

**Министерство образования Российской Федерации**

**Удмуртский государственный университет**

**В. А. Зайцев, С. Н. Попова**

## **ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ**

**Практикум по математическому анализу**

**Ижевск  
2003**

## Вариант 1

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 2; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ,  $a = 2$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{3n+1} = \frac{5}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{3n+1} \neq 2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^6+4} - \sqrt[4]{n^4+1}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что произведение двух бесконечно больших функций при  $x \rightarrow +\infty$  есть бесконечно большая функция.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n}{n^3+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -2; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 1; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq +\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $a = 1$ ,  $A = 3$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{3x+2} &= \frac{3}{2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{x^2+2} &= 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2-4} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{3x+1} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6}{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \sin x \cos 2x}{1 + \sin x \cos 3x} \right)^{\operatorname{ctg} x^3}. \end{aligned}$$

12. Доказать, что  $\cos \frac{1}{x} - \sqrt[5]{\frac{x^3+2x}{1+x^3}} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции  
 $f(x) = x^2|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < -1, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ (x-1)^2, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x|x|)e^{-nx} + 1 - x}{e^{-nx} + 1}.$$

## Вариант 2

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 2+0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{3n-2}{4n+4}$ ,  $a = \frac{3}{4}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{1-2n} = -\frac{3}{2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{1-2n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{n-6} - \sqrt[8]{n^8+6}}{\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt{n+1}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3} \right)^{2n-1}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что сумма двух бесконечно больших функций одного знака при  $x \rightarrow -\infty$  есть бесконечно большая функция.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 1-0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x-a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $a = 2$ ,  $A = 3$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-2}{2x+3} = \frac{1}{5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x^2+2} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2-4} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2}{3x-2} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4+3x^3-9x^2+x+3}{3x^4+4x^3-2x^2+4x-9}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - b^x)^2}{a^{x^2} - b^{x^2}}, \quad (a > 0; b > 0; a \neq b). \end{array}$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt{x^2+x+1}} = o(e^{x^{3/2}})$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{3^{1/x} + 2^{1/x}}{3^{1/x} - 2^{1/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-2)^2, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n} + (x-1)^{2n}}.$$

### Вариант 3

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 2 - 0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{5-n}{3n+1}$ ,  $a = -\frac{1}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 1} = \frac{4}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 3n + 3} \right)^{n^3}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимости и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^3}{n^4 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 1 + 0; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq -\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 2x^2 + 1, \quad a = 1, \quad A = 3$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 3}{3x - 2} = -\frac{1}{5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{x^2 + 3} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x^2 - 4} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3}{3x + 2} = \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3}{x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt[3]{\frac{x+a}{x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x+b}{x-1}} \right); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2} \right); \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a + b} \right)^{(1 + \operatorname{tg} x) / \sin x}. \end{aligned}$$

12. Доказать, что  $\sqrt{x^4 + x^2\sqrt{x^4 + 1}} = x^2\sqrt{2} + o(1/x), \quad x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x/2)}{x^3 - 4x^2 + 3x}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq -1, \\ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, & |x| < 1, \\ e^x, & x \geq 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}, \quad x \geq 0.$$

## Вариант 4

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2n-3}{3n-2}$ ,  $a = \frac{2}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{n^2+3} = -2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{n^2+3} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{5}{x_n} \right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $x_n \rightarrow -\infty$  и  $y_n \rightarrow b > 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $x_n y_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 2; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 2x^2 + 2$ ,  $a = 2$ ,  $A = 10$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-2}{2x-3} = \frac{2}{3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-4}{x^2+4} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x^2-4} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-4}{3x-1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x}{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^3+1} \sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1+x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x[\sin \ln(x^2+1) - \sin \ln(x^2-1)]; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $\sqrt{x^4 + x^2 \sqrt{x^4 + 1}} = x^2 \sqrt{2} + O^*(1/x^2)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \operatorname{sign} \cos x.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2), & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{(x-1)^2}, & |x| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (x-1)^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}.$$

## Вариант 5

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1+0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{1+3n}{n+2}$ ,  $a = 3$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4n}{2+6n} = -\frac{2}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4n}{2+6n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n + 7^{n-1}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} \right)^{2n - n^3}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2/2, \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $x_n \rightarrow a \neq 0$  и  $y_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $x_n/y_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 2 - 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) \neq +\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 2x^2 - 1, \quad a = 1, \quad A = 1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 2}{2x + 3} = -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{4x^2 - 2} = 1; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{x^2 - 4} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{4x + 1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + x - 4}{3x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\cos x - 1} + x}{\operatorname{tg}(\pi/4 + x)} \right)^{1/(e^x - 1)}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} - 2\sqrt{x}). \end{array}$$

12. Доказать, что  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 4x \right) = O^*(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{x-1}{1-e^{(x-1)/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}.$$

### Вариант 6

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1-0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2n+4}{3-2n}$ ,  $a = -1$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5n}{2-4n} = -\frac{5}{4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5n}{2-4n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 - n + 1} \right)^{n^3/(1-n)}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $x_n \rightarrow \infty$  и  $y_n \rightarrow b \neq 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , причем  $b \neq \infty$ . Доказать, что  $x_n/y_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 0; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 2+0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 2x^2 - 2$ ,  $a = 2$ ,  $A = 6$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{3x-2} = \frac{1}{4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2+4} = \frac{1}{2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x-1}{x^2-4} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{4x-2} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x - 2}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt[4]{4x^4+1}}{x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2\cos a}{\ln(1+\sin^2 x)}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4\sin^2 x}{\sin^2 2x} \right)^{1/\ln(1+x)}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = o(\sqrt{x})$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0, \\ 2-x, & 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{2-x}, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x+1) \arctg x^n.$$

## Вариант 7

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{3-3n}{2n+5}$ ,  $a = -\frac{3}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6n}{1-2n} = -3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6n}{1-2n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n^2+1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2+2n+1}{4n^2+4n-1} \right)^{1-2n}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{6}{x_n} \right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимости и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  и в некоторой проколотой окрестности точки  $a$   $|\phi(x)| \geq m > 0$ . Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\phi(x) = \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2-9}, \quad x \in (-3, 3).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &= 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty; \\ \text{в) } f(x) &\not\rightarrow 3; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &\neq +\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 3x^2 + 1, \quad a = 1, \quad A = 4.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{3x+2} &= 5; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-4}{x^2+1} &= 2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{4x+4} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}, \quad (a > 0);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 3 \arcsin 4x}{\sin 5x - 6 \operatorname{arctg} 7x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \cos 3x + \sin x}{1 + e^{2x}} \right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + x}}} = o(e^{2x})$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции  
 $f(x) = \cos^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/(x+1)}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \ln |x|, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} + x}{xe^{nx} + 1}.$$

### Вариант 8

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 0+; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{1 + 5n}{1 - 2n}$ ,  $a = -\frac{5}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 7n}{3 + 5n} = -\frac{7}{5}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 7n}{3 + 5n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n+3)}}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^3 + 2}{n + 1}}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{20 + x_n}, \quad x_1 = 4, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A \neq 0$ . Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)\phi(x) = \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in (0, 1).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow 3+0$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq +\infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 3x^2 - 2$ ,  $a = 2$ ,  $A = 10$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{2x-3} = -\frac{2}{3}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-4} = \frac{2}{3}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x^2} = \infty$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-7}{4x-5} = \infty$ .

11. Вычислить пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 4x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[k]{x} - 1}, \quad n, k \in \mathbb{N}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1+x})}{\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln 2}$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}$ .

12. Доказать, что  $e^{x^2} - \cos x = O^*(\sin^2 x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-2)^2, & x > 1; \end{cases}$       б)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x^{2n} + 1}$ .

## Вариант 9

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1/2$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ; в)  $x_n \not\rightarrow 0$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{n+1}{2n+1}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{1-8n} = -\frac{3}{8}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n}{1-8n} \neq -1$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^5-8} \right)$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2-5n+6}{n^2+6n-3} \right)^{n^2+7}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A \neq 0$ , причем  $A \neq \infty$ . Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \infty.$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 0).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow 3-0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) \neq -\infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 3x^2 - 1, \quad a = -1, \quad A = 2.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{3x+2} &= 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4}{2x^2-1} &= \frac{3}{2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{4x-1} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-\sin^2 x}}{1 + \ln \cos x} \right)^{1/\sin^2 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2) \cdot \dots \cdot (n+x^2)} - x^2).$$

12. Доказать, что  $\ln \cos \frac{\pi}{x} = O^* \left( \frac{1}{x^2} \right)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции  
 $f(x) = x \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < -1, \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1/(1-x), & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}.$$

### Вариант 10

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1/3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow -1; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2-3n}{4n-4}$ ,  $a = -\frac{3}{4}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+6n}{2+n} = 6; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+6n}{2+n} \neq 5.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + \dots + (5n - 3)}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 + n - 1}{2n^3 + n^2 + n} \right)^{3n-1}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{5}{x_n} \right), \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , а функция  $\phi(x)$  ограничена в некоторой проколлотой окрестности точки  $a$ . Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \phi(x)) = \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 3x^2 - 4, \quad a = -2, \quad A = 8.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{2x + 3} = -\frac{2}{3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x^2 + 1} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 1}{x^2} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x - 1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^5 - 2x^3 + 3x^2 + x - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[n]{1 + ax} \sqrt[n]{1 + bx} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sh} 3x} - e^{\operatorname{sh} x}}{\operatorname{th} x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1 + \sin(\pi x)}{1 + \operatorname{tg}(\pi x)} \right)^{\cos(x-1)/\cos(\pi x/2)}.$$

12. Доказать, что  $\ln(1 + 3x + x^2) = -\ln(1 - 3x + x^2) + O^*(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad x \neq \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{1 - 2x - 3x^2}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} (x+1)/x, & x < -1, \\ 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ x - 1, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^2) \operatorname{arctg} \frac{x^{2n} + 1}{x^{2n} - 1}.$$

### Вариант 11

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow -1+0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{n+4}{1-4n}$ ,  $a = -\frac{1}{4}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n-1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+\dots+(2n-1)}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3+3n^2-1}{2n^3+3n+1} \right)^{2-3n}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1, \quad x_1 = -\frac{5}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимости и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , достигает своей точной нижней грани.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, 0).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 0-; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq \infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 4x^2 + 5, \quad a = -1, \quad A = 9.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3}{5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+2} = 1; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1-x^2}{x+3} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-2}{2x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt{1-x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} 5x}{x^2}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{1/\ln \operatorname{sh} x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $1 + e^{-x^2} = 2 \cos x + o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = x \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1}{\ln|x-1|}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 1, \\ (x-1)^3, & 1 \leq x \leq 3, \\ 4 - x, & x > 3; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[3]{x+1/n} - \sqrt[3]{x} \right).$$

## Вариант 12

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/4; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow -1-0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2n+3}{3n+2}$ ,  $a = \frac{2}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n^2+11n+15}{7n^2+18n-15} \right)^{2-n}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}, \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если  $y = f(x)$  — непрерывная функция, то функция  $y = |f(x)|$  также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1-x^2}{4-x^2}, \quad x \in (1, 2).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= -2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= -\infty; \\ \text{в) } f(x) &\not\rightarrow 0+; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &\neq +\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 4x^2 - 5$ ,  $a = 1$ ,  $A = -1$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x+1} &= \frac{3}{2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{2x+1} &= -\frac{1}{2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x-3}{2x+2} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x+1} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+4x^2+6x+3}{x^3+2x^2-x-2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \ln \operatorname{ch} x^2); \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow +0} |\ln x|^{2x}.$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}} = o(e^{2x})$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции  

$$f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{x^2}{\sin^2 x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а)} f(x) = \begin{cases} -1/x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ x + 3, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б)} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + x^{2n})^{1/n}, \quad x \geq 0.$$

### Вариант 13

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1/4; \quad \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в)} x_n \not\rightarrow -2; \quad \text{г)} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2-n}{3n-1}$ ,  $a = -\frac{1}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+1} = \frac{2}{3}; \quad \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-5}{3n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right); \quad \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1} \right)^{n^2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = -\frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функция  $f(x)$  непрерывна в промежутке  $x \geq a$  и существует конечный  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , то функция  $f(x)$  ограничена на данном промежутке.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^2}{n^2 + 4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow_{x \rightarrow \infty} -1; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 4x^2 + 1, \quad a = -1, \quad A = 5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x+1} = 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{1-x} = -2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x-1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2}{x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 5}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2} - 1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right); & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x + 2}{3 + \sin x - \cos x} \right)^{\frac{\cos x}{(\sin 2x + \sin x)}}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $\arccos \frac{x^2}{x^2 + 1} = O^* \left( \frac{1}{x} \right)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = |x|^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{x \sin \frac{1}{x}}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -1, \\ 1 - x^3, & -1 \leq x \leq 1, \\ (x - 1)^3, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}.$$

## Вариант 14

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/5$ ;   б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ;   в)  $x_n \not\rightarrow -2+0$ ;   г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4-3n}{3n+4}$ ,  $a = -1$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{1-2n} = -\frac{3}{2}$ ;   б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{1-2n} \neq -1$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$ ;   б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + n + 2}{3n^2 + n - 2} \right)^{n^2 + n - 1}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, \quad x_1 = 5, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функция  $f(x)$  не ограничена на отрезке  $[a, b]$ , то в этом отрезке существует точка, в каждой окрестности которой функция  $f(x)$  не ограничена.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;   б)  $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = -\infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow -1+0$ ;   г)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \neq +\infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 4x^2 - 1$ ,  $a = 1$ ,  $A = 3$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x+1} = 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{1+x} = -2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{x+2}{2x+1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x}{x^3 + 3x^2 - 4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[3]{1+2x^{-1}+x^{-3}} - 2\sqrt[3]{1+x^{-1}+x^{-3}} + 1); & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\operatorname{ch} 3x} \right)^{1/x^2}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $x^{\ln x} = o(e^x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1/x - 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 3(\sqrt{x})^n + x^n}.$$

## Вариант 15

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1/5; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow -2-0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2+3n}{5-2n}$ ,  $a = -\frac{3}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3 + 2n}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 - n + 3}{2n^2 + n + 3} \right)^{1-n^2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{6}{x_n} \right), \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — периодические функции с периодом  $T > 0$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ . Доказать, что  $f(x) = g(x)$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) &= +\infty; \\ \text{в) } f(x) &\not\rightarrow -1-0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &\neq -\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -x^2 + 2$ ,  $a = 1$ ,  $A = 1$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} &= \frac{2}{3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1-2x} &= -\frac{1}{2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x-3} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3}{x+1} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^4 + 2x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} - 2x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx - n}{\sin x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\arcsin x} \right)^{1/x^2}.$$

12. Доказать, что  $\cos x - e^{-x^2/2} = o(x^3)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1/|x|, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-2)^2, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x^n + x^{2n}}{1 + 3x^n + x^{2n}}.$$

### Вариант 16

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2/3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1/2; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{1 - 2n}{2 - 5n}$ ,  $a = \frac{2}{5}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1}{10n - 3} = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1}{10n - 3} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 7n - 1}{2n^2 + 7n + 2} \right)^{1+2+\dots+n}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{20 + x_n}, \quad x_1 = 10, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходямость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$   
 $\min(a_n, b_n) \rightarrow \min(a, b)$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = 3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 2; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq +\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -x^2 - 2$ ,  $a = 1$ ,  $A = -3$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+2} = -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{2x} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x-1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[k]{1+bx}}{x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x. \end{array}$$

12. Доказать, что  $e - (1+x)^{1/x} = O^*(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1-x, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}.$$

## Вариант 17

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2/3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1/2+0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{n-1}{2n+1}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-2n}{4n+3} = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-2n}{4n+3} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 + 5n - 4} \right)^{\sqrt{n^4 + n + 1}}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2/2, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что при  $n \rightarrow \infty$   
 $\max(a_n, b_n) \rightarrow \max(a, b)$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 2-0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq +\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -x^2 + 4, \quad a = 3, \quad A = -5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{2x+1} = 3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1}{x-2} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-2} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 12x + 8}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 2}}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \dots + \operatorname{tg} nx}{\operatorname{arctg} x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{x-1}.$$

12. Доказать, что  $\sin(\sin x) - \operatorname{tg} x = o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt{x} \sin x, \quad x > 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 0, \\ \ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln(2-x), & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

### Вариант 18

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3/4; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1/2 - 0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{1+3n}{3-4n}$ ,  $a = -\frac{3}{4}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1} = \frac{3}{4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 2}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 + 3n + 1}{2n^3 + 3n^2 - 1} \right)^{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_1 = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны, то функция  $\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 2+0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -x^2 + 3, \quad a = 2, \quad A = -1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x + 2} = \frac{1}{2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{3x + 2} = 1; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x + 1}{2x - 1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3}{x - 1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 45x + 27}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x^5 + 2}}{x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $(\cos x)^{2 \sin x} - 1 = O^*(x^3)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ 2 - |x|, & |x| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt[4]{x + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{x - \frac{1}{n^2}} \right).$$

## Вариант 19

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3/4$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ; в)  $x_n \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1/3$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{n-4}{1+4n}$ ,  $a = \frac{1}{4}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5-2n} = -\frac{3}{2}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5-2n} \neq -2$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2-7n}{n^2+7} \right)^{n-1}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \sin \frac{2\pi n}{3}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^2+4}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow_{x \rightarrow -2+0} -1$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -2x^2 + 1$ ,  $a = 1$ ,  $A = -1$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+1} &= 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x+2} &= 3; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{2-x} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{x-2} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 5x^2 - x + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - x^\beta}{\sqrt[5]{x} - 1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{2 \sin x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}. \end{aligned}$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}} = O^*(e^x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{x}{\cos x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}.$$

## Вариант 20

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4/5; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1/3+0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{2-3n}{2n+3}$ ,  $a = -\frac{3}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+6n}{5-2n} = -3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+6n}{5-2n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} \right)^{\frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 2}}}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1, \quad x_1 = -\frac{3}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1-(-1)^n)n}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{2n^3 + 1}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow -1 - 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -2x^2 - 2$ ,  $a = -1$ ,  $A = -4$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{x+2} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{2x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^4 + 4x^2 - 5}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[4]{4x^4 + 1}}{x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln \ln x}{2x - 2e}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x))^{1/\arcsin^2 x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $\pi - \arctg x = O^*(1/x)$ ,  $x \rightarrow -\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1/(x+1) - 1/(x+2)}{1/x - 1/(x+1)}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{|x| - 1}, & |x| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + |x|)^{\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}}}.$$

### Вариант 21

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4/5; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1/3-0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4-n}{1-3n}$ ,  $a = \frac{1}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-2n}{1+5n} = -\frac{2}{5}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-2n}{1+5n} \neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^3 + 2n^2 - 1}{3n^3 - 2n^2 + 1} \right)^{2-3n}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = 5^{(-1)^n n}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad x \in (-2, 2).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow -1+0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -2x^2 + 4$ ,  $a = 1$ ,  $A = 2$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x+1} = 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x}{3+2x} = -1; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{2x-1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{x+5}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 4^{1/x} - 4^{1/(x+1)} \right). \end{array}$$

12. Доказать, что  $\sqrt{x^2+1} - \sqrt[5]{x^5+2} = o(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1/x^2 - 1/(x+1)^2}{1/(x-1)^2 - 1/x^2}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ e^{1/x}, & x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n} + \frac{1}{(x-1)^{2n}}}.$$

## Вариант 22

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3/2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 2/3; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{3n+4}{4-3n}$ ,  $a = -1$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+4}{2n+1} = \frac{7}{2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+4}{2n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n(n+5)} - n \right); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^3 - 3n + 2}{2n^3 + 3n^2 - 1} \right)^{n^2/(n+1)}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) &= -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= +\infty; \\ \text{в) } f(x) &\not\rightarrow 1; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) &\neq -\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -2x^2 + 3, \quad a = -1, \quad A = 1.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{3x+2} &= 0; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{1-3x} &= -1; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{3x+1}{2x-1} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5}{2x-11} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x^2 + 6x - 8} + \sqrt[3]{x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + x}}} = O^*(e^x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^{-1/x} + 1}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ (|x| - 1)^2, & |x| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 - 1) \arctg \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

### Вариант 23

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3/2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 2/3 + 0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4 - 2n}{2 + 3n}$ ,  $a = -\frac{2}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{3n - 2} = \frac{2}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{3n - 2} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 2} - n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + 2n^2 - n}{n^3 - 3n + 1} \right)^{2-n}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^3 + 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 1 - 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) \neq +\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -3x^2 - 1$ ,  $a = -1$ ,  $A = -4$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{5}{3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{3x + 2} = \frac{1}{3}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x - 1}{x + 3} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{2x + 1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x} - x)^{1/x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $\ln \frac{2 + x}{1 + x} = O^* \left( \frac{1}{x} \right)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1/(x^2 - 1) - 1/(x^2)}{1/(x^2) - 1/(x^2 + 1)}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} (|x| - 1)^2, & |x| \leq 1, \\ \ln(|x| - 1), & |x| > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$$

## Вариант 24

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4/3$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ; в)  $x_n \not\rightarrow 2/3 - 0$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{3+2n}{3-4n}$ ,  $a = -\frac{1}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-5} = \frac{3}{2}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-5} \neq 1$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 4n + 2} \right)^{\frac{2n^2 + 3}{n+2}}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{2\pi n}{3}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^3}{2n^3 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = +\infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow 1 + 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) \neq -\infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -3x^2 + 5$ ,  $a = 1$ ,  $A = 2$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{3x-2} = 1;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2}{2x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - (-x + \sqrt{x^2 + 1})^n}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2 \sin x - \operatorname{tg} x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

12. Доказать, что  $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + \sqrt{x^3}}} = O^*(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad x \neq -2.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} e^{-1/(x^2)}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \frac{2 \operatorname{sign}(1-x)}{\operatorname{sign}(x+1)^2(x+1+(x-1)\operatorname{sign} x)}; \quad \text{б) } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+x) \operatorname{th} tx.$$

## Вариант 25

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4/3; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 3/2; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{n+1}{2n-1}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+1} = 2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{2n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 2}{3n^2 - 1} \right)^{n-2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad x_1 = 4, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \frac{2n+1}{2n+5} \cos \frac{2\pi n}{3}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n+1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow -2; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) \neq +\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -3x^2 + 7, \quad a = 2, \quad A = -5.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{x+2} = 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^2+2} = 2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{2x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+1}} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2 \operatorname{tg} x - \sin x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-1/x^2}.$$

12. Доказать, что  $\sqrt{x^4 + 3x^3 + 1} - x^2 = O^*(x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{(x-1)/x}}.$$

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а)  $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x + \cos x)$ ;    б)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (2x - 2)^{2n}}$ ,  $x \geq 0$ .

### Вариант 26

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2/5$ ;    б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ;    в)  $x_n \not\rightarrow 3/2 + 0$ ;    г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4n + 1}{3 - 2n}$ ,  $a = -2$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2}$ ;    б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} \neq 0$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n - 1)^3}{(n + 1)^4 - n^4}$ ;    б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^3 + 3n^2 - 1}{5n^3 - 3n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3 + 2}{n^2 - 1}}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right), \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \frac{2n - 1}{3n + 2} \sin \frac{\pi n}{4}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = (1 + (-1)^n)n + \frac{1 - (-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = -1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow -2-0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -3x^2 - 2$ ,  $a = 1$ ,  $A = -5$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{x+1} = 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2}{x^2-2} = 2; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x^2+2}{2x-1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3}{2x-1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + \sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[5]{1-5x} - \sqrt[7]{1-7x}}{\sqrt[4]{1+4x} - \sqrt[6]{1-6x} - x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - \sin x}{\ln(1+2x)}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt{x^4+x^2}\sqrt{x^4+1}} = o(e^{2x^2})$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x < 0, \\ \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ |x-1|, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}.$$

## Вариант 27

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -2/5; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 3/2-0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4n-1}{4-3n}$ ,  $a = -\frac{4}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n} \neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5 + 1}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 - 1}{4n^2 + n + 2} \right)^{2n-1}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что последовательность  $x_n = \frac{3n+1}{2n+1} \cos \frac{\pi n}{4}$  расходится.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани множества  $A$  и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2 + 1} \right\} \cup \left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) &= 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) &= -\infty; \\ \text{в) } f(x) &\not\rightarrow -2 + 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &\neq +\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -4x^2 + 5$ ,  $a = 1$ ,  $A = 1$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x+2} &= \frac{2}{3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} &= \frac{1}{2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+1}{x+3} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{3x} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{1-2x} + \sqrt[5]{1+3x^4}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 4x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{arctg}^2 x)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}.$$

12. Доказать, что  $\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2} = O^*(1)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \cos \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = [x] \cdot |\sin(\pi x/2)|; \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(x+1)^{2n}} + \frac{1}{(x-1)^{2n}}}.$$

### Вариант 28

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -3/5; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 4/3; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{3n+2}{3-2n}$ ,  $a = -\frac{3}{2}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{1-2n} = -2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{1-2n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left( \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)} \right); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 2n - 1}{3n^2 - 2n - 4} \right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что произведение двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = ((-1)^n + 1)n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -4x^2 + 3$ ,  $a = -1$ ,  $A = -1$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{3x-1} = \frac{3}{2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-2x}{1-x} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2}{3x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - \sqrt[7]{x^2 + 10x + 1}}{x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \sin \pi x}{1 + \ln(1 + x)} \right)^{1/\sin x}.$$

12. Доказать, что  $e^{\sqrt{x^2+x+1}} = O^*(e^x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \cos x \cdot \operatorname{sign}(\sin x); \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (x+1)^{2n} + (x-1)^{2n}}.$$

## Вариант 29

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3/5$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ; в)  $x_n \not\rightarrow 4/3+0$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{n+5}{3n-1}$ ,  $a = \frac{1}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{1 - 2n^2} = -2$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{1 - 2n^2} \neq -1$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2} \right)$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{n^2 + 1}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_1 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $x_n \rightarrow +\infty$  и  $y_n \rightarrow b < 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $x_n y_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow -2+0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq +\infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -4x^2 - 1$ ,  $a = 1$ ,  $A = -5$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{x+2} = -4; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+2} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \infty; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{3x-1} = \infty.$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+4/x} - \sqrt[4]{1+3/x}}{1 - \sqrt[5]{1-5/x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{1/\sin^2 x}.$$

12. Доказать, что  $\ln \cos \frac{\pi}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{sign}(|x| - 1) \operatorname{sign}(2 - |x|); \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}.$$

### Вариант 30

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -5/4; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 4/3-0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{3-2n}{2n+4}$ ,  $a = -1$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+3n}{2-6n} = -\frac{1}{2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+3n}{2-6n} \neq -1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - 8n^3}{(2n+1)^2 + 4n^2}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7n^2 + 18n - 15}{7n^2 + 11n + 15} \right)^{n+2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны, то функция  $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow -2; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq \infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = -4x^2 + 7, \quad a = 2, \quad A = -9.$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{3x-1} = -\frac{1}{4}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{1-x^2} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+4}{x^2-1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{3x+1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x^2 + 1} - \sin \sqrt{x^2 - 1});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sin 3x \cdot \ln \cos 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2)}{1 - \cos x}.$$

12. Доказать, что  $e^{\sin 5x} - e^{\sin x} = O^*(\sin x), \quad x \rightarrow 0.$

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\operatorname{tg} 2x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \ln\left(-\frac{1}{x}\right), & x < 0, \\ e^{-1/x}, & x \geq 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(x+1)^{2n}} + (x-1)^{2n}}.$$

### Вариант 31

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5/4; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow -1/3; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4 + 2n}{2 - 3n}$ ,  $a = -\frac{2}{3}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7n}{1 - 4n} = -\frac{7}{4}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 7n}{1 - 4n} \neq -2.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 3)^3 - (n + 5)^3}{(3n - 1)^3 + (2n + 3)^3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 6n + 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{3n-2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $f(x)$  — непрерывная на промежутке  $X$  функция. Доказать, что функция

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) > 0, \\ 0, & \text{если } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

непрерывна на промежутке  $X$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 4$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ;

в)  $f(x) \not\rightarrow -2 - 0$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq \infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1$ ;  $0,01$ ;  $0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -5x^2 + 10, \quad a = -2, \quad A = -10.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+2} = 0$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x^2-1} = \infty$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{3x-1} = \infty$ .

11. Вычислить пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin 2x \cdot \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 + \sin 2x - \cos 2x} \right)^{1/\ln(1+x)}$ .

12. Доказать, что  $\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt[4]{4x^4 + 1} = O^*(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \cos x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а)  $f(x) = \frac{||x-1|-2|}{||x|-1|-2}$ ;      б)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (x+1)^{2n} + \frac{1}{(x-1)^{2n}}}$ .

## Вариант 32

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5/3$ ;      б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ;      в)  $x_n \not\rightarrow 1/5 + 0$ ;      г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{4n+1}{5-7n}$ ,  $a = -\frac{4}{7}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-1}{n+1} = 7; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-1}{n+1} \neq 1.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 - 5n}{3n^2 - 5n + 7} \right)^{n+1}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2, \quad x_1 = \frac{3}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимости и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $f(x)$  — непрерывная на промежутке  $X$  функция. Доказать, что функция

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) < 0, \\ 0, & \text{если } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

непрерывна на промежутке  $X$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани последовательности и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$x_n = \frac{n^2 + 1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= -2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) &= +\infty; \\ \text{в) } f(x) &\not\rightarrow 0-; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) &\neq -\infty. \end{aligned}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -5x^2 + 7, \quad a = 1, \quad A = 2.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{3x-1} &= -2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+9}{x^2+1} &= 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2-1} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x+1} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ ;    б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$ ;    г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x \cos x + x}{e^{-x} \cos x + x} \right)^{1/\sin x}$ .

12. Доказать, что  $\arcsin x - \operatorname{arctg} x = o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции  
 $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x \neq \pi/2 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

а)  $f(x) = \frac{|2|x-1|-3|}{|x-1|-2}$ ;    б)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left( \frac{x+1}{2} \right)^{2n} + x^{2n}}$ .

### Вариант 33

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -5/3$ ;    б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ;    в)  $x_n \not\rightarrow 1/5 - 0$ ;    г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq -\infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{1 - 6n}{3 + 5n}$ ,  $a = -\frac{6}{5}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 7n}{2n - 1} = -\frac{7}{2}$ ;    б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 7n}{2n - 1} \neq -1$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[6]{n^6 + 4} + \sqrt{n - 4}}{\sqrt[6]{n^6 + 6} + \sqrt{n - 6}}$ ;    б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 21n - 7}{2n^2 + 18n + 9} \right)^{2n+1}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$ . Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \infty.$$

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \frac{1}{2 + x^3}, \quad x \in [0, +\infty).$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = +\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow 0+; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \neq -\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0,1; 0,01; 0,001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = -5x^2 - 3, \quad a = -1, \quad A = -8.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x - 2} = -3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{x^2 + 2} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 3}{x^2 - 1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{3x - 1} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - 1} \sqrt[3]{2 - 3x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x + 3}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2 \sin 3x} - \sqrt{1 - 4 \sin 5x}}{\sin 6x}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{\frac{\cos x}{1 - \cos x}}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $\sin \ln(x^2 + 1) - \sin \ln(x^2 - 1) = o(1/x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{|1 - |x - 2||}; \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + (x + 1)^{2n}}.$$

### Вариант 34

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -5/2$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ; в)  $x_n \not\rightarrow 1/4$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \infty$ .

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{5 + 3n}{2 - 5n}$ ,  $a = -\frac{3}{5}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n}{3n - 2} = -\frac{2}{3}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n}{3n - 2} \neq -1$ .

4. Вычислить пределы

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{n^3 + 5} - \sqrt[3]{n - 5}}{\sqrt[5]{n^7 + 5} + \sqrt[5]{n - 5}}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3n + 6}{n^2 + 5n + 1} \right)^{n/2}$ .

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right), \quad x_1 = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Доказать, что если  $y = f(x)$  — непрерывная функция, то функция  $y = f(|x|)$  также непрерывна.

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = -\infty$ ;  
в)  $f(x) \not\rightarrow -2 + 0$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) \neq +\infty$ .

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если  $f(x) = 5x^2 - 4$ ,  $a = 1$ ,  $A = 1$ .

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{2x-1} &= 2; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{x^2+1} &= 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^2-1} &= \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{3x+1} &= \infty. \end{aligned}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} \sqrt[3]{1+3x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\sin^2 x} + \operatorname{arctg} x}{e^{\sin x} - x} \right)^{1/x}. \end{aligned}$$

12. Доказать, что  $e^{7x} - e^{4x} = o(\sqrt[3]{x})$ ,  $x \rightarrow 0$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = x^2|x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos 2x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = (-1)^{[\sqrt{x}]}; \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)).$$

### Вариант 35

1. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 5/2; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \text{в) } x_n \not\rightarrow 1/4+0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq +\infty.$$

2. Дана последовательность  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и число  $a$ . Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , если  $x_n = \frac{6-n}{5+6n}$ ,  $a = -\frac{1}{6}$ .

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{1-3n} = -\frac{2}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{1-3n} \neq 0.$$

4. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{(n-1)(n+3)} \right); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 2} \right)^{2n^2}.$$

5. Последовательность  $x_n$  задана условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}, \quad x_1 = 3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Исследовать последовательность на сходимость и, если она сходится, найти ее предел.

6. Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , а функция  $g(x)$  разрывна в точке  $a$ . Доказать, что функция  $(f + g)(x)$  разрывна в точке  $a$ .

7. Найти точную верхнюю и нижнюю грани функции и проверить по определению  $\sup$  и  $\inf$  найденные значения, если

$$f(x) = \sin x - \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8. Сформулировать в логических символах утверждения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty; \\ \text{в) } f(x) \not\rightarrow -1 - 0; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) \neq +\infty. \end{array}$$

9. Определить для  $\varepsilon = 0, 1; 0, 01; 0, 001$  число  $\delta > 0$ , при котором из неравенств  $0 < |x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , если

$$f(x) = 5x^2 + 5, \quad a = -1, \quad A = 10.$$

10. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 2}{x + 1} = 4; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x^2 + 2} = 0; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 2}{x^2 - 1} = \infty; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x - 2} = \infty. \end{array}$$

11. Вычислить пределы

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{2x^4 - x^2 - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \sqrt{x+3}); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2) - \sin(x-1)\pi}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg} 2x}. \end{array}$$

12. Доказать, что  $4^{1/x} - 4^{1/(x+1)} = o(1/x)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

13. Доказать на языке приращений непрерывность функции

$$f(x) = \ln |x|, \quad x \neq 0.$$

14. Найти точки разрыва функции и указать их род:  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \cos x}$ .

15. Исследовать на непрерывность и построить графики функций

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{sign}(\cos x \cdot \sin x); \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2 \cos x)^{2n}}.$$