Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Удмуртский государственный университет

Л. А. Белоусов, В. А. Зайцев,
Д. М. Оленчиков

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методическая разработка

Ижевск
1999

УДК 517.911/.958(075.5)
ББК 22.161.68р30
Б 438

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук., доцент **А. В. Чистяков**
канд. физ.-мат. наук., ст. науч. сотр. **Ю. П. Чубурин**

Белоусов Л. А., Зайцев В. А., Оленчиков Д. М.
Б438 Уравнения математической физики: Метод. разраб.
Ижевск, 1999. 20 с.

Методическая разработка предназначена для студентов третьего и четвертого курсов, обучающихся по спец. "Математика" и "Прикладная математика". Разработка включает 12 вариантов индивидуальных заданий по 17 темам, соответствующим лекционному курсу "Уравнения математической физики", который читается преподавателями кафедры дифференциальных уравнений.

ББК 22.161.68р30

Т е м а 1. **ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Методы приведения уравнений к каноническому виду подробно изложены в книге В.Н.Николенко [10, с.9-16]. Краткое изложение этих методов приведено в сборнике задач под редакцией В.С.Владимирова [5, с.29-30]. Примеры разобраны также в лекции Ґ1 по УМФ.

У п р а ж н е н и я

В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения:

1. $u_{xx}\sin^2 x - 2y\sin x u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0;$
2. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^2 u = 0;$
3. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} - 4y^2 u_x = 0;$
4. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0;$
5. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0;$
6. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0;$
7. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0;$
8. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0;$
9. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0;$
10. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0;$

11*. $xu_{xx} - yu_{yy} = 0;$

12*. $yu_{xx} - xu_{yy} = 0.$

Т е м а 2. **ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

Примеры разобраны в лекции Ґ2 по УМФ.

Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + F(x, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0$$

можно привести к каноническому виду (т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i u_{y_i y_i} + \Phi(y, u, u_{y_1}, ..., u_{y_n}) = 0,$$

где $\delta_i \in \{-1, 0, 1\}$) неособым линейным преобразованием $y = B^t x$, где B — матрица такая, что преобразование $\xi = B\eta$ приводит квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ к каноническому виду, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \eta_i \eta_i$.

Упражнения

Привести к каноническому виду уравнения:

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0;$
2. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 2u_x = 0;$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} - u_y = 0;$
4. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0;$
5. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y + u_z = 0;$
6. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} + u_x = 0;$
7. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} + u_x = 0;$
8. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + 3u_{zz} + u_x - 3u_y = 0;$
9. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_{zz} + u_y = 0;$
10. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + u_x + u_y + u_z = 0;$

11*. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} + u_{tt} - 2u_{zt} + u_x + u_y = 0;$

12*. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + 2u_{yt} + 2u_{zz} + 3u_{tt} + u_y = 0.$

Тема 3. **ЗАДАЧА ГУРСА**

Теоретический материал можно найти в книге [10, с.75, 245]. Однако для решения предложенных ниже задач достаточно привести уравнение к каноническому виду, найти общее решение этого уравнения и определить произвольные функции, входящие в выражение для общего решения. Для этого используются граничные условия.

Упражнения

Найти решение задачи Гурса:

1. $u_{xy} + u_x = x, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=0} = x^2;$
2. $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x|, \quad u|_{y=x} = 1,$

   $u|_{y=-x} = (x+1)e^x;$

3. $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad -\dfrac{x}{2} < y < x, \quad x > 0,$

$$u|_{y=x} = 1 + 3x, \quad u|_{y=-\frac{x}{2}} = 1;$$

4. $u_{xx} + yu_{yy} + \dfrac{1}{2}u_y = 0, \quad -\dfrac{x^2}{4} < y < 0, \quad x > 0,$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=-\frac{x^2}{4}} = x^2;$$

5. $u_{xy} - e^x u_{yy} = 0, \quad y > -e^x, \quad x > 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u|_{y=-e^x} = 1 + x^2;$

6. $xu_{xx} + (x - y)u_{xy} - yu_{yy} = 0, \quad 0 < y < x, \quad x > 0,$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=x} = x;$$

7. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0, \quad y > x, \quad x > 1, \quad u|_{y=x} = x, \quad u|_{x=1} = 1;$

8. $u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{2}{x}u_x = 0, \quad y > 1 + |x|,$

$$u|_{y=1+x} = 1 - x, \quad u|_{y=1-x} = 1 + x;$$

9. $3x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0, \quad x < y < x^{-\frac{1}{3}},$

$$0 < x < 1, \quad u|_{y=x} = y, \quad u|_{xy^3=1} = y^2;$$

10. $u_{xy} + x^2yu_x = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{y=0} = x;$

11. $u_{xy} - \dfrac{1}{x - y}(u_x - u_y) = 1, \quad y < -x, \quad x > 2,$

$$u|_{y=-x} = 0, \quad u|_{x=2} = 2 + 2y + \frac{y^2}{2};$$

12. $u_{xx} - u_{yy} + \dfrac{2}{x}u_x = 0, \quad y > 1 + |x|,$

$$u|_{y=1-x} = 1 - x, \quad u|_{y=1+x} = 1 + x.$$

(У к а з а н и е: сделать замену $u = \dfrac{1}{x}v$).

Т е м а 4. **МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОСТИ**

У п р а ж н е н и я

Найти функцию гармоническую внутри единичного круга $r < 1$ такую, что $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где

1. $f(\varphi) = \cos^2\varphi;$
2. $f(\varphi) = \sin^3\varphi;$
3. $f(\varphi) = \cos^4\varphi;$

$$4. \quad f(\varphi) = \sin^6 \varphi.$$

У к а з а н и е: общий вид гармонической функции в круге можно представить в виде ряда

$$u(r,\varphi) = c + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)). \tag{1}$$

Найти функцию гармоническую внутри круга $r < R$ такую, что

$$5. \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \cos^2 \varphi;$$
$$6. \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \cos 2\varphi;$$
$$7. \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = \sin^3 \varphi.$$

Найти функцию гармоническую в кольце $1 < r < 2$ такую, что $u|_{r=1} = f_1(\varphi), \quad u|_{r=2} = f_2(\varphi)$, где

$$8. \quad f_1(\varphi) = 1 + \cos^2 \varphi, \quad f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi;$$
$$9. \quad f_1(\varphi) = \cos^2 \varphi, \quad f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi;$$
$$10. \quad f_1(\varphi) = \sin 3\varphi, \quad f_2(\varphi) = \sin \varphi;$$
$$11. \quad f_1(\varphi) = 1, \quad f_2(\varphi) = \cos \varphi;$$
$$12. \quad f_1(\varphi) = \cos 3\varphi, \quad f_2(\varphi) = \sin^2 \varphi.$$

У к а з а н и е: общий вид гармонической функции в кольце $R_1 < r < R_2$ можно представить в виде ряда

$$u(r,\varphi) = a \ln r + b + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + \frac{C_n}{r^n}) \cos(n\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n r^n + \frac{D_n}{r^n}) \sin(n\varphi). \tag{2}$$

Т е м а 5. **МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^3$**

Теоретический материал по этой теме достаточно подробно изложен в [5, с.189-191].

У п р а ж н е н и я

Найти функцию гармоническую внутри сферического слоя $1 < r < 2$ такую, что $u|_{r=1} = f_1(\theta,\varphi), \quad u|_{r=2} = f_2(\theta,\varphi)$, где

1. $f_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad f_2 = 0;$

2. $f_1 = \sin 2\varphi \sin^2\theta, \quad f_2 = 3\cos\theta;$

3. $f_1 = 12\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad f_2 = 0;$

4. $f_1 = \cos\varphi \sin 2\theta, \quad f_2 = \sin\varphi \sin 2\theta.$

Найти функцию гармоническую вне сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что

5. $u|_{r=R} = \sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi + \pi/4);$

6. $u|_{r=R} = \sin 100\varphi \sin^{100}\theta.$

Найти функцию гармоническую внутри сферы радиуса R с центром в начале координат и такую, что

7. $u|_{r=R} = \sin(2\varphi + \pi/6)\sin^2\theta\cos\theta;$

8. $u|_{r=R} = \cos(2\varphi - \pi/4)\sin^2\theta + \sin\varphi\sin\theta.$

Найти функцию гармоническую внутри единичной сферы с центром в начале координат и такую, что

9. $u|_{r=1} = \cos(2\varphi + \pi/3)\sin^2\theta;$

10. $u|_{r=1} = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin(\varphi + \pi/6);$

11. $u|_{r=1} = \sin\theta(\sin\varphi + \sin\theta);$

12. $u_r|_{r=1} = \sin^{10}\theta \sin 10\varphi, \quad u|_{r=0} = 1.$

Тема 6. **ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА**

Наиболее распространенными методами построения функции Грина являются метод электростатических изображений и метод конформных отображений [10, гл.2], [13, гл.5].

Упражнения

1. Построить функцию Грина задачи Дирихле для следующих областей:

1)четверть плоскости;
2)полуплоскость;
3)полушар;
4)четверть пространства;
7)восьмая часть плоскости;
8)восьмая часть шара;
9)полукруг;
10)четверть круга;

5)полупространство;	11)восьмая часть круга;
6)четверть шара;	12)восьмая часть пространства.

2.Решить задачу Дирихле $\Delta u = 0, \quad u|_S = u_0(x)$ с помощью функции Грина или другим методом для следующих областей:

1. $x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = e^{-4x_1} \sin 5x_2;$
2. $x_2 > 0, \quad x_3 > 0, \quad u_0|_{x_2=0} = 0, \quad u_0|_{x_3=0} = e^{-x_1} \sin 3x_2;$
3. $x_2 > 0, \quad u_0|_{x_2=0} = \dfrac{1}{1+x_1^2};$
4. $x_2 > 0, \quad u_0|_{x_2=0} = \dfrac{x_1}{1+x_1^2};$
5. $x_2 > 0, \quad u_0|_{x_2=0} = \dfrac{x_1^2-1}{(1+x_1^2)^2};$
6. $x_2 > 0, \quad u_0|_{x_2=0} = \cos x_1;$
7. $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad u_0|_{x_1=0} = 0, \quad u_0|_{x_2=0} = 1;$
8. $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad u_0|_{x_1=0} = a, \quad u_0|_{x_2=0} = b;$
9. $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad u_0|_{x_1=0} = 0, \quad u_0|_{x_2=0} = \dfrac{x_1^2}{1+x_1^2};$
10. $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad u_0|_{x_1=0} = 0, \quad u_0|_{x_2=0} = \dfrac{x_1}{(1+x_1^2)^2};$
11. $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad u_0|_{x_1=0} = \sin x_2, \quad u_0|_{x_2=0} = \sin x_1;$
12. $|z| < 1, \quad \mathrm{Im}\, z > 0, \quad u_0|_{r=1} = \sin\varphi, \quad u_0|_{\varphi=0} = u_0|_{\varphi=\pi} = 0.$

Т е м а 7. **МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ**

Теоретическая часть изложена в [5, гл.5,§18].

У п р а ж н е н и я

Вычислить ньютонов потенциал V_n со следующими плотностями:

	а) для шара $\quad |x| < R$		б) для круга $\quad r < R$
1.	$\rho = |x|;$	7.	$\rho = r^2;$
2.	$\rho = |x|^2;$	8.	$\rho = e^{-r};$
3.	$\rho = e^{-|x|};$	9.	$\rho = \frac{1}{1+r^2};$
4.	$\rho = \frac{1}{1+|x|^2};$	10*.	$\rho = \sin r;$
5.	$\rho = \sin |x|;$	11*.	$\rho = \cos r;$
6.	$\rho = \cos |x|;$	12*.	$\rho = \sqrt{r}.$

Т е м а 8. **ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ**

Теоретический материал можно найти в [10, гл.2, §6,7,8; гл.4, §2], [13, гл.2, §2; гл.3 §3; гл.5 §1; гл.6, §1], [4, гл.1, §4; гл.3, §13].

У п р а ж н е н и я

Используя *формулу Даламбера*, решить задачу Коши:

1. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
2. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
3. $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x, \quad u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 1;$
4. $u_{tt} = u_{xx} + e^x, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + \cos x;$
5. $u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
6. $u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x;$
7. $u_{tt} = u_{xx} + 6, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x;$
8. $u_{tt} = u_{xx} + xt, \quad u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x;$
9. $u_{tt} = 9u_{xx} + 6, \quad u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 4x;$
10. $u_{tt} = u_{xx} + \cos x, \quad u|_{t=0} = x + \cos x, \quad u_t|_{t=0} = 0;$
11. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos x, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 1;$
12. $u_{tt} = 2u_{xx} + e^x, \quad u|_{t=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = 0.$

Т е м а 9. **ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ**

Теоретический материал можно найти в [10, гл.2, §6,7,8; гл.4, §2], [13, гл.2, §2; гл.3 §3; гл.5 §1; гл.6, §1], [4, гл.1, §4; гл.3, §13].

У п р а ж н е н и я

Используя *формулу Пуассона* (или другой метод), решить задачу Коши:

1. $u_{tt} = \Delta u + 2, \quad u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = y;$
2. $u_{tt} = \Delta u + 6xyt, \quad u|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = xy;$
3. $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2, \quad u|_{t=0} = e^x \cos y, \quad u_t|_{t=0} = e^y \sin x;$
4. $u_{tt} = \Delta u + t \sin y, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = \sin y;$
5. $u_{tt} = 2\Delta u, \quad u|_{t=0} = 2x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2;$
6. $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = y^2;$
7. $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = e^{3x+4y};$
8. $u_{tt} = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos(bx + cy), \quad u_t|_{t=0} = \sin(bx + cy);$

9. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = (x^2+y^2)^2, \quad u_t|_{t=0} = (x^2+y^2)^2;$

10. $u_{tt} = a^2\Delta u + (x^2+y^2)e^t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$

11. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = 3x^2+2y^2, \quad u_t|_{t=0} = (5x-6y)^2;$

12. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = 6x^2+7y^2, \quad u_t|_{t=0} = (3x-4y)^2.$

Т е м а 10. **ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

Теоретический материал можно найти в [10, гл.2, §6,7,8; гл.4, §2], [13, гл.2, §2; гл.3 §3; гл.5 §1; гл.6, §1], [4, гл.1, §4; гл.3, §13].

У п р а ж н е н и я

Используя *формулу Кирхгофа* (или другой метод), решить задачу Коши:

1. $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}}\sin y\cos z,$

   $u|_{t=0} = e^{x+y}\cos z\sqrt{2}, \quad u_t|_{t=0} = e^{3y+4z}\sin 5x;$

2. $u_{tt} = 3\Delta u + 6(x^2+y^2+z^2), \quad u|_{t=0} = x^2y^2z^2, \quad u_t|_{t=0} = xyz;$

3. $u_{tt} = 8\Delta u + t^2x^2, \quad u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2;$

4. $u_{tt} = \Delta u + 2xyz, \quad u|_{t=0} = x^2+y^2-2z^2, \quad u_t|_{t=0} = 1;$

5. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)^2;$

6. $u_{tt} = a^2\Delta u + (x^2+y^2+z^2)e^t, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0;$

7. $u_{tt} = a^2\Delta u + \cos x\sin ye^z, \quad u|_{t=0} = e^{y+z}, \quad u_t|_{t=0} = \sin xe^{y+z};$

8. $u_{tt} = a^2\Delta u + xe^t\cos(3y+4z), \quad u|_{t=0} = xy\cos z, \quad u_t|_{t=0} = yze^x;$

9. $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos\sqrt{(x^2+y^2+z^2)};$

10. $u_{tt} = 8\Delta u + 2xyz, \quad u|_{t=0} = x^2+y^2-2z^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2;$

11. $u_{tt} = \Delta u + t^2x^2, \quad u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = 1;$

12. $u_{tt} = \Delta u + 6(x^2+y^2+z^2), \quad u|_{t=0} = e^{y+z}, \quad u_t|_{t=0} = xyz.$

Т е м а 11. **ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Теоретический материал можно найти в [10, гл.2, §6,7,8; гл.4, §2], [13, гл.2, §2; гл.3 §3; гл.5 §1; гл.6, §1], [4, гл.1, §4; гл.3, §13].

У п р а ж н е н и я

Используя *формулу Пуассона* (или другой метод), решить задачу Коши:

1. $u_t = 2\Delta u + t\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos y\cos z;$

2. $u_t = 3\Delta u + e^t, \quad u|_{t=0} = \sin(x-y-z);$

3. $u_t = \Delta u + \sin 2z, \quad u|_{t=0} = \cos 2y\ e^{-x^2};$

4. $u_t = \Delta u + \cos(x-y+z), \quad u|_{t=0} = \cos 2y\ e^{-x^2};$

5. $u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos x \cos y;$

6. $u_t = \Delta u + t\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos 2y\ e^{-x^2};$

7. $u_t = \Delta u + e^t, \quad u|_{t=0} = \cos x \sin y;$

8. $u_t = \Delta u + \sin x \sin y, \quad u|_{t=0} = 1;$

9. $u_t = \Delta u + \cos\ t, \quad u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2};$

10. $u_t = \dfrac{1}{8}\Delta u + 1, \quad u|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2};$

11*. $u_t = \dfrac{1}{2}\Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos(xy);$

12*. $u_t = \Delta u + t\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos(xy)\sin z.$

Т е м а 12. **ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ**

Соответствующий материал изложен в [1, гл.3,§11], [4, гл.5,§21,22].

В о п р о с ы

1. Сформулировать задачу Штурма–Лиувилля в общем виде для $n = 1$.
2. Что называется собственными числами и собственными функциями?
3. Свойства собственных чисел и собственных функций.
4. Теорема Стеклова о разложении функции в ряд по собственным функциям.

У п р а ж н е н и я

Решить задачу Штурма–Лиувилля (и найти функцию Грина):

1. $X'' + X' + 2X = \lambda X, \quad X(0) = X(1) = 0;$
2. $X'' + 2X' = \lambda X, \quad X(0) = X(3) = 0;$
3. $X'' - 2X' = \lambda X, \quad X'(0) = X(2) = 0;$
4. $X'' - 3X' + X = \lambda X, \quad X(0) = X'(2) = 0;$
5. $X'' + 3X' - X = \lambda X, \quad X'(0) = X'(3) = 0;$
6. $X'' + 4X' = \lambda X, \quad X(0) = X'(3) = 0;$
7. $X'' - 4X' = \lambda X, \quad X'(0) = X(2) = 0;$
8. $X'' - 4X' = \lambda X, \quad X'(0) = X(1) = 0;$
9. $X'' + 4X' = \lambda X, \quad X'(0) = X(1) = 0;$

10. $X'' + X' = \lambda X, \quad X'(0) = X(\pi) = 0;$

11. $X'' - X' = \lambda X, \quad X(0) = X'(\pi) = 0;$

12. $X'' - X' = \lambda X, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0.$

Т е м а 13. **МЕТОД ФУРЬЕ**

Теоретический материал изложен в [1, гл.3, §12, 13, 16; гл.4, §21], [13, гл.2 §3; гл.3, §2], [4, гл.5, §26; гл.6, §32].

У п р а ж н е н и я

1. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < l,$
   $u(0,x) = 0, \quad u_x(t,0) = 1, \quad u(t,l) = 0;$
2. $u_t = u_{xx} + u + 2\sin x \sin 2x, \quad 0 < x < \pi/2,$
   $u(0,x) = 0, \quad u_x(t,0) = 0, \quad u(t,\pi/2) = 0;$
3. $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t, \quad 0 < x < 1,$
   $u(0,x) = e^x \sin \pi x, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = t;$
4. $u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \pi/2,$
   $u(0,x) = x, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi/2) = 1;$
5. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x, \quad 0 < x < \pi,$
   $u(0,x) = 0, \quad u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,\pi) = 2\pi t;$
6. $u_t = u_{xx} + 2u_x - u + e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi,$
   $u(0,x) = 1 + e^x \sin 2x, \quad u(t,0) = 1 + t, \quad u(t,\pi) = 1 + t;$
7. $u_t = u_{xx} + u + xt(2-t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi,$
   $u(0,x) = \cos 2x, \quad u_x(t,0) = t^2, \quad u_x(t,\pi) = t^2;$
8. $u_t = u_{xx} + 9u + 4\sin^2 t \cos 3x - 9x^2 - 2, \quad 0 < x < \pi,$
   $u(0,x) = x^2 + 2, \quad u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,\pi) = 2\pi;$
9. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos 2x \cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2},$
   $u(0,x) = x, \quad u_x(t,0) = 1, \quad u(t,\dfrac{\pi}{2}) = t^2 + \dfrac{\pi}{2};$
10. $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x, \quad 0 < x < \pi,$
    $u(0,x) = x, \quad u(t,0) = 1, \quad u_x(t,\pi) = 2\pi t + 1;$
11. $u_t = u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x}\cos^2 \pi x, \quad 0 < x < 1,$
    $u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = t, \quad u(t,1) = 2t;$

$$12. \quad u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l,$$
$$u(0,x) = 0, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 1.$$

У п р а ж н е н и я

1. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0,x) = e^{-x}\sin x, \quad u_t(0,x) = x, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = \pi t;$
2. $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x\cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \quad u(t,0) = 0, \quad u_x(t,\frac{\pi}{2}) = 0;$
3. $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \quad u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,\pi) = 0;$
4. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = x, \quad u_x(t,0) = t, \quad u(t,\frac{\pi}{2}) = \frac{t\pi}{2};$
5. $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = x, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = \pi t;$
6. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4+t) + \cos\frac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0,x) = x, \quad u_t(0,x) = x, \quad u_x(t,0) = 1 + t, \quad u(t,\pi) = \pi(1+t);$
7. $u_{tt} - 2u_t = u_{xx} - 4xt + 4t\sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$
$u(0,x) = 3, \quad u_t(0,x) = x + \sin x, \quad u(t,0) = 3, \quad u_x(t,\frac{\pi}{2}) = t^2 + t;$
8. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t\cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$
$u(0,x) = \cos x, \quad u_t(0,x) = 2x, \quad u_x(t,0) = 2t, \quad u_x(t,\frac{\pi}{2}) = \pi t;$
9. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < \pi,$
$u(0,x) = \pi x - x^2, \quad u_t(0,x) = 0, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = 0;$
10. $u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 1 - x, \quad u(t,0) = t, \quad u_x(t,1) = 0;$
11. $u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < l,$
$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \frac{x}{l}, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = t;$

12. $u_{tt} = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1,$

$u(0,x) = x^2 - x, \quad u_t(0,x) = 0, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0.$

Т е м а 14. **ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Теоретический материал можно найти в [15].

У п р а ж н е н и я

Решить интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)$$

в следующих случаях:

1. $K(x,y) = xy^2 + x^2y, \quad f(x) = x^2 + x^4;$
2. $K(x,y) = x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}, \quad f(x) = 1 - 6x^2;$
3. $K(x,y) = x^4 + 5x^3y, \quad f(x) = x^2 - x^4;$
4. $K(x,y) = 2xy^3 + 5x^2y^2, \quad f(x) = 7x^4 + 3;$
5. $K(x,y) = x^2 - xy, \quad f(x) = x^2 + x;$
6. $K(x,y) = 5 + 4xy, \quad f(x) = x;$
7. $K(x,y) = \sin \pi(x - 2y), \quad f(x) = \cos 2\pi x;$
8. $K(x,y) = \cos \pi(2x + y), \quad f(x) = \sin \pi x;$
9. $K(x,y) = \sin \pi(3x + y), \quad f(x) = \cos \pi x;$
10. $K(x,y) = \cos^2 \pi(x - y), \quad f(x) = 1 + \cos 4\pi x;$
11. $K(x,y) = \sin \pi(2x + 3y), \quad f(x) = \pi - 2x;$
12. $K(x,y) = \pi y \cos \pi x, \quad f(x) = 1 - 2x.$

Найти решения следующих интегральных уравнений:

1. $\varphi(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y \sin x + \cos y)\varphi(y)\,dy + ax + b;$
2. $\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{\pi} \cos(x + y)\varphi(y)\,dy + a \sin x + b;$
3. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (1 + xy)\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx + c;$
4. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2y + xy^2)\varphi(y)\,dy + ax + bx^3;$

5. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(xy + x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax + b;$

6. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (5(xy)^{\frac{1}{3}} + 7(xy)^{\frac{2}{3}})\varphi(y)\,dy + ax + bx^{\frac{1}{3}};$

7. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+xy}{1+y^2}\right)\varphi(y)\,dy + a + x + bx^2;$

8. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\varphi(y)\,dy + ax^2 + bx + c;$

9. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax + b;$

10. $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (3x + xy - 5x^2y^2)\varphi(y)\,dy + ax;$

11. $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos y + \sin x \sin y)\varphi(y)\,dy + a + b\cos x;$

12. $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\sin y + \cos x)\varphi(y)\,dy + ax + b.$

Т е м а 15. **ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА** $H^1(\Omega)$

Теоретический материал можно найти в лекции Ґ16 по УМФ.

У п р а ж н е н и я

1. Если $f \in H^1(a,b)$ и о.п. $f'(x) = 0$, то $f'_h(x) = 0$ при $x \in [\alpha,\beta]$, где $h < \min\{\alpha - a, b - \beta\}$.

2. Если $f \in H^1(a,b)$, то $f_h(x) \to f$ в $L_2(a,b)$ при $h \to 0$.

3. Если $f \in H^1(a,b)$ и о.п. $f'(x) = 0$, то $f(x) = \mathrm{const}$ п.в.

4. Если $f \in H^1(a,b)$, то семейство функций $f_h(x)$ равностепенно непрерывно на $[\alpha,\beta]$, где $h < \min\{\alpha - a, b - \beta\}$.

5. Если $f \in H^1(a,b)$, то семейство функций $f_h(x)$ равномерно ограничено на $[\alpha,\beta]$, где $h < \min\{\alpha - a, b - \beta\}$.

6. Если $f \in H^1(a,b)$, то $f(x)$ эквивалентна на $[a,b]$ непрерывной функции.

7. Если $f \in H^1(-\infty,+\infty)$, то $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

8. Доказать, что для любой функции $f \in H^1(0,2\pi)$ имеет место неравенство $\int\limits_0^{2\pi} f^2\,dx \leqslant \int\limits_0^{2\pi} f'^2\,dx + (\int\limits_0^{2\pi} f\,dx)^2$.

9. Доказать, что $y = |x| \in H^1(-1,1)$, но $y = |x| \notin H^2(-1,1)$.

10,11. Доказать, что функция $f \in L_2(0,\pi)$ принадлежит $H^1(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд с общим членом $n^2a_n^2$, где $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$, при этом

$$\|f\|^2_{H^1(0,\pi)} = \int_0^\pi (f^2 + f'^2)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(1+k^2)a_k^2 + \pi(\frac{a_0}{2})^2.$$

.

12. Пусть $f \in H^1(|x|<1)$, $x_1 = |x|\cos\varphi$, $x_2 = |x|\sin\varphi$, $|f|_{|x|=1} = h(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Доказать, что

$$\lim_{|x|\to 1-0}\int_0^{2\pi} |h(\varphi) - f(|x|,\varphi)|^2\,d\varphi = 0.$$

Т е м а 16. **ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА** $\overset{\circ}{H}_1(\Omega)$

Теоретический материал можно найти в лекции Г16 по УМФ.

У п р а ж н е н и я

1. Справедливо ли включение $\sin x \in \overset{\circ}{H}_1(0,\pi)$?

2. Если $f \in \overset{\circ}{H}_1(0,\pi)$, то сходится числовой ряд с общим членом $k^2b_k^2$, где

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx, \tag{1}$$

при этом

$$\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}^1(0,\pi)} = \int_0^\pi (f^2 + f'^2)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(1+k^2)b_k^2.$$

3. Если $f \in L_2(0,\pi)$ и сходится числовой ряд с общим членом $k^2b_k^2$, где коэффициенты b_k определены формулой (1), то $f \in \overset{\circ}{H}^1(0,\pi)$.

4. Для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}^1(0,\pi)$ имеет место неравенство Стеклова:

$$\int_0^\pi f^2\,dx \leqslant \int_0^\pi f'^2\,dx. \tag{2}$$

5. Найти функцию $f_0(x)$, для которой неравенство (2) превращается в равенство.

6. Для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(a,b)$ имеет место неравенство Стеклова:

$$\int_a^b f^2\,dx \leqslant \left(\frac{b-a}{\pi}\right)\int_a^b f'^2\,dx.$$

7. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^1(|x|<1)$, $\quad x_1 = |x|\cos\varphi$, $\quad x_2 = |x|\sin\varphi$. Доказать, что

$$\lim_{|x|\to 1-0}\int_0^{2\pi} f^2(|x|,\varphi)\,d\varphi = 0.$$

8. Пусть $f \in \overset{\circ}{H}{}^1((0,1)\times(0,1))$. Доказать, что

$$\int_0^1 f^2(x_1,x_2)\,dx_1 = o(x_2) \text{ при } x_2 \to 0.$$

9. Доказать, что если $f \in H^1(Q)$, $\quad g \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, то для всех $i = 1,\ldots,n$ справедлива формула $\int_Q f g_{x_j}\,dx = -\int_Q f_{x_j} g\,dx$.

10. Справедливо ли включение $\cos x \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,\pi)$?

11. Справедливо ли включение $|x-1|-1 \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,2)$?

12. Справедливо ли включение $1-x^2 \in \overset{\circ}{H}{}^1(-1,1)$?

Т е м а 17. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

У п р а ж н е н и я

1. Найти функцию v_0, реализующую минимум функционала

$$\int_0^1 (v'^2+v^2)\,dx + 2\int_0^1 v\,dx$$

в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$.

2. Доказать, что для всех $v \in H^1(0,1)$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 (v'^2+2xv)\,dx + v^2(0) + v^2(1) \geqslant -\frac{77}{270}.$$

3. Доказать, что для всех функций $v \in C^1[0,1]$, $\quad v(1) = 0$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 v\,dx \leqslant \frac{4}{3} + \frac{v^2(0)}{4} + \frac{1}{4}\int_0^1 v'^2\,dx.$$

4. Найти $\inf\limits_{v\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \int_Q (|\operatorname{grad} v|^2 + 2\sin x_1 \sin x_2 v)\,dx$, $Q=(0,\pi)\times(0,\pi)$.

5. Найти $\inf\limits_{v\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \int_Q (|\operatorname{grad} v|^2 + 2|x|^2 v)\,dx, \quad Q=\{x:|x|<1\}\subset\mathbb{R}^2$.

6. Найти $\inf\limits_{v\in H^1(Q)} \int_Q |\operatorname{grad} v|^2\,dx, \quad Q=\{x:|x|<1\}\subset\mathbb{R}^2$, $v|_{|x|=1}=x_2^3$.

7. Пусть Q — кольцо $\{1<|x|<2\}$. Найти

$$\inf_{v\in H^1(Q)} \int_Q (|\operatorname{grad} v|^2 + 4v)\,dx + \int_{|x|=2} v^2\,ds, \quad v|_{|x|=1}=0, \quad x=(x_1,x_2).$$

8. Пусть Q — квадрат $(0,\pi)\times(0,\pi)$. Найти функцию, дающую минимум функционалу

$$E(u) = \int_Q (|\operatorname{grad} v|^2 + 4\sin x_1 \sin x_2 v)\,dx + 2\int_0^\pi \sin x_1 v(x_1,\pi)\,dx_1$$

в классе функций $v\in H^1(Q)$: $\quad v|_{x_2=0} = v|_{x_1=0} = v|_{x_1=\pi} = 0$.

9. Пусть $Q=\{x:|x|<1\}$. Доказать, что для всех функций $v\in \overset{\circ}{C}{}^1(Q), \quad x=(x_1,x_2)$ имеет место неравенство

$$2\int_Q x_1x_2 v(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{384} + \int_Q |\operatorname{grad} v(x)|^2\,dx.$$

10. Пусть Q — сферический слой $\{1<|x|<2\}$. Среди функций $v\in H^1(Q)$, принимающих граничные значения $v|_{|x|=2}=0$, найти ту, которая дает минимум функционалу

$$E(v) = \int_Q (|\operatorname{grad} v|^2 + 2v)\,dx + \int_{|x|=1} v^2\,ds.$$

11. Найти функцию v_0, реализующую минимум функционала

$$\int_0^1 ({v'}^2 + v^2)\,dx - 2\int_0^1 xv\,dx$$

в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(0,1)$.

12. Найти $\inf\limits_{v\in H^1(0,1)} \int\limits_0^1 ({v'}^2 - 2x^2 v)\,dx + v^2(0) + v^2(1).$

Список рекомендуемой литературы

1. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

2. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Д. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.

3. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.

4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.

5. Сборник задач по уравнениям математической физики (под редакцией В. С. Владимирова). М.: Наука, 1974.

6. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

8. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

9. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

10. Николенко В. Н. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1981.

11. Петровский И. Г. Лекции по уравнениям с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.

12. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968.

13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967.

15. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.

Леонид Александрович Белоусов, Василий Александрович Зайцев,
Дмитрий Моисеевич Оленчиков

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методическая разработка

Редактор Л. М. Клименко

Лицензия ЛР Ѓ 020411 от 16.02.97.
Подписано в печать 15.06.99. Формат $60 \times 84\,1/16$.
Печать офсетная. Уч.-изд.л. 1,1. Усл.печ.л. 1,4.
Заказ Ѓ . Тираж 100 экз.

Редакционно–издательский отдел УдГУ.
Типография УдГУ.
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп.4.