Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2022. Том 59. С. 114–130

УДК 517.518, 517.977.56

© *А. В. Чернов*

О ГИБКОСТИ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для конечномерных задач математического программирования (аппроксимирующих задач), получаемых путем параметрической аппроксимации управляющих функций в сосредоточенных задачах оптимального управления с функциональными ограничениями типа равенства, вводятся понятия жесткости и гибкости системы ограничений. Жесткость в данной допустимой точке понимается в том смысле, что эта точка является изолированной точкой допустимого множества; в противном случае называем систему ограничений гибкой в данной точке. При использовании параметрической аппроксимации управления с помощью функций Гаусса и при выполнении некоторых естественных предположений устанавливается, что для обеспечения гибкости системы ограничений в данной допустимой точке достаточно увеличения размерности пространства параметров аппроксимирующей задачи. Проверка сделанных предположений иллюстрируется на примере задачи о мягкой посадке на Луну.

Ключевые слова: сосредоточенные задачи оптимального управления с функциональными ограничениями типа равенства, параметрическая аппроксимация управления, жесткость и гибкость системы ограничений, функции Гаусса, квадратичные экспоненты.

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-59-08

Введение

На данный момент для практического решения задач оптимального управления динамическими системами разработан уже достаточно большой арсенал методов, см., например, [1]. В частности, широко известны классические подходы, основанные на вариационном исчислении и принципе максимума Понтрягина, динамическом программировании, методе моментов, методе обратных задач динамики, алгебраические подходы и т. д. Общепризнанной основой формирования оптимального программного управления являются вариационное исчисление и принцип максимума Понтрягина. Этот подход особенно эффективен для решения линейных и линейно-квадратичных задач. Однако в случае нелинейных динамических систем его применение зачастую оказывается сопряжено с определенными трудностями (в частности, с необходимостью решения соответствующей двухточечной краевой задачи). В связи с этим у прикладников наблюдается также значительный интерес и к исследованию так называемых прямых методов поиска оптимального программного управления. Суть этого подхода состоит в том, что целевой функционал рассматривается как функционал, зависящий только от управления за счет того, что состояние системы трактуется как специальная функция, зависящая от управления. Такая трактовка задачи оптимального управления корректна в случае, когда имеет место тотально (по всем допустимым управлениям) глобальная разрешимость управляемой динамической системы. Для численного решения полученной в рамках прямого метода задачи оптимизации управляющая функция подвергается конечномерной дискретизации, в результате чего приходим к обычной конечномерной задаче математического программирования. На этой идее основаны различные техники параметризации управления, см., например, [2]. Что касается инженерных приложений метода параметризации управления, укажем, например, [3–6]. Помимо классических постановок задач оптимального управления, метод параметризации управления демонстрирует свою эффективность и при численном решении задач неклассического типа. В частности, в случае управляемых систем с дробными производными и запаздыванием по времени [7–9]. Отметим, наконец, что идея параметризации управления оказывается эффективной и для формирования оптимального управления с обратной связью [10, 11].

Как уже было сказано выше, при условии тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения однозначной глобальной разрешимости управляемой системы задачи оптимального управления с функциональными ограничениями могут быть представлены в виде задачи математического программирования с функционалами, зависящими только от управления. В частности, задача с ограничениями типа равенства часто представляется в виде:

$$J_0[u] \to \min, \quad J_j[u] = 0, \quad j = \overline{1,\mu}, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{0.1}$$

где $\mathcal{D} = \big\{u \in L_\infty^s(\Pi)\colon u(t) \in [0;\sigma]\ \text{для п. в.}\ t \in \Pi\big\}$, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное, измеримое по Лебегу множество, $J_j\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функционалы, дифференцируемые в смысле Фреше, $j = \overline{0,\mu}$. В свою очередь, с помощью той или иной конечномерной аппроксимации управления $u = u\{\rho\}$, $\rho \in \mathbb{R}^\nu$, задача (0.1) аппроксимируется конечномерной задачей математического программирования:

$$J_0\{\rho\} \to \min, \tag{0.2}$$

$$J_j\{\rho\} = 0, \quad j = \overline{1,\mu}, \quad \rho \in \mathbb{R}^\nu, \tag{0.3}$$

где $J_j\{\rho\} = J_j\big[u\{\rho\}\big]$, $j = \overline{0,\mu}$. Для решения аппроксимирующей задачи (0.2), (0.3) можно использовать соответствующий арсенал численных методов конечномерной оптимизации. В этом состоит основная идея метода параметризации управления, демонстрирующего достаточно высокую эффективность при решении задач оптимального управления нелинейными системами, см., например, [2, 12–18] и указанную там библиографию.

Однако надо отметить, что при параметризации управления мы, фактически, сужаем допустимое множество. Поэтому существует опасность, что результат этого сужения окажется либо пустым, либо одноточечным, либо состоящим из набора изолированных точек. Все эти случаи критичны для численного решения аппроксимирующей задачи математического программирования. Поэтому для того или иного конкретного способа параметризации управления полезно иметь гарантии того, что при подходящем увеличении количества параметров эти критические случаи могут быть исключены.

Систему ограничений (0.3) естественно назвать *жесткой*, если она имеет не более одного решения $\rho \in \mathbb{R}^\nu$, и *жесткой в данной допустимой точке*, если эта точка является изолированной точкой допустимого множества. Систему ограничений, жесткую в каждой допустимой точке, естественно назвать локально жесткой. В случае жесткой системы ограничений задача оптимизации (0.2), (0.3) теряет смысл как задача оптимизации на пустом или одноточечном множестве. В случае жесткой или локально жесткой системы ограничений численные методы конечномерной оптимизации, как правило, дают очень плохой результат с существенным нарушением ограничений. Для устойчивости процесса оптимизации тем или иным численным методом система ограничений (0.3) должна быть *гибкой* в текущей допустимой точке $\overline{\rho}$ в том смысле, что эта точка не является изолированной точкой соответствующего допустимого множества.

Простейший метод обеспечения гибкости связан с релаксацией (ослаблением) ограничений. Укажем, например, следующий. Зададимся достаточно малым числом $\varepsilon > 0$ и заменим систему ограничений (0.3) системой вида

$$\widetilde{J}\{\rho\} = \sum_{j=1}^{\mu} \big(J_j\{\rho\}\big)^2 - \varepsilon < 0. \tag{0.4}$$

В случае непрерывной параметризации управления функции $J_j\{\rho\}$, а следовательно, и функция $\widetilde{J}\{\rho\}$, будут непрерывными. Если точка $\overline{\rho}$ – допустимая: $\widetilde{J}\{\overline{\rho}\} < 0$, то в силу непрерывности функции $\widetilde{J}\{\rho\}$ и теоремы об устойчивости знака непрерывной функции, неравенство (0.4) сохраняется также и в некоторой малой окрестности точки $\overline{\rho}$. Формально говоря, отсюда следует гибкость системы (0.4). Но такая гибкость носит несколько условный характер, поскольку возможность выхода из точки $\overline{\rho}$ обеспечивается лишь за счет некоторого «ухудшения» выполнения ограничений (0.3), а даже малое «ухудшение» может оказаться критическим (как в задаче о мягкой посадке на Луну [17]).

Далее мы покажем, что в некоторых случаях гибкость можно обеспечить именно для системы вида (0.3) за счет увеличения размерности ν пространства параметров. Этот способ представляется более естественным, поскольку увеличение размерности ν означает, фактически, повышение точности аппроксимации исходной задачи (0.1), (0.2). При практической реализации можно на начальном этапе отдельно решать задачу минимизации вида $\sum\limits_{j=1}^{\mu}\bigl(J_j\{\rho\}\bigr)^2 \to \min,\ \rho \in \mathbb{R}^{\nu}$. Если оказалось, что значение этой задачи больше нуля и не является достаточно малым, то в любом случае требуется увеличение размерности пространства параметров. Вообще говоря, интуитивно очевидно, что увеличение размерности пространства параметров увеличивает количество степеней свободы управляющего режима, а тем самым, должно повышать гибкость системы ограничений. Именно проблеме строгого математического обоснования этой общей идеи для одного конкретного способа параметризации управления посвящена данная статья.

§ 1. О проблеме выбора шаблона параметризации управления

На первый взгляд может показаться, что выбор того или иного конкретного шаблона параметризации управления не имеет принципиального значения, поскольку это «факторы нулевой меры». Приведем контраргументы. Начнем с простой аналогии.

Допустим, мы хотим сделать табурет. Есть кусок доски треугольной формы и нужно выбрать 3 точки, в которых надо прикрепить ножки. Здесь очевидно следующее.
1) Если эти 3 точки выбраны вблизи вершин треугольника, то табурет будет стоять устойчиво. Если же их разместить вдоль прямой линии, то он вообще стоять не будет. Хотя и в том, и в другом случае множество параметров имеет нулевую меру, но устойчивость системы обеспечивается лишь при использовании определенного шаблона.
2) Если количество точек для размещения ножек меньше трех, то табурет вообще стоять не будет. Поэтому для обеспечения устойчивости требуется еще, чтобы количество параметров было не меньше некоторого критического значения, зависящего от выбора шаблона.
3) Если количество точек равно 4 и используется квадратный шаблон, то табурет будет шататься при небольшом отличии длины ножек, опираясь то на одну тройку, то на другую. Поэтому количество параметров не должно быть и чрезмерным. Перейдем теперь от этой простой аналогии к конкретной задаче оптимального управления, в которой удивительным образом все сделанные выше наблюдения проявляются.

В [17,18] рассматривались вопросы численного решения задачи о мягкой посадке на Луну. Там структура теоретического оптимального управления известна из принципа максимума: сначала, на отрезке времени $[0;\tau]$ — нулевой расход топлива, затем — на отрезке $[\tau;T]$ — максимальный расход топлива в единицу времени. Казалось бы, достаточно найти численно момент переключения τ и финальное время T (в [17] описывается методика, которая позволяет это сделать с любой заданной степенью точности). Однако численные эксперименты показывают, что отклонение уже в десятом знаке после запятой в значении τ приводит к тому, что в одном случае космический аппарат врезается в поверхность Луны на большой скорости, а в другом случае — не долетая до нее порядка 100 метров, снова улетает вверх («табурет падает — то на одну, то на другую сторону»). Более того, в [17] проводится строгое теоретическое обоснование этого явления. Таким образом, режим управления, соответствующий теоретически оптимальному, оказывается сильно неустойчивым по отношению к малейшей погрешности вычислений, и чем точнее «вписываться» в такой режим, тем сильнее проявляется эффект неустойчивости численного решения. Косвенно на этот факт указывается в [19, глава III, § 3, п. 3, с. 126]. Это и есть проявление жесткости системы ограничений при двух параметрах. Это явление неустойчивости численного решения аналогично тому, которое известно для жестких систем дифференциальных уравнений. Поэтому в [17] был введен термин «жесткость параметризованной системы ограничений» для задач оптимального управления. Для преодоления описанных проявлений жесткости при решении задачи о мягкой посадке в [19, глава III, § 3] предлагается использовать управление с обратной связью, начиная с некоторого момента $\tau_1 \in (\tau; T)$. Но этот комбинированный способ, относящийся больше к вопросу практической реализации управления (а не численной оптимизации), применим лишь при данной или схожей, и во всяком случае, известной структуре оптимального управления. Мы же показываем, что при выполнении определенных условий гибкость параметризованной системы ограничений можно обеспечивать за счет использования специального шаблона параметризации управления. Что касается задачи о мягкой посадке, в [18] описаны результаты численной оптимизации при использовании кусочно постоянного шаблона управления на подвижной сетке. Для обеспечения устойчивости численного решения тут потребовалось разбивать $[0; T]$ по крайней мере на 10 частей (это как с табуретом — на одной и двух ножках положение равновесия неустойчиво, а на трех при правильном выборе шаблона — устойчиво; при неправильном — их и десяти может не хватить). Кроме того, приходится разрешать варьирование константы на каждом участке. Стало быть, всего требуется по крайней мере 20 параметров. Это и есть гибкость, достигаемая за счет увеличения количества параметров. Вообще, увеличение количества параметров требуется не только (а в случае жесткости и не столько) для того, чтобы лучше «вписаться» в теоретическое оптимальное управление (оптимальный статус которого вследствие погрешностей размывается), а и для того, чтобы при неизбежном возникновении погрешностей (численного решения или самой модели) «не выпасть слишком сильно» из допустимого множества. Если дальше увеличивать количество параметров, то, как показывают численные эксперименты, устойчивость численного решения некоторым (некритическим) образом понижается («табурет шатается на четырех ножках»). Здесь наблюдается еще один интересный эффект: приближенное решение, близкое по виду к теоретическому оптимальному управлению, находит метод Хука–Дживса (применяемый к штрафному функционалу), то есть метод нулевого порядка. Методы первого порядка находят приближение лишь в смысле близости по значению функционала (то есть по расходу топлива при высокой точности выполнения ограничений), но график такого приближения может значительно отличаться от графика теоретического оптимального управления. И причину такого эффекта нетрудно понять, поскольку методы первого порядка ориентируются на малость градиента, а вследствие высокой чувствительности к отклонениям от оптимальных значений параметров, норма градиента принимает большие значения в малой окрестности оптимума, и оптимум теряется в процессе численного решения, но зато вместо него обнаруживается существенно более устойчивое решение, близкое по значению функционала.

В [16, 17] был предложен способ параметризации управления, основанный на аппроксимации неизвестного оптимального управления линейными комбинациями квадратичных экспонент (функций Гаусса) с варьируемыми (управляемыми) параметрами. Аппроксимация функций, заданных на всей числовой оси, линейными комбинациями квадратичных экспонент, признается одним из достаточно эффективных методов и активно изучается, см., например, [20]. При этом параметрами аппроксимации выступают обычно весовые коэффициенты функций Гаусса в соответствующих линейных комбинациях. Отдельно укажем работу [21], где исследовался вопрос о наилучшем выборе параметров формы. В работе [22], в отличие от традиционного подхода, данный вид аппроксимации исследовался для функций, заданных на конечном фиксированном отрезке при варьировании параметров всех трех типов. В [16] показано, что материнский вейвлет «мексиканская шляпа» на любом конечном фиксированном отрезке сколь угодно точно аппроксимируется линейной комбинацией в точности двух квадратичных экспонент. Именно этим объясняется эффективность данного способа аппроксимации, поскольку вейвлеты известны как весьма эффективный инструмент. Отметим, что функции Гаусса являются частным случаем радиальных базисных функций, см., например, [23]. Вообще, использование экспоненциальных функций может быть интересным в виду того, что для них установлен ряд специальных неравенств, которые могут оказаться полезными [24].

Как показано в [17], использование шаблона параметризации управления с помощью функций Гаусса в задаче о мягкой посадке позволяет обойтись всего лишь тремя параметрами для обеспечения устойчивости численного решения. Более того, управление оказывается гладким (то есть более щадящим к оборудованию и персоналу, если таковой имеется), и при этом удается удовлетворить ограничениям с высокой степенью точности, совершенно несущественным образом проиграв по расходу топлива. Сравнение по эффективности численного решения при использовании различных способов параметризации управления см. также в [16] (на примере задачи о прокладке трассы; в [25] см. результаты численного решения при использовании сплайн-интерполяции управления).

Общие условия относительно исходной задачи оптимального управления, гарантирующие строго теоретически гибкость параметризованной системы ограничений в рамках шаблона с функциями Гаусса при достаточном количестве параметров, — это и есть основной результат данной статьи. С практической точки зрения важно знать эти условия, чтобы не «потерпеть фиаско» при численных расчетах. Кроме того, на примере задачи о мягкой посадке иллюстрируется методика проверки этих условий.

Вероятно, для кусочно постоянного шаблона управления с подвижной (управляемой) сеткой можно доказать что-то похожее (в численных экспериментах сходный эффект проявляется). Но с практической точки зрения, такой результат был бы менее важен, поскольку шаблон с функциями Гаусса демонстрирует большую эффективность.

§ 2. Достаточные условия гибкости системы ограничений

Далее, имея в виду чисто теоретическое исследование, будем считать, что система (0.3) имеет решение $\rho = \overline{\rho} \in \mathbb{R}^{\nu}$. Кроме того, далее будем рассматривать более конкретный случай, когда $\Pi = [a;b] \subset \mathbb{R}$, $s = 1$, и используется параметризация вида

$$u(t) = \Phi\big(\Phi_\nu[\rho]\big), \quad \rho = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^{3\nu+1}, \quad \alpha = (\alpha_0,\ldots,\alpha_\nu) \in \mathbb{R}^{\nu+1},$$
$$\beta,\gamma \in \mathbb{R}^{\nu}; \quad \Phi_\nu[\rho](t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \exp\left[-\frac{(t-\beta_j)^2}{\gamma_j^2+\varepsilon}\right],$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, нужное для того, чтобы избежать нуля в знаменателе. Здесь предполагается, что $\Phi(t)$ — функция, отображающая числовую ось в интервал $(0;\sigma)$ и обладающая непрерывной положительной производной. В частности, можно считать, что $\Phi(t) = \dfrac{\sigma}{2}\left(1 + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. С помощью функции вида $\Phi_\nu[\rho](t)$ можно при достаточно большом ν сколь угодно точно аппроксимировать любую функцию как в $\mathbf{C}[a;b]$, так и в $L_p[a;b]$, $p \in [1;+\infty)$, см. [16, 17, 22], а также следующее утверждение. Соответственно, данный способ параметризации позволяет при достаточно большом ν сколь угодно точно аппроксимировать любую функцию как в $\mathbf{C}[a;b]$, так и в $L_p[a;b]$, $p \in [1;+\infty)$, со значениями в $[0;\sigma]$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $[a;b] \subset \mathbb{R}$ — *произвольно фиксированный конечный отрезок. Тогда любой полином степени* $n \geqslant 0$ *можно сколь угодно точно в метрике* $\mathbf{C}[a;b]$ *аппроксимировать некоторой функцией вида*

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{\beta,\gamma_j}(t), \quad \gamma_j = \gamma/\sqrt{j}, \quad \varphi_{\beta,\gamma}(t) = \exp\bigl[-(t-\beta)^2/\gamma^2\bigr],$$

при всех достаточно больших числах $\beta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *и соответствующем выборе коэффициентов* α_j, $j = \overline{0,n}$ *(здесь, очевидно,* $\varphi_{\beta,\gamma_j} = \varphi^j_{\beta,\gamma}$*).*

Доказательство теоремы 2.1 получается очевидной модификацией доказательства аналогичной теоремы из [17].

Кроме того, далее будем считать, что набор $\rho = \overline{\rho}$ допустим, то есть $J_j\{\overline{\rho}\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, причем градиенты $\nabla J_j[u\{\overline{\rho}\}]$ допускают интегральное представление:

$$\nabla J_j(u\{\overline{\rho}\})[\Delta u] = \int_a^b \omega_j(t)\Delta u(t)\,dt, \quad j = \overline{1,\mu}, \quad \Delta u \in L_\infty[a;b].$$

Отсюда нетрудно получить, что существуют частные производные

$$\frac{\partial J_j\{\overline{\rho}\}}{\partial \alpha_0} = \int_a^b \omega_j(t)\overline{\Phi}(t)\,dt, \quad \frac{\partial J_j\{\overline{\rho}\}}{\partial \alpha_i} = \int_a^b \omega_j(t)\overline{\Phi}(t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]dt,$$

$$\frac{\partial J_j\{\overline{\rho}\}}{\partial \beta_i} = \int_a^b \omega_j(t)\overline{\Phi}(t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]\alpha_i\left[\frac{2(t-\beta_i)}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]dt,$$

$$\frac{\partial J_j\{\overline{\rho}\}}{\partial \gamma_i} = \int_a^b \omega_j(t)\overline{\Phi}(t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]\alpha_i\gamma_i\left[\frac{2(t-\beta_i)^2}{(\gamma_i^2+\varepsilon)^2}\right]dt,$$

где $i = \overline{1,\nu}$, $j = \overline{1,\mu}$, $\overline{\Phi}(t) = \overline{\Phi}[\overline{\rho}](t) = \Phi'\bigl(\Phi_\nu[\overline{\rho}](t)\bigr)$.

Непосредственно из теоремы Люстерника [26, глава 4, § 2, лемма 2.2, с. 154] получаем, что справедлива

Л е м м а 2.1. *Пусть* $J_j\{\overline{\rho}\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, *а градиенты* $\dfrac{\partial J_j}{\partial \rho}\{\overline{\rho}\}$, $j = \overline{1,\mu}$, *вместе с некоторыми векторами* $g_{\mu+1},\ldots,g_{3\nu+1} \in \mathbb{R}^{3\nu+1}$ *образуют базис в пространстве* $\mathbb{R}^{3\nu+1}$. *Предположим, что существует ненулевой вектор* $h \in \mathbb{R}^{3\nu+1}$, *удовлетворяющий условию:* $\left\langle \dfrac{\partial J_j}{\partial \rho}\{\overline{\rho}\}, h\right\rangle = 0$, $j = \overline{1,\mu}$. *Тогда найдется* $(3\nu+1)$*-мерная вектор-функция* $r(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, *такая, что для точки вида* $\rho_\tau = \overline{\rho} + \tau h + r(\tau)$, *имеем:* $J_j\{\rho_\tau\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, $\langle g_j, r(\tau)\rangle = 0$, $j = \overline{\mu+1, 3\nu+1}$, *при всех достаточно малых* τ, $r(\tau) = o(\tau)$.

Непосредственно из леммы 2.1 вытекает

Л е м м а 2.2. *Пусть* $J_j\{\overline{\rho}\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, $\mu < 3\nu + 1$, *а градиенты* $\dfrac{\partial J_j}{\partial \rho}\{\overline{\rho}\}$, $j = \overline{1,\mu}$, *линейно независимы. Тогда система* $J_j\{\rho\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, *является гибкой в точке* $\rho = \overline{\rho}$.

Далее покажем, что в случае линейной независимости функций $\omega_j(t)$, $t \in [a;b]$, для любого допустимого набора $\overline{\rho} \in \mathbb{R}^{3\nu+1}$, то есть такого, что $J_j\{\overline{\rho}\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, за счет повышения размерности пространства параметров, систему $\dfrac{\partial J_j}{\partial \rho}\{\overline{\rho}\}$, $j = \overline{1,\mu}$, в расширенном пространстве можно сделать линейно независимой, а тем самым, в расширенном пространстве система ограничений становится гибкой по лемме 2.2.

Теорема 2.2. *Пусть функции $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,\mu}$, суммируемы и линейно независимы на $[a;b]$. Тогда для любого допустимого набора $\overline{\rho} \in \mathbb{R}^{3\nu+1}$, то есть такого, что $J_j\{\overline{\rho}\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, найдутся $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_1 > \nu$, $\widetilde{\alpha}_i = 0$, $\widetilde{\beta}_i$, $\widetilde{\gamma}_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{\nu+1,\nu_1}$, такие, что для расширенного набора $\widetilde{\rho} = (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$,*

$$\widetilde{\alpha} = (\overline{\alpha}, \widetilde{\alpha}_{\nu+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\nu_1}), \quad \widetilde{\beta} = (\overline{\beta}, \widetilde{\beta}_{\nu+1}, \ldots, \widetilde{\beta}_{\nu_1}), \quad \widetilde{\gamma} = (\overline{\gamma}, \widetilde{\gamma}_{\nu+1}, \ldots, \widetilde{\gamma}_{\nu_1}),$$

получим, что $J_j\{\widetilde{\rho}\} = 0$, $j = \overline{1,\mu}$, а градиенты $\dfrac{\partial J_j}{\partial \widetilde{\rho}}\{\widetilde{\rho}\}$, $j = \overline{1,\mu}$, линейно независимы. Тем самым, в точке $\widetilde{\rho}$ система становится гибкой в пространстве $\mathbb{R}^{3\nu_1+1}$.

Доказательство теоремы 2.2 приведено в § 4.

Замечание 1. Пусть функции $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,\mu}$, суммируемы и линейно независимы на $[a;b]$. Ясно, что градиенты $\dfrac{\partial J_j}{\partial \rho}\{\overline{\rho}\}$, $j = \overline{1,\mu}$, будут линейно зависимы лишь тогда, когда для соответствующей нетривиальной (и очевидно, тождественно не равной нулю) линейной комбинации $\psi(t) = \sum\limits_{j=1}^{\mu} \lambda_j \omega_j(t)$ одновременно выполняются равенства

$$\int\limits_a^b \psi(t)\overline{\Phi}[\overline{\rho}](t)\,dt = 0, \quad \int\limits_a^b \psi(t)\overline{\Phi}[\overline{\rho}](t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]dt = 0,$$

$$\int\limits_a^b \psi(t)\overline{\Phi}[\overline{\rho}](t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]\alpha_i\left[\frac{2(t-\beta_i)}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]dt = 0,$$

$$\int\limits_a^b \psi(t)\overline{\Phi}[\overline{\rho}](t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]\alpha_i\gamma_i\left[\frac{2(t-\beta_i)^2}{(\gamma_i^2+\varepsilon)^2}\right]dt = 0,$$

для $i = \overline{1,\nu}$. Понятно, что, вообще говоря, это событие достаточно маловероятное, причем вероятность уменьшается с ростом ν. Значение теоремы 2.2 — в том, что даже если такое маловероятное событие и случится, то оно не будет критическим, поскольку гибкость системы ограничений все равно можно обеспечить, если некоторым образом увеличить количество параметров ν. Таким образом, ключевым условием для обеспечения гибкости системы ограничений является линейная независимость функций $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,\mu}$.

Замечание 2. Вообще говоря, мы не утверждаем, что аналог теоремы 2.2 нельзя доказать для классических способов параметризации управления (этот вопрос заслуживает отдельного исследования). Способ параметризации с помощью функций Гаусса нас интересует вследствие его эффективности, которая обнаруживается в численных экспериментах и подтверждается теоретически. Поэтому имеет смысл его всестороннее изучение, в частности, и на предмет гибкости.

§ 3. Пример: задача о посадке на Луну

Рассмотрим управляемую систему из задачи о мягкой посадке на Луну, см., например, [19, глава III, § 3, п. 3, с. 125–128] (здесь h — высота, v — скорость, m — масса, u — расход топлива в единицу времени):

$$h' = v, \quad v' = -g + \frac{k}{m}u, \quad m' = -u; \quad h(0) = H, \quad v(0) = V, \quad m(0) = M. \tag{3.1}$$

Ограничение на значения управления: $u(t) \in [0; \sigma_*]$, $t \in [0; T]$. Значения параметров: $k = 3000$, $\sigma_* = 7.08$, $g = 1.62$, $H = 190000$, $V = -2650$, $M = 500$.

$$\text{Условие мягкой посадки:} \quad h[u](T) = v[u](T) = 0. \tag{3.2}$$

Функционал цели: $m[u](T) \to \max$.

Фактически, имеем управляемую двухточечную краевую задачу (3.1), (3.2). Чтобы обеспечить дифференцируемость правой части по фазовым переменным, переобозначим переменные: $x_1 = h$, $x_2 = v$, $x_3 = \dfrac{1}{m}$. Здесь мы исходим из того, что для искомого оптимального управления масса аппарата $m(t) > 0$, $t \in [0; T]$ (а на самом деле, с физической точки зрения, $m(t) \geqslant M_0$, где M_0 — сухая масса спускаемого аппарата). В результате задача переформулируется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \quad x_2' = -g + kx_3u, \quad x_3' = (x_3)^2u; \\ x_1(0) = H, \quad x_2(0) = V, \quad x_3(0) = 1/M; \end{cases} \tag{3.3}$$
$$x_i[u](T) = 0, \quad i = 1,2; \quad x_3[u](T) \to \min.$$

Финальное время маневра T является здесь свободным. Поэтому при использовании того или иного способа параметризации управления $u(t)$ в число параметров, по которым вычисляется значение функционалов задачи, следует включить также и T. Однако к обсуждаемой теме это не имеет непосредственного отношения, поскольку введение дополнительного параметра не испортит линейной независимости градиентов функционалов по набору параметров. Способ вычисления производных функционалов (а также обоснования существования этих производных) по параметрам, и в том числе, по T, можно уяснить из работы [18]; см. также [25].

З а м е ч а н и е 3. Из аналитического решения задачи минимизации (3.3) с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина известна структура оптимального управления:

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0; \tau], \\ \sigma_*, & \text{если } t \in (\tau; T]. \end{cases}$$

Момент переключения τ и финальное время T нам, вообще говоря, неизвестны. В соответствии с информацией о структуре оптимального управления естественным образом возникает мысль определить набор параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ и произвести параметризацию искомого управления в виде:

$$\tau = \alpha_1^2, \quad T = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad u[\alpha](t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; \tau), \\ \sigma_*, & t \in [\tau; T]. \end{cases}$$

Однако, как показано в работе [17], система параметризованных ограничений в этом случае оказывается жесткой, и более того, плохо обусловленной (иначе говоря, сильно неустойчивой к малейшим погрешностям вычислений); попытка численного решения аппроксимирующей задачи минимизации приводит к очень плохим результатам (см. на этот счет также [18]); использование параметризации с помощью функций Гаусса позволяет получить успешное численное решение уже при $\nu = 1$, причем система параметризованных ограничений оказывается разрешимой с высокой степенью точности и по результатам численных экспериментов демонстрирует гибкость и хорошую обусловленность.

Далее для функционалов $J_i[u, T] = x_i[u](T)$, $i = 1, 2$, получим формулы производных Фреше по управлению u в пространстве $L_\infty[0; T]$. С этой целью перепишем их в интегральной форме:

$$J_1[u, T] = x_1(0) + \int\limits_0^T x_2(t)\,dt, \quad J_2[u, T] = x_2(0) - gT + k\int\limits_0^T x_3(t)u(t)\,dt.$$

Управляемая задача Коши может быть переписана в виде

$$x = \theta + A[f(.,x,u)], \quad x \in L_1[0;T],$$

где оператор $A\colon L_1[0;T] \to L_1[0;T]$ определяется формулой $A[z](t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds$, причем $\theta = (H, V, 1/M)^*$, $f(t,x,u) = (x_2, -g + kx_3u, x_3^2u)^*$. Для интегрального функционала $J[u] = \int\limits_0^T F\big(t, x[u](t), u(t)\big)\,dt$ стандартным образом, см., например, [18], устанавливается, что при естественных предположениях относительно функций f и F производная Фреше определяется формулой

$$J'(u)[\Delta u] = \int\limits_0^T \omega(t)\Delta u(t)\,dt, \quad \Delta u \in L_\infty[0;T],$$

где $\omega(t) = \psi^*(t) f'_u\big(t, x[u](t), u(t)\big) + F'_u\big(t, x[u](t), u(t)\big)$, $\psi(t)$ — решение сопряженного уравнения

$$\psi = A^*\big[(f'_x)^*\psi + (F'_x)^*\big], \quad \psi \in L_\infty[0;T]; \quad A^*[z](t) = \int\limits_t^T z(s)\,ds.$$

Иначе говоря, $\psi(t)$ — абсолютно непрерывное решение (в смысле п. в.) сопряженной задачи

$$\psi' = -(f'_x)^*\psi - (F'_x)^*, \quad \psi(T) = 0; \quad f'_x = f'_x\big(t, x[u](t), u(t)\big), \quad F'_x = F'_x\big(t, x[u](t), u(t)\big).$$

Конкретизируем выписанные формулы для функционалов J_1 и J_2. Имеем:

$$f'_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ku \\ 0 & 0 & 2x_3u \end{pmatrix} \Rightarrow (f'_x)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & ku & 2x_3u \end{pmatrix}; \quad f'_u = (0, kx_3, x_3^2)^*.$$

1. Рассмотрим функционал J_1. В данном случае $F(t,x,u) = x_2$, откуда $F'_x = (0,1,0)$, $F'_u = 0$. Сопряженная задача:

$$\begin{cases} \psi'_1 = 0, \\ \psi'_2 = -\psi_1 - 1, \\ \psi'_3 = -ku\psi_2 - 2x_3u\psi_3; \\ \psi(T) = 0. \end{cases}$$

Соответственно, $\omega_1 = \psi^* f'_u + F'_u = k\psi_2 x_3 + \psi_3 x_3^2$. Очевидно, $\psi_1 \equiv 0$, откуда $\psi_2 = T - t$. Стало быть, $\psi'_3 = k(t-T)u - 2x_3u\psi_3$, $\omega_1 = k(T-t)x_3 + \psi_3 x_3^2$.

2. Рассмотрим функционал J_2. В данном случае $F(t,x,u) = kx_3u$, следовательно, $F'_x = (0,0,ku)$, $F'_u = kx_3$. Сопряженная задача:

$$\begin{cases} \varphi'_1 = 0, \\ \varphi'_2 = -\varphi_1, \\ \varphi'_3 = -ku\varphi_2 - 2x_3u\varphi_3 - ku; \\ \varphi(T) = 0. \end{cases}$$

Соответственно, $\omega_2 = \varphi^* f'_u + F'_u = k\varphi_2 x_3 + \varphi_3 x_3^2 + kx_3$. Очевидно, $\varphi_1 \equiv 0$, откуда $\varphi_2 \equiv 0$. Стало быть, $\varphi'_3 = -2x_3u\varphi_3 - ku$, $\omega_2 = \varphi_3 x_3^2 + kx_3$.

Получим для данного примера условие применимости теоремы 2.2.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнено условие*

$$\int\limits_0^T u(t)\,dt \neq M. \tag{3.4}$$

Тогда функции $\omega_1(t)$ *и* $\omega_2(t)$ *линейно независимы на* $[0;T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, заметим, что $x_3(t) > 0$ для всех $t \in [0;T]$. Далее этот факт будем неоднократно использовать. Возможен один и только один из следующих двух случаев.

1) $\omega_2 \equiv 0$. Тогда $x_3\left(\varphi_3 x_3 + k\right) \equiv 0$, откуда $\varphi_3 x_3 \equiv -k$. Следовательно,

$$\varphi_3' = k(2u-u) = ku \;\Rightarrow\; \varphi_3 = -k\int\limits_t^T u(s)\,ds \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_3} = \int\limits_t^T u(s)\,ds.$$

С другой стороны, непосредственно из (3.3) получаем:

$$\int \frac{dx_3}{x_3^2} = \int u\,dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_3} = M - \int\limits_0^t u(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Таким образом,

$$\int\limits_t^T u(s)\,ds = M - \int\limits_0^t u(s)\,ds \;\Rightarrow\; \int\limits_0^T u(s)\,ds = M.$$

Получили противоречие с условием (3.4).

2) $\omega_2 \not\equiv 0$. Рассуждая от противного, предположим, что функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ линейно зависимы на $[0;T]$. Тогда существуют константы C_1, C_2, одновременно не равные нулю и такие, что

$$C_1\omega_1(t) + C_2\omega_2(t) \equiv 0 \quad \text{на} \quad [0;T].$$

Если бы $C_1 = 0$, то $C_2 \neq 0$, а в таком случае, $\omega_2(t) \equiv 0$ на $[0;T]$. Но это противоречит предположению. Таким образом, $C_1 \neq 0$ и при $C = -C_2/C_1$ получаем:

$$\omega_1(t) = C\omega_2(t) \;\Rightarrow\; k(T-t)x_3 + \psi_3 x_3^2 = C\left\{\varphi_3 x_3^2 + kx_3\right\} \;\Rightarrow\; x_3(C\varphi_3 - \psi_3) = k(T-t) - Ck.$$

В частности, при $t = T$ имеем: $Ck = 0$, следовательно, $C = 0$, $\dfrac{1}{x_3} = -\dfrac{\psi_3}{k(T-t)}$. При этом

$$\psi_3' = k(t-T)u - 2x_3 u\psi_3 = k(t-T)u - 2k(t-T)u = k(T-t)u,$$

откуда

$$\psi_3 = -k\int\limits_t^T (T-s)u(s)\,ds \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_3} = \frac{1}{T-t}\int\limits_t^T (T-s)u(s)\,ds.$$

Принимая во внимание соотношение (3.5), получаем:

$$\int\limits_t^T (T-s)u(s)\,ds = (T-t)\left(M - \int\limits_0^t u(s)\,ds\right), \quad \forall t \in [0;T].$$

Дифференцируя это тождество по $t \in [0; T]$, получаем:

$$(t - T)u(t) = -\left(M - \int\limits_0^t u(s)\,ds\right) - (T - t)u(t),$$

следовательно, $\int\limits_0^t u(s)\,ds \equiv M$, откуда $u(t) \equiv 0$, и $0 = M$, что невозможно. Таким образом, наше предположение неверно, следовательно, функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ линейно независимы на $[0; T]$.

§ 4. Доказательство теоремы 2.2

Доказательство теоремы 2.2 основано на следующих леммах.

Прежде всего, для простоты рассмотрим случай, когда функции $\omega_j(t)$ непрерывны. Поскольку в конкретных приложениях $\omega_j(t)$ являются зачастую абсолютно непрерывными решениями некоторой сопряженной задачи, то этот случай, сам по себе, представляется достаточно содержательным.

Л е м м а 4.1. *Пусть функция $\omega(t)$ непрерывна и $\omega(t) \not\equiv 0$ на $[a; b]$. Тогда найдутся $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, α_i, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{\nu + 1, \nu_1}$, такие, что для функции*

$$\psi(t) = \delta_0 + \sum_{i=\nu+1}^{\nu_1} \alpha_i \exp\left[-\frac{(t - \beta_i)^2}{\gamma_i^2 + \varepsilon}\right]$$

будет выполнено неравенство $\int\limits_a^b \omega(t)\overline{\Phi}(t)\psi(t)\,dt \neq 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию, а также с учетом положительности функции $\overline{\Phi}(t)$, имеем:

$$\omega_0(t) = \omega(t)\overline{\Phi}(t) \not\equiv 0.$$

Поэтому существует $t_0 \in (a; b)$: $\omega_0(t_0) \neq 0$. Предположим, для определенности, что $\omega_0(t_0) > 0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции найдется отрезок $[\sigma_1; \sigma_2] \subset (a; b)$, на котором функция $\omega_0(t) > 0$. По теореме Вейерштрасса, найдется число $\sigma_0 > 0$: $\omega_0(t) \geqslant \sigma_0$ для всех $t \in [\sigma_1; \sigma_2]$. Определим функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t - \sigma_1)(\sigma_2 - t), \ t \in [\sigma_1; \sigma_2], \\ 0, \ \text{иначе}. \end{cases}$$

Соответственно,

$$\int\limits_a^b \omega_0(t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \omega_0(t)\varphi(t)\,dt \geqslant \sigma_0 \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi(t)\,dt = \sigma_3 > 0.$$

Функция $\omega_0(t)$ непрерывна, следовательно, ограничена, то есть $|\omega_0(t)| \leqslant \sigma_4$ для всех $t \in [a; b]$. Поскольку $\varphi(t)$ на $[a; b]$ непрерывна, то в соответствии с теоремой 2.1 и аппроксимационной теоремой Вейерштрасса (об аппроксимации непрерывных функций полиномами), функцию $\varphi(t)$ можно сколь угодно точно в метрике $\mathbf{C}[a; b]$ приблизить функцией вида $\psi(t)$. Таким образом, можно считать, что

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\sigma_3}{2\sigma_4(b - a)} \quad \forall t \in [a; b].$$

Тогда получаем:

$$\int\limits_a^b \omega_0\psi\,dt = \int\limits_a^b \omega_0\varphi\,dt + \int\limits_a^b \omega_0(t)\big[\psi(t)-\varphi(t)\big]\,dt \geqslant \sigma_3 - \sigma_4\int\limits_a^b \big|\psi(t)-\varphi(t)\big|\,dt \geqslant \frac{\sigma_3}{2} > 0. \quad \square$$

Л е м м а 4.2. *Пусть функции $\omega_j(t)$, $j=\overline{1,\mu}$, непрерывны и линейно независимы на $[a;b]$. Тогда для любого допустимого набора $\overline{\rho}\in\mathbb{R}^{3\nu+1}$, то есть такого, что $J_j\{\overline{\rho}\}=0$, $j=\overline{1,\mu}$, найдутся $\nu_1\in\mathbb{N}$, $\nu_1>\nu$, $\widetilde{\alpha}_i=0$, $\widetilde{\beta}_i$, $\widetilde{\gamma}_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{\nu+1,\nu_1}$, такие, что для расширенного набора $\widetilde{\rho}=(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})$,*

$$\widetilde{\alpha}=(\overline{\alpha},\widetilde{\alpha}_{\nu+1},\ldots,\widetilde{\alpha}_{\nu_1}),\quad \widetilde{\beta}=(\overline{\beta},\widetilde{\beta}_{\nu+1},\ldots,\widetilde{\beta}_{\nu_1}),\quad \widetilde{\gamma}=(\overline{\gamma},\widetilde{\gamma}_{\nu+1},\ldots,\widetilde{\gamma}_{\nu_1}),$$

получим, что $J_j\{\widetilde{\rho}\}=0$, $j=\overline{1,\mu}$, а градиенты $\dfrac{\partial J_j}{\partial\widetilde{\rho}}\{\widetilde{\rho}\}$, $j=\overline{1,\mu}$, линейно независимы. Тем самым, в точке $\widetilde{\rho}$ система становится гибкой в пространстве $\mathbb{R}^{3\nu_1+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, рассмотрим случай, когда не все градиенты $\dfrac{\partial J_j}{\partial\rho}\{\overline{\rho}\}$, $j=\overline{1,\mu}$, равны нулю. В этом случае данная система градиентов имеет линейно независимую подсистему. Тогда, выбрав произвольно один из оставшихся градиентов, можем единственным образом разложить его по этой линейно независимой подсистеме, все остальные градиенты можно включить в соответствующую нулевую линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами. Как мы покажем далее, при заданном способе выбора коэффициентов линейной комбинации, найдется такой способ расширения набора параметров $\overline{\rho}$ до некоторого набора $\widetilde{\rho}$, для которого система ограничений останется выполненной и при этом линейная комбинация с теми же коэффициентами градиентов по расширенному набору параметров будет ненулевой. Последнее будет означать, что линейно независимая подсистема системы градиентов по расширенному набору параметров расширилась на один вектор. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов путем расширения набора параметров придем к ситуации, когда вся система градиентов станет линейно независимой.

Итак, пусть заданы числа $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,\mu}$, одновременно не равные нулю и такие, что $\sum\limits_{j=1}^{\mu}\lambda_j\dfrac{\partial J_j}{\partial\rho}\{\overline{\rho}\}=0$. Положим $\omega(t)=\sum\limits_{j=1}^{\mu}\lambda_j\omega_j(t)$. Поскольку выполнены условия леммы 4.1, то справедливо ее утверждение. При этом, учитывая, что в соответствии с формулой Маклорена, константу можно сколь угодно точно на $[a;b]$ аппроксимировать квадратичной экспонентой, можем считать, без ограничения общности рассуждений, что $\delta_0=0$. Примем $\widetilde{\alpha}_i=0$, $\widetilde{\beta}_i=\beta_i$, $\widetilde{\gamma}_i=\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{\nu+1,\nu_1}$. Тогда очевидно, что $\Phi_{\nu_1}[\widetilde{\rho}]\equiv\Phi_\nu[\overline{\rho}]$. Предположим, что $\sum\limits_{j=1}^{\mu}\lambda_j\dfrac{\partial J_j}{\partial\widetilde{\rho}}\{\widetilde{\rho}\}=0$. Расписывая данное векторное равенство по компонентам, отвечающим параметрам $\widetilde{\alpha}_i$ для $i=\overline{\nu+1,\nu_1}$, получаем:

$$\int\limits_a^b\left(\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j\omega_j(t)\right)\overline{\Phi}(t)\exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]dt=0,\quad i=\overline{\nu+1,\nu_1}.$$

Домножая i-е равенство на параметр α_i из леммы 4.1 и складывая, получаем соотношение

$$\int\limits_a^b\left(\sum_{j=1}^{\mu}\lambda_j\omega_j(t)\right)\overline{\Phi}(t)\psi(t)\,dt=0,$$

которое противоречит лемме 4.1. Стало быть, наше предположение неверно.

Рассмотрим теперь случай, когда все градиенты $\dfrac{\partial J_j}{\partial \rho}\{\overline{\rho}\}$, $j = \overline{1,\mu}$, равны нулю. Однако, в силу линейной независимости функций $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,\mu}$, ни одна из них не может быть тождественным нулем. Тогда, выбрав в качестве функции $\omega(t)$ любую из них и пользуясь леммой 4.1, аналогично тому, как это было сделано выше, заключаем, что существует такой способ расширения набора параметров $\overline{\rho}$, при котором выполнение ограничений сохраняется, а соответствующий градиент становится ненулевым. $\square$

Далее мы покажем, что лемма 4.1 обобщается на случай $\omega \in L_1[a;b]$.

Л е м м а 4.3. *Пусть функция* $\omega(t)$ *суммируема и* $\operatorname{mes}\big\{t \in [a;b]\colon \omega(t) \neq 0\big\} > 0$. *Тогда найдутся* $\nu_1 \in \mathbb{N}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$, α_i, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{\nu+1,\nu_1}$, *такие, что для функции*

$$\psi(t) = \delta_0 + \sum_{i=\nu+1}^{\nu_1} \alpha_i \exp\left[-\frac{(t-\beta_i)^2}{\gamma_i^2+\varepsilon}\right]$$

будет выполнено неравенство $\int\limits_a^b \omega(t)\overline{\Phi}(t)\psi(t)\,dt \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию, а также с учетом положительности функции $\overline{\Phi}(t)$, имеем: $\operatorname{mes}\big\{t \in [a;b]\colon \omega_0(t) \neq 0\big\} > 0$, где $\omega_0(t) = \omega(t)\overline{\Phi}(t)$. При этом ясно, что $\omega_0 \in L_1[a;b]$. Предположим, для определенности, что $\operatorname{mes}\Pi_+ > 0$, где $\Pi_+ = \big\{t \in [a;b] : \ \omega_0(t) > 0\big\}$. По определению меры Лебега, найдется открытое множество $Q \supset \Pi_+$, $Q \subset [a;b]$, мера которого сколь угодно мало отличается от меры Π_+. Отсюда и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, получаем, что можно выбрать множество Q так, чтобы $\int\limits_Q \omega_0(t)\,dt > 0$. Как известно, открытое множество Q представимо в виде не более, чем счетного объединения попарно неналегающих промежутков. Будем считать, для определенности, что речь идет о счетном объединении отрезков $S_j = [a_j;b_j]$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$0 < \int\limits_Q \omega_0(t)\,dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{S_j\cap\Pi_+} \omega_0(t)\,dt - \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{S_j\setminus\Pi_+} |\omega_0(t)|\,dt,$$

и следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{S_j\cap\Pi_+} \omega_0(t)\,dt > \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{S_j\setminus\Pi_+} |\omega_0(t)|\,dt.$$

Если бы каждое слагаемое в сумме слева было бы меньше или равно соответствующего слагаемого в сумме справа, то и вся левая сумма была бы меньше или равна суммы справа. Поэтому существуют индекс $j \in \mathbb{N}$ и число $\xi > 1$ такие, что для $[\sigma_1;\sigma_2] = S_j$ имеем:

$$\int\limits_{[\sigma_1;\sigma_2]\cap\Pi_+} |\omega_0(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\xi}\,\overline{\sigma}, \quad \overline{\sigma} = \int\limits_{[\sigma_1;\sigma_2]\cap\Pi_+} \omega_0(t)\,dt > 0.$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, подберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$\int\limits_{\sigma_1-\varepsilon}^{\sigma_1} |\omega_0(t)|\,dt + \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_2+\varepsilon} |\omega_0(t)|\,dt < \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\overline{\sigma}.$$

Построим непрерывную функцию $\varphi(t)$ так, чтобы

$$\varphi(t) \begin{cases} = 1, & t \in [\sigma_1;\sigma_2], \\ = 0, & t \in [a;b] \setminus [\sigma_1-\varepsilon;\sigma_2+\varepsilon], \\ \in [0;1], & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $\varphi(t)$ на $[a; b]$ непрерывна, то в соответствии с теоремой 2.1 и аппроксимационной теоремой Вейерштрасса (об аппроксимации непрерывных функций полиномами), функцию $\varphi(t)$ можно сколь угодно точно в метрике $\mathbf{C}[a; b]$ приблизить функцией вида $\psi(t)$. Таким образом, можно считать, что

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\overline{\sigma}}{\|\omega_0\|_{L_1}} \quad \forall t \in [a; b].$$

Тогда

$$\int\limits_a^b \omega_0(t)\psi(t)\,dt = \int\limits_a^b \omega_0(t)\big[\psi(t) - \varphi(t)\big]\,dt + \int\limits_{\sigma_1-\varepsilon}^{\sigma_2+\varepsilon} \omega_0(t)\varphi(t)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\overline{\sigma} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\overline{\sigma} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\overline{\sigma} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\overline{\sigma} > 0. \qquad \square$$

Заменяя в доказательстве леммы 4.2 ссылку на лемму 4.1 ссылкой на лемму 4.3, получаем, что справедлива теорема 2.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conway B. A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems // Journal of Optimization Theory and Applications. 2012. Vol. 152. Issue 2. P. 271–306. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9918-z
2. Teo K. L., Li B., Yu Ch., Rehbock V. Applied and computational optimal control. Cham: Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69913-0
3. Li B., Guo X., Zeng X., Dian S., Guo M. An optimal PID tuning method for a single-link manipulator based on the control parametrization technique // Discrete and Continuous Dynamical Systems — S. 2020. Vol. 13. No. 6. P. 1813–1823. https://doi.org/10.3934/dcdss.2020107
4. Farooqi H., Fagiano L., Colaneri P., Barlini D. Shrinking horizon parametrized predictive control with application to energy-efficient train operation // Automatica. 2020. Vol. 112. P. 108635. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108635
5. Zhong W., Lin Q., Loxton R., Teo K. L. Optimal train control via switched system dynamic optimization // Optimization Methods and Software. 2021. Vol. 36. Issue 2–3. P. 602–626. https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1604704
6. Liu P., Liu X., Wang P., Li G., Xiao L., Yan J., Ren Zh. Control variable parameterisation with penalty approach for hypersonic vehicle reentry optimisation // International Journal of Control. 2019. Vol. 92. Issue 9. P. 2015–2024. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1426882
7. Wu D., Bai Y., Yu Ch. A new computational approach for optimal control problems with multiple time-delay // Automatica. 2019. Vol. 101. P. 388–395. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.036
8. Mu P., Wang L., Liu Ch. A control parameterization method to solve the fractional-order optimal control problem // Journal of Optimization Theory and Applications. 2020. Vol. 187. Issue 1. P. 234–247. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1163-7
9. Liu Ch., Gong Zh., Yu Ch., Wang S., Teo K. L. Optimal control computation for nonlinear fractional time-delay systems with state inequality constraints // Journal of Optimization Theory and Applications. 2021. Vol. 191. Issue 1. P. 83–117. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01926-8
10. Aliev F. A., Larin V. B. A historical perspective on the parametrization of all stabilizing feedback controllers // Applied and Computational Mathematics. 2019. Vol. 18. No. 3. P. 326–328. https://zbmath.org/?q=1433.49001
11. Zhang Y., Zhang J.-F., Liu X.-K. Implicit function based adaptive control of non-canonical form discrete-time nonlinear systems // Automatica. 2021. Vol. 129. P. 109629. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109629

12. Волин Ю. М., Островский Г. М. О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. Вып. 7. С. 1197–1204. http://mi.mathnet.ru/at11406
13. Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H. A unified computational approach to optimal control problems. New York: John Wiley and Sons, 1991. https://zbmath.org/?q=an:0747.49005
14. Teo K. L., Jennings L. S., Lee H. W. J., Rehbock V. The control parameterization enhancing transform for constrained optimal control problems // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics. 1999. Vol. 40. Issue 3. P. 314–335. https://doi.org/10.1017/S0334270000010936
15. Li R., Teo K. L., Wong K. H., Duan G. R. Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems // Mathematical and Computer Modelling. 2006. Vol. 43. Issue 11–12. P. 1393–1403. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.08.012
16. Чернов А. В. О применении квадратичных экспонент для дискретизации задач оптимального управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 558–575. https://doi.org/10.20537/vm170406
17. Чернов А. В. О применении функций Гаусса для численного решения задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 51–69. https://doi.org/10.1134/S0005231019060035
18. Чернов А. В. О дифференцировании функционалов аппроксимирующих задач в рамках метода подвижных узлов при решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 124. С. 861–876. https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-124-861-876
19. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003.
20. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. Providence: AMS, 2007.
21. Luh L.-T. The shape parameter in the Gaussian function // Computers and Mathematics with Applications. 2012. Vol. 63. Issue 3. P. 687–694. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032
22. Чернов А. В. Об использовании квадратичных экспонент с варьируемыми параметрами для аппроксимации функций одного переменного на конечном отрезке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 267–282. https://doi.org/10.20537/vm170210
23. Buhmann M. D. Radial basis functions: theory and implementations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241
24. Laforgia A., Natalini P. Exponential, gamma and polygamma functions: simple proofs of classical and new inequalities // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 407. Issue 2. P. 495–504. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.05.045
25. Чернов А. В. О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 6 (1). С. 107–114. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18294335
26. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2008.

Поступила в редакцию 23.11.2021
Принята в печать 13.02.2022

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24;
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А. В. Чернов. О гибкости системы ограничений при аппроксимации задач оптимального управления // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 59. С. 114–130.

A. V. Chernov

On flexibility of constraints system under approximation of optimal control problems

Keywords: lumped optimal control problems with functional equality constraints, parametric approximation of control, rigidity and flexibility of constraints system, Gaussian functions, quadratic exponentials.

MSC2020: 41A30, 49M25, 49N90

DOI: 10.35634/2226-3594-2022-59-08

For finite-dimensional mathematical programming problems (approximating problems) being obtained by a parametric approximation of control functions in lumped optimal control problems with functional equality constraints, we introduce concepts of rigidity and flexibility for a system of constraints. The rigidity in a given admissible point is treated in the sense that this point is isolated for the admissible set; otherwise, we call a system of constraints as flexible in this point. Under using a parametric approximation for a control function with the help of quadratic exponentials (Gaussian functions) and subject to some natural hypotheses, we establish that in order to guarantee the flexibility of constraints system in a given admissible point it suffices to increase the dimension of parameter space in the approximating problem. A test of our hypotheses is illustrated by an example of the soft lunar landing problem.

REFERENCES

1. Conway B. A. A survey of methods available for the numerical optimization of continuous dynamic systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2012, vol. 152, issue 2, pp. 271–306. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9918-z
2. Teo K. L., Li B., Yu Ch., Rehbock V. *Applied and computational optimal control*, Cham: Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69913-0
3. Li B., Guo X., Zeng X., Dian S., Guo M. An optimal pid tuning method for a single-link manipulator based on the control parametrization technique, *Discrete and Continuous Dynamical Systems — S*, 2020, vol. 13, no. 6, pp. 1813–1823. https://doi.org/10.3934/dcdss.2020107
4. Farooqi H., Fagiano L., Colaneri P., Barlini D. Shrinking horizon parametrized predictive control with application to energy-efficient train operation, *Automatica*, 2020, vol. 112, p. 108635. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108635
5. Zhong W., Lin Q., Loxton R., Teo K.L. Optimal train control via switched system dynamic optimization, *Optimization Methods and Software*, 2021, vol. 36, issue 2–3, pp. 602–626. https://doi.org/10.1080/10556788.2019.1604704
6. Liu P., Liu X., Wang P., Li G., Xiao L., Yan J., Ren Zh. Control variable parameterisation with penalty approach for hypersonic vehicle reentry optimisation, *International Journal of Control*, 2019, vol. 92, issue 9, pp. 2015–2024. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1426882
7. Wu D., Bai Y., Yu Ch. A new computational approach for optimal control problems with multiple time-delay, *Automatica*, 2019, vol. 101, pp. 388–395. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.036
8. Mu P., Wang L., Liu Ch. A control parameterization method to solve the fractional-order optimal control problem, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2020, vol. 187, issue 1, pp. 234–247. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1163-7
9. Liu Ch., Gong Zh., Yu Ch., Wang S., Teo K.L. Optimal control computation for nonlinear fractional time-delay systems with state inequality constraints, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2021, vol. 191, issue 1, pp. 83–117. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01926-8
10. Aliev F. A., Larin V. B. A historical perspective on the parametrization of all stabilizing feedback controllers, *Applied and Computational Mathematics*, 2019, vol. 18, no. 3, pp. 326–328. https://zbmath.org/?q=1433.49001
11. Zhang Y., Zhang J.-F., Liu X.-K. Implicit function based adaptive control of non-canonical form discrete-time nonlinear systems, *Automatica*, 2021, vol. 129, p. 109629. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109629

12. Volin J. M., Ostrovskii G. M. A method of successive approximations for calculating optimal modes of some distributed-parameter systems, *Automation and Remote Control*, 1966, vol. 26, pp. 1188–1194.
13. Teo K. L., Goh C. J., Wong K. H. *A unified computational approach to optimal control problems*, New York: John Wiley and Sons, 1991. https://zbmath.org/?q=an:0747.49005
14. Teo K. L., Jennings L. S., Lee H. W. J., Rehbock V. The control parameterization enhancing transform for constrained optimal control problems, *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 1999, vol. 40, issue 3, pp. 314–335. https://doi.org/10.1017/S0334270000010936
15. Li R., Teo K. L., Wong K. H., Duan G. R. Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems, *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, vol. 43, issue 11–12, pp. 1393–1403. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2005.08.012
16. Chernov A. V. On the application of Gaussian functions for discretization of optimal control problems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 558–575 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170406
17. Chernov A. V. On application of Gaussian functions for numerical solution of optimal control problems, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, issue 6, pp. 1026–1040. https://doi.org/10.1134/S0005117919060031
18. Chernov A. V. On differentiation of functionals of approximating problems in the frame of solution of free time optimal control problems by the sliding nodes method, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 861–876 (in Russian). https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-124-861-876
19. Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R. *Mathematical theory of control systems design*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. https://zbmath.org/?q=an:0845.93001
20. Maz'ya V., Schmidt G. *Approximate approximations*, Providence: AMS, 2007.
21. Luh L.-T. The shape parameter in the Gaussian function, *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 63, issue 3, pp. 687–694. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.032
22. Chernov A. V. On using Gaussian functions with varied parameters for approximation of functions of one variable on a finite segment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 267–282 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170210
23. Buhmann M. D. *Radial basis functions: theory and implementations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003. https://doi.org/10.1017/CBO9780511543241
24. Laforgia A., Natalini P. Exponential, gamma and polygamma functions: simple proofs of classical and new inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, vol. 407, issue 2, pp. 495–504. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.05.045
25. Chernov A. V. On approximate solution of free time optimal control problems, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2012, no. 6 (1), pp. 107–114 (in Russian).
26. Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V. *Kurs metodov optimizatsii* (A course in optimization methods), Moscow: Nauka, 2008.

Received 23.11.2021
Accepted 13.02.2022

Andrei Vladimirovich Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia;
Nizhny Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A. V. Chernov. On flexibility of constraints system under approximation of optimal control problems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2022, vol. 59, pp. 114–130.