метод Айзекса, метод стабильных мостов Красовского, метод альтернированного интеграла Понтрягина и другие. Развитием данной теории стало изучение задачи преследования группой преследователей и задачи уклонения от группы преследователей одного убегающего [9–15]. Естественным обобщением данных задач группового преследования является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна. Задача уклонения хотя бы одного убегающего от группы преследователей из любых начальных позиций рассматривалась в работах [16–18]. Достаточные условия уклонения хотя бы одного убегающего из счетного числа убегающих от счетного числа преследователей в задаче простого преследования с интегральными ограничениями на управления представлены в [19]. В работах [20–23] получены достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия поимки хотя бы одного убегающего при условии, что участники обладают равными возможностями, а все убегающие используют одно и то же управление. Задача о поимке заданного числа убегающих при условии, что участники обладают равными возможностями, убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего представлена в [24–26]. Задача об оптимальной по времени поимке группы убегающих группой преследователей на плоскости в случае простого движения рассмотрена в [27]. Мультиагентный подход к исследованию задачи преследования группой преследователей группы убегающих рассмотрен в [28]. В работах [29, 30] кроме преследователей и убегающих вводится еще один класс участников — защитники убегающих. Достаточные условия поимки двух убегающих в нелинейных дифференциальных играх получены в [31]. В работах [32, 33] получены достаточные условия поимки двух жестко скоординированых убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх и в линейной задаче группового преследования с простой матрицей.

В данной работе рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух жестко скоординированных убегающих. Вводится новое понятие поимки. Считается, что поимка произошла, если либо какого-то убегающего ловят два различных преследователя, либо найдутся два преследователя такие, что один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Получены достаточные условия поимки.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n+2)$ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$, x_i, y_j, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $V = \{v \mid \|v\| \leqslant 1\}$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех $i \in I$, $j = 1, 2$. Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Измеримая функция $v \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$. Предысторией $v_t(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ в момент t назовем сужение функции v на отрезок $[0, t]$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.

О п р е д е л е н и е 1.2. В игре $\Gamma(n+2)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [0, T_0]$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

a) найдутся номера $l, m \in I$ $(m \neq l)$, $j \in \{1, 2\}$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_0]$ такие, что $z_{lj}(\tau_1) = 0$, $z_{mj}(\tau_2) = 0$;

b) найдутся номера $l, m \in I$ $(m \neq l)$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_0]$ такие, что $z_{l1}(\tau_1) = 0$, $z_{m2}(\tau_2) = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Условие поимки означает, что либо два каких-то преследователя осуществляют поимку одного убегающего, либо один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Такая ситуация может возникнуть, если система состоит из двух блоков и для того, чтобы ее вывести из строя нужно либо уничтожить один из блоков, либо повредить оба блока.

§ 2. Вспомогательные результаты

Определение 2.1 (см. [34]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Обозначим через $\operatorname{Int} X$, $\operatorname{co} X$ соответственно внутренность, выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Теорема 2.1 (см. [34]). *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $a_1, \ldots, a_m, c \in \mathbb{R}^k$ таковы, что для всех $l \in J = \{1, \ldots, m\}$ имеет место включение*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J, i \neq l, c\}.$$

Тогда для любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ существует вещественное число $\mu > 0$ такое, что для всех $l \in J_1 = \{1, \ldots, m+2\}$ имеет место включение

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J_1, i \neq l\},$$

где $a_{m+1} = b_1 + \mu c$, $a_{m+2} = b_2 + \mu c$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда существуют $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^k$ такие, что для каждого $\mu > 1$ найдется номер $l(\mu) \in J_1$, для которого

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J_1, i \neq l(\mu)\}.$$

Следовательно, существуют последовательность $\{\mu_s\}$, $\lim\limits_{s \to \infty} \mu_s = +\infty$, и номер $l \in J_1$, для которых для всех s верно

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J_1, i \neq l\}, \tag{2.1}$$

где $a_{m+1} = b_1 + \mu_s c$, $a_{m+2} = b_2 + \mu_s c$. Из (2.1) следует, что существует последовательность $\{p_s\}$, $p_s \in \mathbb{R}^k$, $\|p_s\| = 1$, такая, что

$$(a_i, p_s) \leqslant 0 \text{ для всех } \ i \in J_1, \quad i \neq l.$$

Из последовательности $\{p_s\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Считаем, что последовательность $\{p_s\}$ сама сходится к вектору p. Тогда $\|p\| = 1$.

Если $l \in J$, то имеем

$$(a_i, p_s) \leqslant 0, \quad i \in J, \quad i \neq l, \quad (b_1 + \mu_s c, p_s) \leqslant 0, \quad (b_2 + \mu_s c, p_s) \leqslant 0.$$

Отсюда получаем, что справедливы неравенства

$$(a_i, p) \leqslant 0, \quad i \in J, \quad i \neq l, \quad (p, c) \leqslant 0.$$

Это означает, что $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J, i \neq l, c\}$, что противоречит условию леммы. Если $l = m + 1$, то имеем

$$(a_i, p_s) \leqslant 0, \quad i \in J, \quad (b_2 + \mu_s c, p_s) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$(a_i, p) \leqslant 0, \quad i \in J, \quad (p, c) \leqslant 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма доказана. □

Введем следующие обозначения.

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad \Omega(J) = \{(i_1, i_2) \big| i_1, i_2, \in J, i_1 \neq i_2\},$$

где J — конечное множество натуральных чисел.

Л е м м а 2.2 (см. [14, лемма 8.1, с. 89]). *Пусть* $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^k$ *таковы, что для всех* $l \in J = \{1, \dots, m\}$ *выполнено включение*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J, i \neq l\}.$$

Тогда

$$\delta = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(a_i, v) > 0.$$

Л е м м а 2.3. *Пусть* $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^k$ *таковы, что для всех* $l \in J = \{1, \dots, m\}$ *выполнено включение*

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{a_i, i \in J, i \neq l\}.$$

Тогда существует момент $T > 0$ *такой, что для любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдутся номера* $r, q \in J$, *моменты времени* $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ *такие, что*

$$\int_0^{\tau_1} \lambda(a_r, v(s))\, ds \geqslant 1, \quad \int_0^{\tau_2} \lambda(a_q, v(s))\, ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция. Тогда имеем

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^t \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \int_0^t \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds. \tag{2.2}$$

Для любых неотрицательных чисел γ_Λ $(\Lambda \in \Omega(J))$ имеет место неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \gamma_\Lambda \geqslant \frac{1}{C_m^2} \sum_{\Lambda \in \Omega(J)} \gamma_\lambda, \text{ где } C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!}.$$

Поэтому

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \int_0^t \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant \frac{1}{C_m^2} \int_0^t \sum_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{C_m^2} \int_0^t \max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j, v(s))\, ds.$$

В силу леммы 2.2 справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(a_j v) \geqslant \delta > 0$$

для всех $v \in V$. Следовательно, из (2.2) получаем

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^t \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant \frac{\delta t}{C_m^2}.$$

Из последнего неравенства следует, что при $T > C_m^2/\delta$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(J)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^t \lambda(a_j, v(s))\, ds \geqslant 1,$$

откуда следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана. □

§ 3. Достаточные условия поимки

Т е о р е м а 3.1. *Пусть существует множество* $I_0 \subset I$, $|I_0| = n-2$, *такое, что для всех* $l \in I_0$

$$\operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \operatorname{co} \{y_1^0, y_2^0\} \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (3.1) следует [35], что для всех $l \in I_0$ набор $\{x_i^0 - y_1^0, x_i^0 - y_2^0, i \in I_0, i \neq l\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Обозначим $c = y_1^0 - y_2^0$. Так как

$$x_i^0 - y_2^0 = x_i^0 - y_1^0 + c,$$

то для всех $l \in I_0$ положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор $\{z_{i1}^0, i \in I_0, i \neq l, c\}$. Считаем, что $I_0 = \{1, \ldots, n-2\}$. Из леммы 2.1 следует, что существует число $\mu > 0$ такое, что для всех $l \in I$ векторы $\{w_i^0, i \in I, i \neq l\}$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, где

$$w_i^0 = \begin{cases} z_{i1}^0, & \text{если } i \in I_0, \\ z_{n-12}^0 + \mu c, & \text{если } i = n-1, \\ z_{n2}^0 + \mu c, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Следовательно, в силу теоремы 2.1 получаем, что для всех $l \in I$

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{w_i^0, i \in I, i \neq l\}.$$

Из лемм 2.2, 2.3 следует, что число

$$T_0 = \min\{T > 0 \big| \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega(I)} \min_{j \in \Lambda} \int_0^T \lambda(w_j^0, v(s))\, ds \geqslant 1\}$$

конечно. Пусть $v(\cdot)$ — допустимое управление убегающих. Определим функции

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t \lambda(w_i^0, v(s))\, ds.$$

Из леммы 2.3 следует, что существуют номера $l, m \in I$, моменты $\tau_1, \tau_2 \in [0, T_0]$ такие, что

$$h_l(\tau_1) = 0, \quad h_m(\tau_2) = 0. \tag{3.2}$$

В дальнейшем будем считать, что если $h_q(\tau) = 0$ при некоторых $q \in I$, $\tau \in [0, T_0)$, то $\lambda(w_q^0, v(s)) = 0$ для всех $s \in [\tau, T_0]$. Тогда из условия (3.2) получаем, что существуют номера $l, m \in I$ для которых

$$h_l(T_0) = 0, \quad h_m(T_0) = 0. \tag{3.3}$$

Задаем управления преследователей $P_i, i \in I$ на отрезке $[0, T_0]$ полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(w_i^0, v(t)) w_i^0.$$

Тогда из системы (1.3) следует, что для всех $t \in [0, T_0]$

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 h_i(t), \quad i \in I_0,$$

$$z_{n-12}(t) = z_{n-12}^0 - \int_0^t \lambda(w_{n-1}^0, v(s))\, ds w_{n-1}^0 = z_{n-12}^0 h_{n-1}(t) - \mu c(1 - h_{n-1}(t)),$$

$$z_{n2}(t) = z_{n2}^0 h_n(t) - \mu c(1 - h_n(t)).$$

Из условия (3.3) и определения управлений преследователей P_i, $i \in I$, вытекает, что возможны следующие варианты.

1. Существуют $l, m \in I_0$, для которых выполняются условия (3.3). В этом случае преследователи P_l, P_m осуществляют поимку убегающего E_1, что означает, что в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

2. Условие (3.3) выполняется для $l \in I_0$, $m \in \{n-1, n\}$. Это означает, что преследователь P_l осуществляет поимку убегающего E_l. Пусть $l = n-1$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$. Докажем, что

$$y_2(T_0) \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_i(T_0), i \in I, i \neq l\}. \tag{3.4}$$

Так как для всех $i \in I_0$, $i \neq l$, справедливы следующие равенства:

$$z_{i1}(T_0) = z_{i1}^0 h_i(T_0), \quad z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c = z_{l1}^0 h_i(T_0) + z_{i2}^0 - z_{i1}^0,$$

то

$$z_{i1}^0 = \frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, \quad z_{i2}^0 = z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}.$$

Из условия теоремы следует, что набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \in I_0, i \neq l\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Следовательно, положительный базис $\mathbb{R}^k$ образуют векторы

$$\Big\{\frac{z_{i1}(T_0)}{h_i(T_0)}, z_{i2}(T_0) + \frac{z_{i1}(T_0)(1 - h_i(T_0))}{h_i(T_0)}, i \in I_0, i \neq l\Big\}.$$

Из условия $h_i(T_0) \in (0, 1]$ для всех $i \in I_0$, $i \neq l$, получаем, что положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i1}(T_0), z_{i2}(T_0), i \in I_0, i \neq l\}. \tag{3.5}$$

Из равенства $z_{n-12}(T_0) = \mu(y_2(T_0) - y_1(T_0))$ получаем, что для всех $i \in I_0$, $i \neq l$ имеет место равенство

$$z_{i1}(T_0) = x_i(T_0) - y_1(T_0) = x_i(T_0) - y_2(T_0) + y_2(T_0) - y_1(T_0) = z_{i2}(T_0) + \frac{1}{\mu} z_{n-12}(T_0). \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) следует, что положительный базис $\mathbb{R}^k$ образует набор

$$\{z_{i2}(T_0), i \in I_0 \cup \{n-1\}, i \neq l\}.$$

Из последнего соотношения и теоремы 2.1 вытекает (3.4). Принимая момент T_0 за начальный и используя теорему Пшеничного [9], получаем, что преследователи P_i, $i \in I$, $i \neq l$, осуществляют поимку убегающего E_2. Следовательно, в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

3. Условие (3.3) выполняется для $l = n-1$, $m = n$. Тогда $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$, $z_{n2}(T_0) = -\mu c$. Отметим, что для всех $i \in I_0$ $z_{i1}(T_0) = z_{i1}^0 h_i(T_0)$. Докажем, что в этом случае для всех $l \in I$ выполняется включение

$$y_2(T_0) \in \operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_i(T_0), i \in I, i \neq l\}. \tag{3.7}$$

Предположим, что существует $l \in I$, для которого

$$y_2(T_0) \notin \operatorname{Int} \operatorname{co} \{x_i(T_0), i \in I, i \neq l\}. \tag{3.8}$$

Возможны следующие ситуации.

3.1. $l \in I_0$. Из (3.8) следует, что набор $\{z_{i2}(T_0), i \in I, i \neq l\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Поэтому существует единичный вектор $p \in \mathbb{R}^k$, для которого $(p, z_{i2}(T_0)) \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $i \neq l$.

Из условия $z_{n-12}(T_0) = -\mu c$ получаем, что $(p, c) \geqslant 0$. Так как для всех $i \in I_0$ $z_{i2}(T_0) = z_{i1}(T_0) + c$, то для всех $i \in I_0$, $i \neq l$,

$$(p, z_{i1}(T_0)) = (p, z_{i2}(T_0)) - (p, c) \leqslant 0.$$

Следовательно, $(p, z_{i1}^0) \leqslant 0$ для всех $i \in I_0$, $i \neq l$. Кроме того, из равенства

$$z_{i2}^0 = z_{i2}(T_0) + z_{i1}^0(1 - h_i(T_0))$$

и ранее доказанного получим, что $(p, z_{i2}^0) \leqslant 0$ для всех $i \in I$, $i \neq l$. Получили, что набор $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \in I_0, i \neq l\}$ не образует положительный базис $\mathbb{R}^k$, что противоречит условию теоремы. Тем самым включение (3.7) доказано.

3.2. $l \in \{n-1, n\}$. Считаем, что $l = n$. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта **3.1.** получаем, что векторы $\{z_{i1}^0, z_{i2}^0, i \in I_0\}$ не образуют положительного базиса $\mathbb{R}^k$, что противоречит условию теоремы. Тем самым включение (3.7) доказано.

Принимая момент времени T_0 за начальный и используя результаты работы [36] получим, что найдутся преследователи P_q, P_r, $q \neq r$, осуществляющие поимку убегающего E_2. Теорема доказана. □

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010 и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00293.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Isaacs R. Differential games. New York: Wiley, 1965.
2. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Friedman A. Differential games. New York: Wiley Interscience, 1971.
5. Hájek O. Pursuit games. Academic Press, 1975.
6. Нарманов А. Я., Щелчков К. А. Задача уклонения в нелинейной дифференциальной игре с дискретным управлением // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 75–85. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
7. Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 3–12. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-01
8. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments // Systems and Control Letters. 2019. Vol. 125. P. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
9. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
10. Черноусько Ф. Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23552634
11. Рихсиев Б. Б. Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан, 1989.
12. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
13. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
14. Благодатских А. И., Петров Н. Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009.

15. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit–evasion differential games with many objects: survey of publications // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. Issue 4. P. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
16. Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1366–1374. http://mi.mathnet.ru/rus/de/v19/i8/p1366
17. Prokopovich P. V., Chikrii A. A. A linear evasion problem for interacting groups of objects // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. Vol. 58. Issue 4. P. 583-591. https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90135-X
18. Банников А. С. Нестационарная задача группового преследования // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. № 5. С. 3–12. http://mi.mathnet.ru/rus/ivm/y2009/i5/p3
19. Alias I. A., Ibragimov G., Rakmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space // Dynamic Games and Applications. 2017. Vol. 7. Issue 3. P. 347–359. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0
20. Сатимов Н., Маматов М. Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 1983. Т. 4. С. 3–6. https://zbmath.org/?q=an:0642.90110
21. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of group pursuit with phase constraints // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2002. Vol. 66. Issue 2. P. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
22. Мачтакова А. И. Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 45–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04
23. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games // Journal of Computer and System Sciences International. 2012. Vol. 51. Issue 6. P. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
24. Петров Н. Н., Прокопенко В. А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726. http://mi.mathnet.ru/rus/de/v23/i4/p725
25. Петров Н. Н., Нарманов А. Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 193–198. https://doi.org/10.20537/vm180205
26. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 2019. Vol. 182. Issue 1. P. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
27. Makkapati V. R., Tsiotras P. Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit–evasion problems // Dynamic Games and Applications. 2019. Vol. 9. Issue 4. P. 1168–1187. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00319-x
28. Qadir M. Z., Piao S., Jiang H., Souidi M. E. H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders // Journal of Supercomputing. 2020. Vol. 76. Issue 5. P. 3416–3426. https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3
29. Liang L., Deng F., Peng Z., Li X., Zha W. A differential game for cooperative target defense // Automatica. 2019. Vol. 102. P. 58-71. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.034
30. Благодатских А. И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2015. Вып. 2 (46). С. 13–20. http://mi.mathnet.ru/rus/iimi/y2015/i2/p13
31. Григоренко Н. Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // Доклады Академии наук. 1985. Т. 282. № 5. С. 1051–1054. http://mi.mathnet.ru/rus/dan/v282/i5/p1051
32. Виноградова М. Н. О поимке двух убегающих в одной нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 12–20. https://doi.org/10.20537/vm150102

33. Виноградова М. Н., Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48. http://mi.mathnet.ru/timm897
34. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. http://mi.mathnet.ru/de328
35. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2001. № 5. Р. 75–79. https://elibrary.ru/item.asp?id=14957640
36. Петров Н. Н., Соловьева Н. А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218. http://mi.mathnet.ru/timm1396

Поступила в редакцию 29.12.2021

Принята в печать 02.02.2022

Петров Николай Никандрович, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник, кафедра дифференциальных уравнений, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Цитирование: Н. Н. Петров. Об одной задаче простого преследования двух жестко скоординированных убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 59. С. 55–66.

N. N. Petrov
On one simple pursuit problem of two rigidly coordinated evaders

Keywords: differential game, group pursuit, pursuer, evader.

MSC2020: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-59-05

In a finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit by a group of pursuers of two evaders described by a system of the form

$$\dot{z}_{ij} = u_i - v, \quad u_i, v \in V$$

is considered. It is assumed that all evaders use the same control. The pursuers use counterstrategies based on information about the initial positions and control history of the evaders. The set of admissible controls V is unit ball centered at zero, target sets are the origin. The goal of the pursuers' group is to capture at least one evader by two pursuers or to capture two evaders. In terms of initial positions and game parameters a sufficient condition for the capture is obtained. In the study, the method of resolving functions is used as a basic one, which allows obtaining sufficient conditions for the solvability of the approach problem in some guaranteed time.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-01265-22-00, project FEWS-2020-0010 and under grant 20-01-00293 from the Russian Foundation for Basic Research.

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: Wiley, 1965.
2. Pontryagin L. S. *Izbrannye nauchnye trudy* (Selected scientific works), Moscow: Nauka, 1988.
3. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional differential games), Nauka: Moscow, 1974.
4. Friedman A. *Differential games*, New York: Wiley Interscience, 1971.
5. Hájek O. *Pursuit games*, Academic Press, 1975.
6. Narmanov A. Ya., Shchelchkov K. A. The evasion problem in a nonlinear differential game with discrete control, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 75–85 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-06
7. Averboukh Yu. Stackelberg solution of first-order mean field game with a major player, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 3–12. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-01
8. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments, *Systems and Control Letters*, 2019, vol. 125, pp. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
9. Pshenichnyi B. N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://doi.org/10.1007/BF01070036
10. Chernous'ko F. L. A problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 1, pp. 11–20. https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90105-2
11. Rikhsiev B. B. *Differentsial'nye igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple mothion), Tashkent: Fan, 1989.
12. Chikrii A. Conflict-controlled processes. Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
13. Grigorenko N. L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control a few dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990.

14. Blagodatskikh A. I., Petrov N. N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
15. Kumkov S. S., Ménec S. L., Patsko V. S. Zero-sum pursuit–evasion differential games with many objects: survey of publications, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 4, pp. 609–633. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0209-z
16. Petrov N. N., Petrov N. Nikandr. The "Cossack-robber" differential game, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1366–1374 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0521.90109
17. Prokopovich P. V., Chikrii A. A. A linear evasion problem for interacting groups of objects, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1994, vol. 58, issue 4, pp. 583–591. https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90135-X
18. Bannikov A. S. A nonstationary group pursuit problem, *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, issue 5, pp. 1–9. https://doi.org/10.3103/S1066369X09050016
19. Alias I. A., Ibragimov G., Rakhmanov A. Evasion differential games of infinitely many evaders from infinitely many pursuers in Hilbert space, *Dynamic Games and Applications*, 2017, vol. 7, issue 3, pp. 347–359. https://doi.org/10.1007/s13235-016-0196-0
20. Satimov N., Mamatov M. Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting in differential games between the group of pursuers and evaders, *Doklady Akademii Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0642.90110
21. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, issue 2, pp. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
22. Machtakova A. I. Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 45–54. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-04
23. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and System Sciences International*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
24. Petrov N. N., Prokopenko V. A. One problem of pursuit of a group of evader, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de/v23/i4/p725
25. Petrov N. N., Narmanov A. Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 193–198 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180205
26. Petrov N. N., Solov'eva N. A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2019, vol. 182, issue 1, pp. 417–429. https://doi.org/10.1007/s10957-019-01526-7
27. Makkapati V. R., Tsiotras P. Optimal evading strategies and task allocation in multi-player pursuit–evasion problems, *Dynamic Games and Applications*, 2019, vol. 9, issue 4, pp. 1168–1187. https://doi.org/10.1007/s13235-019-00319-x
28. Qadir M. Z., Piao S., Jiang H., Souidi M. E. H. A novel approach for multi-agent cooperative pursuit to capture grouped evaders, *Journal of Supercomputing*, 2020, vol. 76, issue 5, pp. 3416–3426. https://doi.org/10.1007/s11227-018-2591-3
29. Liang L., Deng F., Peng Z., Li X., Zha W. A differential game for cooperative target defense, *Automatica*, 2019, vol. 102, pp. 58–71. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.034
30. Blagodatskikh A. I. Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2015, issue 2 (46), pp. 13–20 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iimi297
31. Grigorenko N. L. Pursuit of two evaders by several controlled objects, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1985, vol. 282, no. 5, pp. 1051–1054. http://mi.mathnet.ru/eng/dan9111
32. Vinogradova M. N. On the capture of two evaders in a non-stationary pursuit evasion problem with phase restritions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 12–20 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm150102
33. Vinogradova M. N., Petrov N. N., Solov'eva N. A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1,

pp. 41–48 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm897
34. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems, *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de328
35. Vagin D. A., Petrov N. N. A problem of the pursuit of a group rigidly connected evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13370431
36. Petrov N. N., Solov'eva N. A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/timm1396

Received 29.12.2021

Accepted 02.02.2022

Nikolai Nikandrovich Petrov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Department of Differential Equations, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0303-3559
E-mail: kma3@list.ru

Citation: N. N. Petrov. On one simple pursuit problem of two rigidly coordinated evaders, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 59, pp. 55–66.