ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009
№ 1
АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Научный журнал | Основан в марте 1991 г.
Удмуртский государственный университет | г. Ижевск

СОДЕРЖАНИЕ

От научного редактора

Кант И. **Всеобщая естественная история и теория неба** ... 3

Кондратьев Б. П. **Векторный подход к проблеме физической либрации Луны** ... 19

Кондратьев Б. П. **Как Земля «плавает» в небе Луны** ... 53

Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г. **Гравитационное и электростатическое поле однородного кругового конуса** ... 62

Антонов В. А., Кондратьев Б. П. **Астрономия и принципы квантовой механики** ... 75

Требования к оформлению статей в журнал ... 95

Редакционно–издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916–015
http://www.vestnik.udsu.ru

УДК 530.145.61

Б. П. Кондратьев

ВЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ ЛУНЫ I. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА

Разработан новый аналитический подход к задаче о физической либрации твердой Луны с учётом возмущений от Земли и Солнца. Три уравнения Эйлера дополнены двенадцатью кинематическими уравнениями, составленными векторным способом. Движение описывается пятнадцатью переменными, что делает метод более информативным в сравнении с традиционным. На первом этапе проблема изучается в линеаризованном варианте.

Система из девяти дифференциальных уравнений первого порядка распадается на две группы, четную и нечетную по отношению к отражению в плоскости лунного экватора, и вращательные колебания Луны представлены суперпозицией независимых либраций в долготе и широте. Либрация в долготе описывается тремя уравнениями и состоит из произвольных колебаний с периодом $T_1 = 2,878$ *юл. л.* (амплитуда $1,855''$) и вынужденных – с периодами в драконический месяц ($15,305''$), звёздный год ($0,090''$), полугод ($17,626''$) и треть года ($0,050''$) (всего пять гармоник). Влияние Солнца на эти колебания сравнимо с земным.

Физическая либрация в широте представлена шестью уравнениями и при учете возмущений от одной только Земли описывается двумя гармониками произвольных ($T_5 \approx 74,180$ *юл. л.*, $T_7 = 27,347$ *д.*) и одной – вынужденных колебаний $T_8 = 27,212$ *д.* Движение истинного полюса представлено этими же гармониками, причем две последние дают биения с внешним $48,62$ *юл. л.* и внутренним $T_7 = 27,389$ *д.* периодами. Максимальное отклонение истинного полюса от полюса фигуры $45,3''$. Одна из частот нулевая и дает стационарное решение с наклоном к югу длинной оси Луны. Теоретически обоснован третий закон Кассини. Из сравнения с наблюдениями найдены амплитуды произвольных колебаний. Для отношения $\dfrac{\sin I}{\sin(I+i)} \approx 0,2311$ теория даёт $0,2319$, что подтверждает адекватность разработанного здесь подхода.

Сделан пересмотр прежней теории. Констатируется, что у Луны нет свободных (эйлеровских) колебаний, и вместо колебаний с периодом $T \approx 148,167$ *юл. л.* на самом деле есть гармоника с $T_5 \approx 74,180$ *юл. л.* Применение к Луне Мельхиором и другими исследователями кинематического метода Пуансо с результатом в $22''$ между мгновенной осью вращения и наименьшей осью инерции Луны является лишь грубым приближением, наш динамический расчет дает $45''$.

Ключевые слова: Луна, физическая либрация по долготе и широте, векторный метод, линеаризация уравнений, произвольные и вынужденные колебания.

Введение

Систематически изучая Луну в телескоп с 1609 г., к 1637 г. Галилей обнаружил [1]: «Луна открывает и скрывает свои волосы и часть диаметрально противоположного подбородка, что можно назвать понижением и поднятием лица». Кроме того, «Луна поворачивает свою голову то направо, то налево, и открывает то или другое ухо». В этих словах Галилей красочно представил тонкий эффект периодического перемещения деталей рельефа относительно края лунного диска. Так была открыта оптическая либрация Луны. В 1687 г. Ньютон объяснил либрацию по долготе как следствие неравномерного движения Луны по эллиптической орбите при равномерном вращении вокруг оси [2]. Эмпирические законы оптической либрации дал Доменико Кассини в 1693 г.:

1) Луна вращается равномерно вокруг оси, причем период её вращения совпадает с периодом обращения по орбите вокруг Земли;

2) плоскость экватора Луны сохраняет постоянный (сейчас бы сказали – почти постоянный) наклон к эклиптике;

3) восходящий узел экватора Луны на эклиптике всегда совпадает с нисходящим узлом орбиты Луны на эклиптике.

Оптическая либрация по долготе приводит к небольшим ($5^\circ - 8^\circ$) кажущимся (для землян) колебаниям Луны в восточно-западном направлении с периодом в аномалистический месяц; они исчезают, когда Луна находится в перигее и апогее. Колебания другого вида – оптическая либрация по широте – происходят с амплитудой $6^\circ 40'$ и периодом в один драконический месяц с исчезновением отклонения, когда Луна в узлах орбиты.

Указанные геометрические отклонения тела Луны, вытянутой в среднем не на центр системы Земля-Луна, как это обычно говорится в руководствах, а на второй фокус лунной орбиты [3], приводят к реальным малым покачиваниям её тела относительно центра масс [2]. Такие покачивания Луны под воздействием Земли и других небесных тел, происходящие на фоне более размашистых оптических либраций, и называют физической либрацией Луны.

Задача о физической либрации принадлежит к числу труднейших для анализа. Предсказанная ещё Ньютоном, она изучалась многими исследователями. Лагранж первым провёл аналитическое исследование и в линейном приближении обосновал законы Кассини [4]. Позднее Лаплас и Тиссеран тщательно изучили проблему и подтвердили выводы Лагранжа. Заметный вклад сделан представителями казанской школы астрономии. А. В. Краснов, Т. Банахевич, А. А. Яковкин, И.В. Белькович, А. А. Нефедьев и Ш. Т. Хабибуллин (см. [5] и цит. там лит.) обработали уникальные ряды гелиометрических наблюдений и получили более или менее точные значения параметров либрации. Была предпринята, правда несовершенная, попытка и нелинейного анализа проблемы [6]. Определению постоянных физической либрации посвящена книга [7]. Из иностранных ученых отметим Гартвига, Гайна, Козиела, Мельхиора [8], Моутсуласа [9]. Это – аналитики. Численному методу изучения проблемы отдают предпочтение, например, в работе [10].

Иногда полагают, что собственные покачивания Луны настолько малы, что практического интереса не представляют [11]. Это не так! Хотя амплитуды наиболее заметных гармоник физической либрации и не превышают одной-двух дуговых минут, её изучение всё же необходимо для построения точной системы селеноцентрических координат и, кроме того, может пролить свет на строение Луны и нынешнее состояние её недр.

В настоящее время из анализа достигнутых результатов выясняется, что классический подход Лапласа с использованием углов Эйлера себя исчерпал. Аргументы следующие:

1) прямое интегрирование в углах Эйлера первых двух уравнений вращения твердой Луны (также носящих имя Эйлера) невозможно и приходится прибегать к сложным заменам переменных, что сильно затрудняет линеаризацию уравнений вращения Луны;

2) вследствие ограниченности теории наступил застой и в деле уточнения параметров либрации по новейшим данным лазерной локации поверхности Луны;

3) применение Мельхиором [8] и другими к Луне кинематического метода Пуансо с результатом в $22''$ между мгновенной осью вращения и наименьшей осью инерции Луны следует считать лишь грубым приближением, наш динамический расчет дает $45''$;

4) к старым болячкам теории относится и слабая изученность влияния на физическую либрацию Луны возмущающего действия Солнца;

5) почти не исследована задача о либрации Луны в общей, нелинейной постановке. Учет нелинейности может изменить основные представления о физической либрации.

В целом назрела необходимость создания независимого и более полного подхода к проблеме физической либрации Луны.

§ 1 Постановка задачи и вывод уравнений возмущённого вращательного движения Луны

У нас задача о вращении твердой Луны рассматривается с точки зрения наблюдателя, находящегося на её поверхности. Выберем систему отсчёта $Oxyz$, связанную с главными осями инерции фигуры Луны, так что плоскость Oxy совпадает с плоскостью её динамического экватора

(экватора Кассини). Собственное вращение Луны задаётся вектором угловой скорости $\Omega\,(p,\,q,\,r)$, компоненты которого есть проекции Ω на оси инерции фигуры Луны, являются функциями вращения и подчиняются трём динамическим уравнениям Эйлера. Роль Земли в данной задаче двойная. Во-первых, Земля своим притяжением заставляет Луну двигаться по орбите, что создает условия для появления оптической либрации. Во-вторых, Земля, рассматриваемая уже как возмущающее тело, является причиной возникновения настоящей – физической – либрации нашего спутника. Солнце же является здесь только возмущающим телом. Возмущающая роль Земли и Солнца учитывается тем, что в правые части уравнений Эйлера вводятся моменты внешних сил от этих небесных тел.

Но трёх компонент $(p,\,q,\,r)$ ещё недостаточно для полного описания движения Луны, и мы вводим ещё двенадцать кинематических переменных. Для этого центры Земли и Луны соединим вектором $\mathbf{R}\,(x,\,y,\,z)$, причём ось Ox направим (примерно) в сторону Земли, а ось Oy – в азимутальном направлении по ходу движения Земли относительно звёзд фона. Далее, пусть $\mathbf{R}_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ и $\mathbf{R}_2\,(x_2,\,y_2,\,z_2)$ – единичные векторы, в невозмущённом состоянии системы направленные соответственно в точку полюса орбиты Луны и в точку полюса земной орбиты (эклиптики). Компоненты $(x_1,\,y_1,\,z_1)$ и $(x_2,\,y_2,\,z_2)$ суть направляющие косинусы векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$. Для описания движения Солнца введём вспомогательный геоцентрический радиус-вектор $\mathbf{R}_3\,(x_3,\,y_3,\,z_3)$. Центры Луны и Солнца соединяет вектор

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\,(x,\,y,\,z) + \mathbf{R}_3\,(x_3,\,y_3,\,z_3)\,. \tag{1.1}$$

1.1 Уравнения Эйлера

Луна имеет трёхосный эллипсоид инерции, сжатия которого (динамические сжатия Луны) обозначаются символами

$$\alpha = \frac{C-B}{A};\;\; \beta = \frac{C-A}{B};\;\; \gamma = \frac{B-A}{C} \tag{1.2}$$

и характеризуют сжатия ортогональных сечений эллипсоида инерции: α – для его сечения картинной плоскостью, β – сечения первым вертикалом и γ – сжатие эллипса в экваториальном сечении. Хотя величины α, β, γ весьма малы, они играют определяющую роль в проблеме физической либрации Луны. Сейчас их значения находят из совместного анализа коэффициентов гармоник гравитационного потенциала и приливного отклика Луны. Помощь в этом оказывают результаты лазерной локации Луны и наблюдения за ИСЛ. Современные значения [10; 12]:

$$\begin{gathered}\alpha\cdot 10^{4}=4,0361504;\ \beta\cdot 10^{4}=6,31486\pm 0,0009;\\ \gamma\cdot 10^{4}=2,27871\pm 0,0003;\ f=\frac{\alpha}{\beta}=0,63915.\end{gathered}\tag{1.3}$$

Через f обозначен параметр физической либрации в классической теории. Его значение оказывается чуть меньше широко обсуждаемого ранее критического резонансного $f=0,662$.

Уравнения Эйлера вращения твёрдой Луны запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot p+\alpha qr&=K_{\oplus 1}+K_{\odot 1};\\ \dot q-\beta pr&=K_{\oplus 2}+K_{\odot 2};\\ \dot r+\gamma pq&=K_{\oplus 3}+K_{\odot 3},\end{aligned}\tag{1.4}$$

где в правых частях стоят компоненты моментов сил от Земли и Солнца, возмущающих вращение Луны. Вводя отношение масс Луны и Земли

$$\kappa={}^{M}/_{M_\oplus}\approx 0,012300,\tag{1.5}$$

составляющие вектора момента сил от Земли (гармоники второго порядка) запишем в виде

$$\begin{aligned}K_{\oplus 1}&=\frac{3M_\oplus G}{R^5}\alpha yz=\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R^2\,(1+\kappa)}\alpha yz;\\ K_{\oplus 2}&=-\frac{3M_\oplus G}{R^5}\beta xz=-\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R^2\,(1+\kappa)}\beta xz;\\ K_{\oplus 3}&=\frac{3M_\oplus G}{R^5}\gamma xy=\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R^2\,(1+\kappa)}\gamma xy\,,\end{aligned}\tag{1.6}$$

где используется третий закон Кеплера в виде

$$M_\oplus G\,(1+\kappa)=R^3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2.\tag{1.7}$$

Здесь Ω_1 есть угловая скорость движения Луны по орбите с периодом в сидерический месяц

$$\Omega_1=\frac{2\pi}{27,32166\,\text{д.}}=2,6617\cdot 10^{-6}\ \text{с}^{-1},\tag{1.8}$$

а отношения η_1 и η_2 равны

$$\eta_1=\frac{\mu}{\Omega_1}=\frac{27,32166\,\text{д.}}{18,61\,\text{л.}}\approx 4,0213398\cdot 10^{-3};\ \ \eta_2=\frac{\nu}{\Omega_1}\approx 8,4534823\cdot 10^{-3},\tag{1.9}$$

причем μ – угловая скорость (обратного) движения узлов лунной орбиты, а ν – линии апсид:

$$\mu = \frac{2\pi}{18,61 л.} = 1,070358789 \cdot 10^{-8}\ c^{-1};\ \ \nu = 2,2500634 \cdot 10^{-8} c^{-1}. \qquad (1.10)$$

В полном виде составляющие вектора момента сил от Солнца:

$$\begin{aligned} K_{\odot\,1} &= \frac{3M_{\odot}G}{D^5}\alpha\,(y+y_3)\,(z+z_3)\,; \\ K_{\odot\,2} &= -\frac{3M_{\odot}G}{D^5}\beta\,(x+x_3)\,(z+z_3)\,; \\ K_{\odot\,3} &= \frac{3M_{\odot}G}{D^5}\gamma\,(x+x_3)\,(y+y_3)\,; \\ D &= \sqrt{(x+x_3)^2+(y+y_3)^2+(z+z_3)^2}. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

1.2 Кинематические уравнения задачи

Полагаем, что движение Земли относительно центра Луны складывается:

1) из движения по эллипсу в положительном направлении с радиальной v_r и трансверсальной $v_{\perp}$ компонентами скорости;

2) из вращения плоскости самой орбиты Луны за счет обратного движения узлов с угловой скоростью $\mu = -\mu\mathbf{R}_2$, так что соответствующая составляющая скорости Земли $\mu\,[\mathbf{R}_2\mathbf{R}]$;

3) из вращательного движения эллипса лунной орбиты в положительном направлении с периодом $8\,л.$ $310\,д.$ с угловой скоростью $\nu = \nu\mathbf{R}_1$. Скорость этого движения $-\nu\,[\mathbf{R}_1 R]$.

Вектор полной скорости Земли относительно центра Луны

$$\mathbf{V} = v_r\frac{\mathbf{R}}{R} - v_{\perp}\left[\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{R}_1\right] + \mu\,[\mathbf{R}_2\mathbf{R}] - \nu\,[\mathbf{R}_1\mathbf{R}]\,. \qquad (1.12)$$

С точки зрения наблюдателя, на поверхности Луны, вращающейся с угловой скоростью $\Omega\,(p,\,q,\,r)$, Земля имеет пространственную скорость

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\oplus} = \mathbf{V} - [\Omega\,\mathbf{R}]\ . \qquad (1.13)$$

Второй член в правой части уравнения (1.13) есть обращение собственного осевого вращения Луны.

В системе координат лунного наблюдателя вращательное движение полюса лунной орбиты представлено производной по времени от вектора $\mathbf{R}_1\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ и состоит из двух компонент: из обратного движения узлов лунной орбиты (эта часть скорости изменения вектора $\mathbf{R}_1$ равна $[\mu\,\mathbf{R}_1]$), а также из движения полюса лунной орбиты за счет осевого вращения Луны $-[\Omega\,\mathbf{R}_1]$. Вместе изменение положения полюса лунной орбиты будет равно

$$\dot{\mathbf{R}}_1 = \mu\,[\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2] - [\Omega\,\mathbf{R}_1]\,. \tag{1.14}$$

Далее найдём вращательное движение полюса эклиптики. Оно, по сути, также отражает собственное осевое вращение Луны и описывается эволюцией вектора $\mathbf{R}_2$:

$$\dot{\mathbf{R}}_2 = -\,[\Omega\,\mathbf{R}_2]\,. \tag{1.15}$$

Влиянием других планет из-за крайней малости эффекта мы здесь пренебрегаем.

При описании кинематики Солнца относительно наблюдателя на Луне пренебрегаем и эксцентриситетом орбиты Земли вокруг центрального светила. В этом приближении вектор $\mathbf{R}_3\,(x_3,\,y_3,\,z_3)$ равномерно вращается вокруг полюса эклиптики с угловой скоростью

$$\Omega_2 = \frac{2\pi}{1\text{зв.год}} = \left(\frac{M_\odot G}{R_3^3}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1,990638\cdot 10^{-7}\text{c}^{-1};\;\; \eta_3 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \approx 7,48\cdot 10^{-2}. \tag{1.16}$$

где $1\,\textit{зв. год} =\ 365,256\,\textit{д}.$ Следовательно,

$$\dot{\mathbf{R}}_3 = \Omega_2\,[\mathbf{R}_2\,\mathbf{R}_3]\,. \tag{1.17}$$

Запишем кинематические уравнения в проекциях на оси декартовых координат. Раскрывая вначале (1.13) , имеем

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{v_r x}{R} - \left(\frac{v_\perp}{R} - \nu\right)(yz_1 - y_1 z) - qz + ry - \mu\,(yz_2 - y_2 z)\,;\\
\dot{y} &= \frac{v_r y}{R} - \left(\frac{v_\perp}{R} - \nu\right)(zx_1 - z_1 x) - rx + pz - \mu\,(zx_2 - z_2 x)\,;\\
\dot{z} &= \frac{v_r z}{R} - \left(\frac{v_\perp}{R} - \nu\right)(xy_1 - x_1 y) - py + qx - \mu\,(xy_2 - x_2 y)\,.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Аналогично вместо (1.14):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \mu\,(y_1 z_2 - y_2 z_1) - qz_1 + ry_1;\\
\dot{y}_1 &= \mu\,(z_1 x_2 - z_2 x_1) - rx_1 + pz_1;\\
\dot{z}_1 &= \mu\,(x_1 y_2 - x_2 y_1) - py_1 + qx_1\;;
\end{aligned} \tag{1.19}$$

вместо (1.15):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= -qz_2 + ry_2,\\
\dot{y}_2 &= -rx_2 + pz_2,\\
\dot{z}_2 &= -py_2 + qx_2\,;
\end{aligned} \tag{1.20}$$

вместо (1.17):

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \Omega_2 \left(y_2 z_3 - y_3 z_2 \right); \\ \dot{y}_3 &= \Omega_2 \left(x_3 z_2 - x_2 z_3 \right); \\ \dot{z}_3 &= \Omega_2 \left(x_2 y_3 - x_3 y_2 \right). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Таким образом, задача о физической либрации твёрдой Луны сводится в формулах (1.4), (1.18), (1.19), (1.20) и (1.21) к исследованию замкнутой системы из пятнадцати дифференциальных уравнений первого порядка для пятнадцати неизвестных функций времени.

§ 2 Линеаризация уравнений

В полном виде полученные выше дифференциальные уравнения нелинейны, сложны и взаимосвязаны. Поэтому далее проводится их линеаризация.

2.1 Невозмущенное и возмущенное состояния Луны

При линеаризации важно правильно выбрать такое невозмущенное состояние системы Луна-Земля-Солнце, относительно которого современное её состояние можно приближенно рассматривать как возмущённое. В качестве невозмущенного примем состояние, когда три плоскости (лунной орбиты, эклиптики и экватора Луны) совпадают, а относительное движение Земли и Луны происходит по круговой орбите радиусом R_0 (среднее расстояние Луны от Земли) с угловой скоростью из (1.8) при постоянной ориентации одной из главных осей Луны Ox на центр Земли (резонанс $1:1$); полагаем также, что в исходном состоянии Солнце «движется» вокруг Земли по кругу радиусом R_3 с квадратом угловой скорости $\Omega_2^2 = {GM_\odot}/{R_3^3}$.

Невозмущенное состояние описывается следующими условиями:

$$\begin{gathered} p = q = 0;\ \Omega_1 = r = \Omega;\ \ x_1 = y_1 = 0;\ \ z_1 = 1;\ \ x_3 = R_3 \cos\left[\Omega_2 \left(t - T_0\right)\right]; \\ \upsilon_r = 0; \\ x = R_0;\ y = z = 0; \\ x_2 = y_2 = 0;\ \ z_2 = 1;\ \ y_3 = R_3 \sin\left[\Omega_2 \left(t - T_0\right)\right];\ z_3 = 0; \\ \upsilon_\perp = R_0 \Omega_1 \left(1 - \eta_1 + \eta_2\right). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Оптическая либрация Луны, а для лунного Птолемея – это небольшие смещения Земли на небе Луны,– при таком описании исчезает.

Рассмотрим теперь возмущённое относительно (2.1) вращательное движение Луны под воздействием Земли и Солнца. По условию в качестве возмущённого принимается современное состояние движения Луны. При учёте возмущений вместо вектора угловой скорости Луны $\Omega\,(0, 0,\ \Omega_1)$ рассматривается сам вектор $\Omega\,(p,\ q,\ r)$, компоненты p и q которого малы в сравнении с третьей компонентой r; единичный вектор $\mathbf{R}_2\,(0, 0,\ 1)$ при возмущении также немного отклонится от исходного направления, перпендикулярного плоскости эклиптики и превратится в вектор $\mathbf{R}_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$, где x_2 и y_2 малы в сравнении с z_2; наоборот, у вектора $\mathbf{R}_3\,(x_3,\ y_3,\ 0)$ в возмущённом состоянии появится ненулевая компонента z_3, которую считаем малой в сравнении с величинами x_3 и y_3.

Заметим, что угол i между эклиптикой и лунной орбитой можно записать в виде

$$\begin{gathered}\sin i = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2} \approx \\ \approx \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2},\end{gathered} \tag{2.2}$$

чем позднее (см. формулу (4.4)) мы воспользуемся.

Итак, в данной задаче девять переменных

$$p,\ q,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2, z_3 \tag{2.3}$$

считаем малыми первого порядка и квадратами их пренебрегаем. К малым величинам относим и известные параметры орбиты Луны: эксцентриситет e и наклонность i. Угловую скорость поворота линии узлов μ и угловую скорость поворота линии апсид ν малыми не считаем.

Для переменных, имеющих конечное значение, при линеаризации вводим запись

$$\begin{gathered}r = \Omega_1 + \delta r,\ \ x = R_0 + \delta x,\ \ z_1 = 1 + \delta z_1,\\ z_2 = 1 + \delta z_2,\ v_\perp = R_0 \Omega_1\,(1 - \eta_1 + \eta_2) + \delta v_\perp,\end{gathered} \tag{2.4}$$

причём обозначения для функций времени $(p,\ q,\ y,\ z,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ z_3, v_r)$ как величин малых оставляем прежними и символ δ для упрощения записи к ним не применяем. Так как векторы $\mathbf{R}_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\mathbf{R}_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$ единичные, пренебрегая в равенствах типа $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$ квадратами малых величин, сразу имеем $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, то есть полагаем $\delta z_1 = 0$ и $\delta z_2 = 0$. С точностью до малых первого порядка находим и

$$\frac{v_\perp}{R} \approx \Omega_1\,(1 - \eta_1 + \eta_2) + \frac{\delta v_\perp - \Omega_1\,(1 - \eta_1 + \eta_2)\,\delta x}{R_0} \tag{2.5}$$

Кроме того, при решении данной задачи достаточно принять, что и в первом по возмущениям приближении орбита Солнца относительно Земли останется круглой, то есть

$$x_3 = R_3 \cos Q_2,\ \ y_3 = R_3 \sin Q_2,\quad Q_2 = \Omega_2\,(t - t_0)\,. \tag{2.6}$$

2.2 Линеаризация уравнений Эйлера

В первом по возмущениям приближении левые части (1.4) линеаризуются просто:

$$\dot{p} + \alpha\, q\, \Omega_1 = ..., \qquad \dot{q} - \beta p\, \Omega_1 = ..., \qquad \dot{r} = ... \,.$$

Для линеаризации правых частей уравнений (1.4) обратимся вначале к формулам (1.6), которые сейчас примут вид

$$K_{\oplus\,1} = 0\,; \;\; K_{\oplus\,2} = -\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\beta z\,; \;\; K_{\oplus\,3} = \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\gamma y. \tag{2.7}$$

Сложнее обстоит дело с линеаризацией моментов сил (1.11) от Солнца. Прежде всего,

$$D = |\mathbf{R}+\mathbf{R}_3| = \sqrt{(x+x_3)^2+(y+y_3)^2+(z+z_3)^2} =$$
$$= \sqrt{R_3^2 + 2\,(xx_3+yy_3+zz_3) + R_0^2} \approx R_3 + \frac{xx_3+yy_3+zz_3}{R_3}.$$

Здесь мы пренебрегли членом $\left({R_0}/{R_3}\right)^2 \ll 1$ (в силу малости ${R_0}/{R_3} \approx 2,55\cdot 10^{-3}$); членом zz_3 также можно пренебречь, поэтому числитель дроби в предыдущем выражении будет равен

$$(R_0+\delta x)\,x_3 + yy_3 \approx R_0 x_3,$$

и знаменатель для всех выражений в (1.11) примет вид

$$D^{-5} = |\mathbf{R}+\mathbf{R}_3|^{-5} \approx R_3^{-5} - \frac{5\,(xx_3+yy_3)}{R_3^7} \approx \frac{1}{R_3^5} - \frac{5R_0x_3}{R_3^7}. \tag{2.8}$$

В требуемом здесь приближении имеем

$$D^{-5} \approx \frac{1}{R_3^5}\left[1 - 5\frac{R_0}{R_3}\cos Q_2\right]. \tag{2.9}$$

Рассмотрим первую из формул (1.11). В числителе её сохраним малые первого порядка

$$(y+y_3)\,(z+z_3) \approx y_3\,(z+z_3)\,,$$

так что

$$\frac{y_3\,(z+z_3)}{D^{\,5}} \approx \frac{y_3\,(z+z_3)}{R_3^5}.$$

С учетом $y_3\,(t)$ из (2.6) получим

$$\frac{(y+y_3)\,(z+z_3)}{D^{\,5}} \approx \frac{z+z_3}{R_3^4}\sin Q_2.$$

Следовательно,

$$K_{\odot\,1} = \frac{3\,\Omega_2^2}{R_3}\alpha\sin Q_2\,(z+z_3)\,. \tag{2.10}$$

Для второй из формул (1.11) аналогично находим

$$(x+x_3)\,(z+z_3) = (R_0+\delta x + x_3)\,(z+z_3) \approx (R_0+x_3)\,(z+z_3)\,,$$

что даёт

$$K_{\odot\,2} = -\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\beta\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}(z+z_3)\,. \tag{2.11}$$

Переходим к анализу третьего выражения в (1.11). В числителе стоит конечная величина

$$(x+x_3)\,(y+y_3) = [R_0+\delta x+x_3]\,[y+y_3] \approx y_3\,(R_0+x_3)\,,$$

которую и надо сохранить. В итоге

$$K_{\odot\,3} = 3\Omega_2^2\,\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}. \tag{2.12}$$

В требуемом приближении компоненты момента сил от Солнца равны

$$\begin{aligned}
K_{\odot\,1} &= \frac{3\Omega_2^2}{R_3}\alpha\sin Q_2\,(z+z_3)\,;\\
K_{\odot\,2} &= -\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\beta\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}(z+z_3)\,;\\
K_{\odot\,3} &= 3\Omega_2^2\,\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

С учетом сказанного уравнения Эйлера (1.4) после линеаризации примут вид:

$$\begin{aligned}
\dot p + \alpha\,\Omega_1\,q &= \frac{3\Omega_2^2}{R_3}\alpha\sin Q_2\,(z+z_3)\,;\\
\dot q - \beta\,\Omega_1 p &= -\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\beta z -\\
&\quad -\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\beta\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}(z+z_3)\,;\\
\delta\dot r &= \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\gamma y + 3\Omega_2^2\,\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

2.3 Линеаризация 12 кинематических уравнений

Указанный способ линеаризации для кинематических уравнений (1.18) даёт

$$\begin{gathered}\delta\dot{x} = v_r;\\ \dot{y} = -\left(\Omega_1 - \mu + \nu\right)\delta x - R_0\delta r + \delta v_\perp;\\ \dot{z} = R_0\left[q - \Omega_1 y_1 + \mu\left(y_1 - y_2\right)\right].\end{gathered} \tag{2.15}$$

Следующий шаг – линеаризация двух уравнений (1.19) (третье не требуется):

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = \mu\left(y_1 - y_2\right) - q + \Omega_1\, y_1;\\ \dot{y}_1 = -\mu\left(x_1 - x_2\right) - \Omega_1\, x_1 + p.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Аналогично для группы (1.20) получим

$$\begin{gathered}\dot{x}_2 = -q + \Omega_1 y_2;\\ \dot{y}_2 = -\Omega_1 x_2 + p.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Наконец, первые два уравнения в (1.21) приводятся к виду

$$\begin{gathered}\dot{x}_3 = -\Omega_2 y_3;\\ \dot{y}_3 = \Omega_2 x_3\,.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Решением системы (2.18) и являются формулы (2.6). Для поправок к компонентам вектора $\mathbf{R}_3\left(x_3,\, y_3,\, z_3\right)$ имеем

$$\begin{gathered}\delta x_3 = 0;\quad \delta y_3 = 0;\\ \dot{z}_3 = \Omega_2 R_3\left\{x_2\sin Q_2 - y_2\cos Q_2\right\}.\end{gathered} \tag{2.19}$$

Мы видим, что z_3 в (2.19), как x_2 и y_2, есть величина первого порядка малости.

§ 3 Сводка уравнений первого приближения

На данном этапе в формулах (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) и (2.19) имеем 11 дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{p} + \alpha\,\Omega_1 q = \frac{3\Omega_2^2}{R_3}\alpha\sin Q_2\left(z + z_3\right);\\ \dot{q} - \beta\,\Omega_1 p = -\,\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\left(1+\kappa\right)}\beta z -\\ -\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\beta\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1 - 5\cos^2 Q_2\right) + \cos Q_2\right\}\left(z + z_3\right);\\ \delta\dot{r} = \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\left(1+\kappa\right)}\gamma y + 3\Omega_2^2\,\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1 - 5\cos^2 Q_2\right) + \cos Q_2\right\};\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= v_r; \\ \dot{y} &= -\left(\Omega_1 - \mu + \nu\right)\delta x - R_0 \delta r + \delta v_\perp; \\ \dot{z} &= R_0\left[q - \Omega_1 y_1 + \mu\left(y_1 - y_2\right)\right]; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu\left(y_1 - y_2\right) - q + \Omega_1 y_1; \\ \dot{y}_1 &= -\mu\left(x_1 - x_2\right) - \Omega_1 x_1 + p; \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -q + \Omega_1 y_2; \\ \dot{y}_2 &= -\Omega_1 x_2 + p; \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\dot{z}_3 = \Omega_2 R_3 \left\{x_2 \sin Q_2 - y_2 \cos Q_2\right\}. \tag{3.5}$$

(Q_2 определено в (2.6)). Неизвестными функциями являются 11 компонент четырёх векторов:

$$\delta\,\Omega\left(p,\, q,\, \delta r\right);\;\; \delta\mathbf{R}\left(\delta x,\, y,\, z\right);\;\; \delta\mathbf{R}_1\left(x_1,\, y_1\right);\;\; \delta\mathbf{R}_2\left(x_2,\, y_2\right);\;\; \delta\mathbf{R}_3\left(0,\, 0,\, z_3\right). \tag{3.6}$$

§ 4 Предварительный анализ линеаризованных уравнений

Систему полученных дифференциальных уравнений можно упростить. Обозначим

$$X\left(t\right) = x_1 - x_2; \quad Y\left(t\right) = y_1 - y_2. \tag{4.1}$$

Вычитая девятое уравнение из седьмого и десятое из восьмого, имеем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \left(\Omega_1 + \mu\right) Y; \\ \dot{Y} &= -\left(\Omega_1 + \mu\right) X \end{aligned} \tag{4.2}$$

с очевидными решениями

$$\begin{aligned} X &= \zeta \cos\left[\left(\Omega_1 + \mu\right)\left(t - T_0'\right)\right]; \\ Y &= -\zeta \sin\left[\left(\Omega_1 + \mu\right)\left(t - T_0'\right)\right], \end{aligned} \tag{4.3}$$

где амплитуда ζ – постоянная интегрирования, которую можно выразить через $\sin i$ (i – угол наклона орбиты Луны к эклиптике). Действительно, по формуле (2.2), в первом приближении

$$\sin i \approx \sqrt{\left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} = \zeta. \tag{4.4}$$

Это соотношение связывает теорию с наблюдениями.

Основную систему линеаризованных уравнений можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
\dot{p}+\alpha\,\Omega_1 q=\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\alpha\sin Q_2\,(z+z_3)\,;\\
\dot{q}-\beta\,\Omega_1 p=-\,\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\beta\,z-\\
-\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\beta\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}(z+z_3)\,;\\
\delta\dot{r}=\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\gamma y+3\Omega_2^2\,\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\};
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

$$
\begin{gathered}
\delta\dot{x}=\upsilon_r;\\
\dot{y}=-\left(\Omega_1-\mu+\nu\right)\delta x-R_0\delta r+\delta\upsilon_\perp;\\
\dot{z}=R_0\left[q-\Omega_1 y_1+\mu\left(y_1-y_2\right)\right];
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot{x}_1=-\mu\zeta\sin\left[\left(\Omega_{\,1}+\mu\right)\left(t-T_0^{'}\right)\right]-q+\Omega_1 y_1;\\
\dot{y}_1=-\mu\zeta\cos\left[\left(\Omega_{\,1}+\mu\right)\left(t-T_0^{'}\right)\right]-\Omega_1 x_1+p;
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{gathered}
x_2=x_1-\zeta\cos\left[\left(\Omega_{\,1}+\mu\right)\left(t-T_0^{'}\right)\right];\\
y_2=y_1+\zeta\sin\left[\left(\Omega_{\,1}+\mu\right)\left(t-T_0^{'}\right)\right];
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

$$
\dot{z}_3=\Omega_2 R_3\left\{x_2\sin Q_2-y_2\cos Q_2\right\}. \tag{4.9}
$$

Величины $\upsilon_r\,(t)$ и $\delta\upsilon_\perp\,(t)$ в правых частях уравнений (4.6) считаем известными функциями времени; они находятся по кеплеровскому орбитальному движению Луны вокруг Земли.

Таким образом, имеем в формулах (4.5), (4.6), (4.7) и (4.9) систему из девяти линейных дифференциальных уравнений первого порядка для девяти неизвестных функций времени

$$
(p,\,q,\,\delta r)\;;\;\;(\delta x,y,\,z)\,;\;\;(x_1,\,y_1)\,;\;z_3\,. \tag{4.10}
$$

Указанная система распадается на две группы уравнений, четную и нечетную по отношению к изменению знака z (т.е. к отражению в плоскости лунного экватора). Следовательно, вращательные колебания Луны можно рассматривать как суперпозицию независимых либраций по долготе и широте.

§ 5 Пересмотр традиционной классификации колебаний

В прежней теории физической либрации Луны пересмотру подлежит, прежде всего, традиционная терминология колебаний. В отечественной и зарубежной литературе утвердилось разделение либрационных колебаний Луны на свободные (free oscillations) и вынужденные (forced oscillations) колебания. В работе [13] предлагалось, правда, наряду с ними ввести ещё и произвольные колебания, но никаких выводов из этого не было сделано.

Мы постулируем, что в задаче о либрации Луны не существует свободных (эйлеровских) вращательных колебаний, а взамен их есть произвольные (unrestricted oscillations) колебания. Свободные и произвольные колебания описываются здесь однородными линейными дифференциальными уравнениями, и амплитуда их есть постоянная интегрирования. Однако смешивать произвольные колебания со свободными нельзя, так как при нахождении произвольных возмущающий момент от Земли, хотя и в линейном приближении, уже учитывается. Вынужденные колебания представлены, как обычно, дифференциальными уравнениями с правой частью. Почему мы отказываемся в данной задаче от термина «свободные колебания»?

При постановке задачи о движении Луны с самого начала уже учитывается притяжение Земли, которое создает для первой эллиптическую орбиту и приводит к появлению (для землян) оптической либрации. Луны, изолированной от земного притяжения, в данной задаче не существует. Физическая либрация, рассматриваемая как отклонения во вращательном движении Луны от законов Кассини (от оптической либрации) также появляется вследствие воздействия на тело Луны возмущающего приливного момента от Земли и Солнца. Другими словами, никаких свободных либраций Луны, взятой (вопреки сути задачи) самой по себе и не испытывающей гравитационного воздействия Земли, нет и быть не может. Либрационные колебания Луны мы подразделяем на два типа: произвольные (unrestricted) и вынужденные (forced).

Может показаться, что речь идёт о терминологических нюансах, не влияющих на суть дела. Это не так! В такой строгой дисциплине, как механика, неправильная терминология приводит к прямым ошибкам, что и случилось при изучении либрации Луны (см. разд. 9).

§ 6 Либрация в долготе

Мы находим, что вращательные колебания по долготе (покачивания Луны вдоль её среднего экватора) описываются группой из трех дифференциальных уравнений. Сюда входит третье уравнение из системы (4.5), а также первое и второе из (4.6):

$$\delta\dot{r} = \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\gamma y + 3\Omega_2^2\,\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\};$$
$$\delta\dot{x} = \upsilon_r;$$
$$\dot{y} = -\left(\Omega_1-\mu+\nu\right)\delta x - R_0\delta r + \delta\upsilon_\perp. \tag{6.1}$$

6.1 Уравнение для $y\,(t)$

Дифференцируя третье уравнение в (6.1) и учитывая там два других, получим

$$\ddot{y} + 3\frac{\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}\gamma y = -\Omega_1\left(1-\eta_1+\eta_2\right)\upsilon_r + \delta\dot{\upsilon}_\perp - \\ -3\Omega_2^2 R_0\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}. \tag{6.2}$$

Для нахождения решений уравнения (6.2) вначале необходимо получить вспомогательные формулы кеплеровского движения Луны по эллипсу вокруг Земли.

6.2 Формулы кеплеровского движения

Размещая начало декартовой системы координат в центре эллиптической орбиты, имеем (M – средняя аномалия, индекс « M » означает Луну):

$$x_M = a\left(\cos E - e\right),\; y_M = a\sqrt{1-e^2}\sin E,\;\; z_M = 0;$$
$$E - e\sin E = M = \left(\Omega_1-\mu+\nu\right)\left(t-T_0\right),\;\; \frac{dE}{dt} = \frac{\Omega_1-\mu+\nu}{1-e\cos E};$$
$$R_M = \sqrt{x_M^2+y_M^2} = a\left(1-e\cos E\right).$$

Радиальная скорость $\dot{R}_M$

$$\upsilon_r = \dot{R}_M = ae\sin E\cdot\dot{E} = \frac{ae\,\left(\Omega_1-\mu+\nu\right)\,\sin E}{1-e\cos E}.$$

Интеграл площадей

$$J = x_M\,\dot{y}_M - y_M\,\dot{x}_M = a^2\sqrt{1-e^2}\left(1-e\cos E\right)\dot{E}.$$

Трансверсальная скорость

$$\upsilon_\perp = \frac{J}{R_M} = a\sqrt{1-e^2}\dot{E} = \frac{\left(\Omega_1-\mu+\nu\right)a\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}.$$

В приближении до e^2 включительно (при малом $e \approx 0,0549$)

$$\begin{aligned} &E \approx M + e\sin M + e^2 \sin M \cos M; \\ &\upsilon_r \approx eR_0\Omega_1\left(1-\eta_1+\eta_2\right)\sin M(1+2e\cos M); \\ &\delta\upsilon_\perp \approx eR_0\Omega_1\left(1-\eta_1+\eta_2\right)\left(\cos M - e\sin^2 M\right), \end{aligned} \tag{6.3}$$

так что (для краткости обозначим $M = \Omega_1\left(1-\eta_1+\eta_2\right)(t-T_0) \approx Q_1$)

$$\delta\,\dot\upsilon_\perp \approx -eR_0\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2\left(\sin Q_1 - e\sin 2Q_1\right). \tag{6.4}$$

6.3 Решение уравнений либрации Луны по долготе

В классической теории физическая либрация Луны в долготе характеризуется величиной $\tau\,(t)$, отсчитываемой вдоль экватора Кассини [14] и связанной с нашей переменной $y\,(t)$ формулой

$$\tau = \frac{y_{phys}}{R_0}. \tag{6.5}$$

Здесь y_{phys} есть та часть $y\,(t)$, которая отвечает за физическую либрацию. Таким образом, из наших уравнений вначале следует найти функцию $y\,(t)$.

Уравнение для $y\,(t)$

Уравнение (6.2) с учетом υ_r из (6.3) и $\delta\,\dot\upsilon_\perp$ из (6.4) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot y + \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}\gamma y = -2\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2 eR_0\,\sin Q_1 - \\ -3\Omega_2^2 R_0\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Прежде всего, решение уравнения (6.6) без правой части

$$\ddot y + \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}\,\gamma y = 0 \tag{6.7}$$

имеет, очевидно, вид

$$y_{unres} = A_1\sin\left[\Omega_1\left(1-\eta_1+\eta_2\right)\sqrt{\frac{3\gamma}{1+\kappa}}\,t+\theta_1\right] \tag{6.8}$$

(см. также (6.18)) и описывает *произвольные* либрационные колебания Луны в долготе (а не свободные эйлеровские, как считалось ранее, так как уравнение (6.7) содержит член, представляющий линеаризованный приливной момент от Земли). Период таких произвольных колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3\gamma}{1+\kappa}}\,\Omega_1\left(1-\eta_1+\eta_2\right)} \approx 1051,13\,\textit{д.} \approx 2,878\,\textit{юл. л.} \tag{6.9}$$

Важно подчеркнуть: ранее вращательные колебания Луны почти с тем же периодом были обнаружены по результатам лазерной локации [15], однако теоретическое объяснение они получили в нашей работе. Амплитуда гармоники A_1 в (6.8)

$$A_1 = R_0\tau \approx 3,46\,\textit{км},\quad \frac{A_1}{R_0} \approx 8,993214\cdot 10^{-6}, \tag{6.10}$$

так как, согласно [11] , $\tau_{\max} = 1,855''$ (однако отметим: в [16] по результатам лазерных наблюдений за 30 лет дано $\tau_{\max} = 1,4''$, но польский ученый Козиел [17] настаивает на классическом результате $\tau_{\max} = 17''$, полученном по многолетним наблюдениям либрации Луны на гелиометре). Соответствующее смещение точек лунной поверхности составляет $15,63$ *м* вдоль экватора.

Далее преобразуем правую часть уравнения (6.6) и представим его в виде

$$\begin{gathered}\ddot{y} + \frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}\gamma y = -2\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2 eR_0\,\sin Q_1 + \\ +\frac{3}{4}\Omega_2^2\frac{R_0^2}{R_3}\gamma\sin Q_2 - \frac{3}{2}\Omega_2^2 R_0\gamma\sin 2Q_2 + \frac{15}{4}\Omega_2^2\frac{R_0^2}{R_3}\gamma\sin 3Q_2,\end{gathered} \tag{6.11}$$

где, напомним, $Q_1 = \Omega_1\,(1-\eta_1+\eta_2)\,(t-T_0)$, а Q_2 дано в (2.6).

Без гармоники произвольной либрации (6.8) решение уравнения (6.11) ищем в виде

$$y = \chi\sin Q_1 + C_1\sin Q_2 + C_2\sin 2Q_2 + C_3\sin 3Q_2. \tag{6.12}$$

Подставляя (6.12) в (6.11), находим амплитуды четырёх гармоник

$$\begin{gathered}\chi = \frac{2eR_0}{1-\dfrac{3\gamma}{1+\kappa}};\ C_1 = -\frac{\dfrac{3}{4}\dfrac{R_0^2}{R_3}\gamma}{1-3\gamma\eta_3^2\dfrac{(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}}; \\ C_2 = \frac{\dfrac{3}{8}\gamma R_0}{1-3\gamma\eta_3^2\dfrac{(1-\eta_1+\eta_2)^2}{4\,(1+\kappa)}};\ \ C_3 = -\frac{\dfrac{5}{4}\dfrac{R_0^2}{R_3}\gamma}{3-\gamma\eta_3^2\dfrac{(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}}.\end{gathered} \tag{6.13}$$

(η_3 дано в (1.16)). Таким образом, вынужденная общая (оптическая плюс физическая) либрация Луны по долготе описывается формулой (6.12) с коэффициентами (6.13).

При отсутствии приливного (возмущающего) гравитационного воздействия на Луну, то есть при $\gamma = 0$ в коэффициентах (6.13), формула (6.12) дает саму оптическую либрацию по долготе:

$$y_{opt} = 2eR_0 \sin M \tag{6.14}$$

с амплитудой $arctg\, 2e \approx 6,3°$.

Физическая либрация по долготе y_{phys} получается как разность

$$y_{phys} = y - y_{opt}, \tag{6.15}$$

что даёт

$$y_{phys} = \gamma R_0 \left\{ \frac{6\,e}{1+\kappa-3\gamma} \sin Q_1 + \frac{C_1}{\gamma R_0} \sin Q_2 + \frac{C_2}{\gamma R_0} \sin 2Q_2 + \frac{C_3}{\gamma R_0} \sin 3Q_2 \right\}, \tag{6.16}$$

где, напомним, постоянные C_1, C_2, C_3 из (6.13). В этом решении, как и в (6.12), четыре гармоники: с периодом в $T_2 = 27,2011\,\partial.$, земной звездный год, с периодом в половину этого года, четвертая – в одну его треть. Как видно из формулы (6.16), все четыре амплитуды пропорциональны малому экваториальному динамическому сжатию Луны γ, что радикально меняет первоначальную оценку роли Солнца в сторону её повышения. Расчёт подтверждает этот вывод: в (6.16) для четырёх амплитуд имеем (в единицах γR_0) следующие значения:

$$\begin{gathered} \frac{6\,e}{1+\kappa-3\gamma} \approx 0,32562; \quad \frac{C_1}{\gamma R_0} \approx -1,9125 \cdot 10^{-3}; \\ \frac{C_2}{\gamma R_0} = 0,3750; \quad \frac{C_3}{\gamma R_0} \approx -1,0625 \cdot 10^{-3}. \end{gathered} \tag{6.17}$$

Как видим, для вынужденных вращательных колебаний Луны по долготе третья гармоника от Солнца имеет несколько большую амплитуду $\dfrac{C_2}{\gamma R_0} = 0,3750$, нежели первая гармоника от Земли (однако периоды этих гармоник совершенно разные).

Формулу (6.16) можно записать и так:

$$\frac{y_{phys}}{R_0} = 15,305'' \sin Q_1 - 0,090'' \sin Q_2 + 17,626'' \sin 2Q_2 - 0,050'' \sin 3Q_2. \tag{6.18}$$

Кроме того, сюда следует прибавить и произвольную гармонику (см. (6.8) и (6.10)):

$$\frac{y_{unres}}{R_0} = y_{unres} = 1,855'' \sin \left[\Omega_1 \left(1 - \eta_1 + \eta_2\right) \sqrt{\frac{3\gamma}{1+\kappa}}\, t + \theta_1 \right]. \tag{6.19}$$

Итак, произвольные колебания по долготе у Луны в настоящее время существуют, должен быть и источник их возобновления.

Нахождение величин δx и δr

Из второго уравнения (6.1) с учетом v_r из (6.3), отбрасывая константу интегрирования, находим простое решение

$$\delta x = -eR_0 \cos Q_1. \tag{6.20}$$

Находим $\delta r\,(t)$. Это можно сделать прямо из первого уравнения в (6.1) с учетом известного $y\,(t)$ из (6.12). Однако есть и более простой способ. Заметим, что, исключая с помощью (6.6) из уравнения для $\delta\dot{r}$ комбинацию

$$\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2\gamma}{R_0\,(1+\kappa)}y + 3\Omega_2^2\gamma\sin Q_2\left\{\frac{R_0}{R_3}\left(1-5\cos^2 Q_2\right)+\cos Q_2\right\},$$

получим уравнение

$$\delta\dot{r} = -\frac{\ddot{y}}{R_0} - 2\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2 e\sin Q_1. \tag{6.21}$$

Его интеграция с учетом вида $y\,(t)$ из (6.12) дает

$$\frac{\delta r_{forsed}}{\gamma\Omega_1} = -\frac{6e\,(1-\eta_1+\eta_2)}{1+\kappa-3\gamma}\cos Q_1 + \frac{\dfrac{3}{4\eta_3}\dfrac{R_0}{R_3}}{1-3\gamma\eta_3^2\dfrac{(1-\eta_1+\eta_2)^2}{1+\kappa}}\cos Q_2 -$$
$$-\frac{\dfrac{3}{4\eta_3}}{1-3\gamma\eta_3^2\dfrac{(1-\eta_1+\eta_2)^2}{4\,(1+\kappa)}}\cos 2Q_2 + \frac{\dfrac{5}{4\eta_3}\dfrac{R_0}{R_3}}{1-\gamma\eta_3^2\dfrac{(1-\eta_1+\eta_2)^2}{3\,(1+\kappa)}}\cos 3Q_2. \tag{6.22}$$

Первая гармоника описывает влияние Земли, три других – влияние Солнца. Подставляя в коэффициенты известные числовые константы, запишем (6.22) в виде

$$\begin{gathered}\frac{\delta r_{forsed}}{\gamma\Omega_1} = -0,3271\cos Q_1 + 0,02557\cos Q_2 - \\ -10,0267\cos 2Q_2 + 0,04261\cos 3Q_2.\end{gathered} \tag{6.23}$$

Наибольшую амплитуду имеет гармоника от Солнца с полугодовым периодом.

Если учитывать и найденные выше произвольные колебания по долготе, к (6.23) следует добавить результат интегрирования функции (6.8):

$$\frac{\delta r_{unres}}{\Omega_1} \approx -8,9933 \cdot 10^{-6} \cos \left[\Omega_1 \left(1 - \eta_1 + \eta_2\right) \sqrt{\frac{3\gamma}{1+\kappa}} t + \theta_1 \right]. \tag{6.24}$$

Имеем, следовательно,

$$\delta r = \delta r_{unres} + \delta r_{forced}. \tag{6.25}$$

Нулевая частота

Система уравнений (6.1) имеет, как легко видеть, ещё и нулевую частоту $\omega = 0$. Соответствующее этой нулевой частоте решение в системе (6.1) суть

$$y = 0;\ \delta r = -\Omega_1 \left(1 - \eta_1 + \eta_2\right) \frac{\delta x}{R_0}. \tag{6.26}$$

Это решение означает: малое изменение расстояния Луна-Земля приводит и к малому изменению спиновой угловой скорости самой Луны!

Таким образом, либрация Луны по долготе новым методом изучена.

§ 7 Физическая либрация Луны по широте

Либрация по широте представляет собой малые покачивания тела Луны в направлении, перпендикулярном плоскости её среднего экватора. Изучение этих колебаний и в линейном приближении приводит к анализу сложной системы из шести уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{p} + \alpha\,\Omega_1 q = \frac{3\Omega_2^2}{R_3}\alpha \cdot \sin Q_2 \left(z + z_3\right); \\
\dot{q} - \beta\,\Omega_1 p = -\frac{3\Omega_1^2 (1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0 \left(1+\kappa\right)}\beta z - \\
-\frac{3\Omega_2^2}{R_3}\beta \left\{ \frac{R_0}{R_3} \left(1 - 5\cos^2 Q_2\right) + \cos Q_2 \right\} \left(z + z_3\right); \\
\dot{z} = R_0 \left[q - \Omega_1 y_1 + \mu \left(y_1 - y_2\right)\right]; \\
\dot{x}_1 = -\mu\zeta \sin\left[\left(\Omega_1 + \mu\right)\left(t - T_0'\right)\right] - q + \Omega_1 y_1; \\
\dot{y}_1 = -\mu\zeta \cos\left[\left(\Omega_1 + \mu\right)\left(t - T_0'\right)\right] - \Omega_1 x_1 + p; \\
\dot{z}_3 = \Omega_2 R_3 \left\{x_2 \sin Q_2 - y_2 \cos Q_2\right\}
\end{gathered} \tag{7.1}$$

для шести неизвестных функций времени $(p,\ q,\ z,\ x_1,\ y_1,\ z_3)$. Напомним: хотя в последнее уравнение из системы (7.1) входят и величины $x_2(t)$, $y_2(t)$, однако они выражаются с помощью первых двух формул из системы (4.8) через учтенные неизвестные $x_1(t)$, $y_1(t)$. Далее понадобятся два лунных месяца:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{2\pi}{\Omega_1+\mu} \approx 27,2122\,\textit{дня (драконический лунный месяц)};\\ T_4 &= \frac{2\pi}{\Omega_1} \approx 27,32\,\textit{дня (сидерический лунный месяц)}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.1 Вынужденная либрация Луны по широте при учёте возмущений от одной Земли

Целесообразно вначале найти то решение системы (7.1), когда влиянием Солнца пренебрегаем. Полагая в правых частях уравнений $\Omega_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \dot p + \alpha\,\Omega_1\, q &= 0;\\ \dot q - \beta\,\Omega_{\,1} p &= -\frac{3\Omega_1^2(1-\eta_1+\eta_2)^2}{R_0\,(1+\kappa)}\beta z;\\ \dot z &= R_0\left[q - \Omega_1 y_1 - \mu\zeta\sin\left[(\Omega_1+\mu)\left(t-T_0^{'}\right)\right]\right];\\ \dot x_1 &= -\mu\zeta\sin\left[(\Omega_1+\mu)\left(t-T_0^{'}\right)\right] - q + \Omega_1\, y_1;\\ \dot y_1 &= -\mu\zeta\cos\left[(\Omega_1+\mu)\left(t-T_0^{'}\right)\right] - \Omega_1\, x_1 + p. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Таким образом, в данном приближении вместо (7.1) имеем систему пяти уравнений (7.3).

Характеристическое уравнение системы (7.3)

$$x^5 + x^3\Omega_1^2 + \Omega_1^2 m x^3 + \beta\,\Omega_1^2\alpha x^3 + \beta\,\Omega_1^4\alpha x + \alpha\,\Omega_1^4 m x = 0 \tag{7.4}$$

имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0;\\ \omega_{2,3} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+m+\alpha\beta\,\Omega_1 - \sqrt{m^2+2m\,(1+\alpha\beta-2\alpha)+(1-\alpha\beta)^2}};\\ \omega_{4,5} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+m+\alpha\beta\,\Omega_1 + \sqrt{m^2+2m\,(1+\alpha\beta-2\alpha)+(1-\alpha\beta)^2}}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

где для краткости мы обозначили

$$m = \frac{3\beta}{1+\kappa}(1-\eta_1+\eta_2)^2 \approx 1,88807\cdot 10^{-3}. \tag{7.6}$$

Нахождение $y_1(t)$ и $y_2(t)$

Дифференцируя пятое уравнение в (7.3) и исключая $\dot{p}$ с помощью первого, а $\dot{x}_1$ – с помощью четвертого, получим

$$\ddot{y}_1+\Omega_1^2 y_1=\Omega_1(1-\alpha)\,q+\mu\zeta(2\Omega_1+\mu)\sin Q_1'; \quad Q_1'=(\Omega_1+\mu)\left(t-T_0'\right). \tag{7.7}$$

Затем дифференцируем второе уравнение в (7.3) и с учетом третьего там уравнения находим

$$\ddot{q}+\Omega_1^2(m+\alpha\beta)\,q=\Omega_1^3 m\,y_1+\Omega_1^3\eta_1\zeta m\cdot\sin Q_1', \tag{7.8}$$

где m из (7.6).

Теперь возвращаемся к (7.7) и дифференцируем это уравнение ещё дважды. Затем там, с учетом (7.8), исключаем $\ddot{q}$, а появляющееся при этом q опять исключим с помощью уравнения (7.7). В итоге получим линейное дифференциальное уравнение для $y_1(t)$:

$$\begin{gathered}\ddot{\ddot{y}}_1+\Omega_1^2[1+m+\alpha\beta]\,\ddot{y}_1+\alpha\,\Omega_1^4(m+\beta)\,y_1=\\=-\Omega_1^4\zeta\eta_1\left\{(2+\eta_1)(1+\eta_1)^2-m(3+\eta_1-\alpha)-\alpha\beta(2+\eta_1)\right\}\times\sin Q'_1.\end{gathered} \tag{7.9}$$

Это – линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с правой частью.

Соответствующее (7.9) однородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\ddot{y}}_1+\Omega_1^2[1+m+\alpha\beta]\,\ddot{y}_1+\alpha\,\Omega_1^4(m+\beta)\,y_1=0 \tag{7.10}$$

имеет решение в виде произвольных колебаний

$$y_1(t)=A_3\sin(\omega_2 t+\theta_1)+A_4\sin(\omega_4 t+\theta_2), \tag{7.11}$$

где частоты ω_2 и ω_4 даны в (7.5).

Одна из них близка к Ω_1:

$$\omega_2\approx\left(1+\frac{m}{2}(1-\alpha)\right)\Omega_1\approx(1+0.000944)\,\Omega_1 \tag{7.12}$$

с соответствующим периодом колебаний

$$T_6\approx 27,34745\ \partial., \tag{7.13}$$

а другая очень мала

$$\begin{gathered}\omega_4\approx\sqrt{\frac{4+\kappa+3(2+\eta_2-\eta_1)(\eta_2-\eta_1)}{1+\kappa}\alpha\beta}\,\Omega_1\approx\\\approx 1,997\sqrt{\alpha\beta}\,\Omega_1\approx 1,0084\cdot 10^{-3}\Omega_1\end{gathered} \tag{7.14}$$

с периодом колебаний

$$T_5 = 27094,070\,\textit{д.} = 74,180\,\textit{юл. л.} \tag{7.15}$$

Полное решение уравнения (7.9) ищем в виде суммы трех гармоник

$$y_1(t) = A_3 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_4 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + h \cdot \zeta \cdot \sin\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T_0'\right)\right], \tag{7.16}$$

где A_3 и A_4 – постоянные интегрирования. Два периода произвольных колебаний даны в (7.13) и (7.15), третий, описывающий вынужденные колебания – это драконический лунный месяц из (7.2).

Подставляя последний член из (7.16) в (7.9), для коэффициента h получим алгебраическое уравнение

$$\begin{gathered} h\left\{(1+\eta_1)^4 - (1+\eta_1)^2\left[1 + m + \alpha\beta\right] + \alpha\,(m+\beta)\right\} = \\ = -\eta_1\left[(2+\eta_1)(1+\eta_1)^2 - m(3+\eta_1-\alpha) - \alpha\beta(2+\eta_1)\right], \end{gathered} \tag{7.17}$$

откуда находим

$$h = -\frac{\eta_1\left[(2+\eta_1)(1+\eta_1)^2 - m(3+\eta_1-\alpha) - \alpha\beta(2+\eta_1)\right]}{(1+\eta_1)^2\left[\eta_1(2+\eta_1) - m - \alpha\beta\right] + \alpha(m+\beta)}. \tag{7.18}$$

По формуле (7.18) при известных из (1.3) α, β и η_1, η_2 из (1.9) находим важный коэффициент

$$h \approx -1,30193. \tag{7.19}$$

Далее, зная $y_1(t)$ из (7.16), из второй формулы в (4.8) находим и величину

$$\begin{gathered} y_2(t) = A_3 \sin(\omega_2 t + \theta_1) + A_4 \sin(\omega_4 t + \theta_2) + \\ + \zeta(1+h)\sin\left[(\Omega_1+\mu)\left(t - T_0'\right)\right]. \end{gathered} \tag{7.20}$$

Нахождение $q(t)$

Нетрудно теперь записать решение для $q(t)$:

$$q(t) = -H_1 \sin(\omega_2 t + \theta_1) - H_2 \sin(\omega_4 t + \theta_2) - \zeta \cdot h \cdot H_3 \sin Q_1{}', \tag{7.21}$$

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. № 1

$(Q_1{}' = \Omega_1 (1+\eta_1)(t - T_0{}'))$, где коэффициенты

$$H_1 = A_3\Omega_1 \frac{m}{\dfrac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} - m} \approx 1,890 \cdot 10^{-3} \cdot A_3\Omega_1;$$
$$H_2 = A_4\Omega_1 \frac{m}{\dfrac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} - m} \approx -1,000539 \cdot A_4\,\Omega_1; \tag{7.22}$$
$$H_3 = \Omega_1 \frac{m\left(1+\dfrac{\eta_1}{h}\right)}{(1+\eta_1)^2 - m} \approx 1,87070 \cdot 10^{-3}\Omega_1.$$

Периоды T_6 и T_5 для частот ω_2 и ω_4 даны в (7.13) и (7.15), период T_1 для частоты $(\mu+\Omega_1)$ дан в (7.2).

Заметим, что

$$-\frac{\zeta h H_3}{\Omega_1} \approx 2,18142 \cdot 10^{-4} \approx 45,02''. \tag{7.23}$$

Решения для $x_1(t)$ и $x_2(t)$

Аналогично находим и $x_1(t)$:

$$x_1(t) = -\zeta \frac{h\left(1+\frac{H_3}{\Omega_1}\right) - \eta_1}{1+\eta_1}\cos Q_1{}' - \\ -\frac{H_1 + A_3\Omega_1}{\omega_2}\cos(\omega_2\,t + \theta_1) - \frac{H_2 + A_4\Omega_1}{\omega_4}\cos(\omega_4\,t+\theta_2). \tag{7.24}$$

Подставляя это решение в первую из формул (4.8), находим и функцию

$$x_2(t) = -\zeta \frac{1 + h\left(1+\frac{H_3}{\Omega_1}\right)}{1+\eta_1}\cos Q_1{}' - \\ -\frac{H_1 + A_3\Omega_1}{\omega_2}\cos(\omega_2\,t + \theta_1) - \frac{H_2 + A_4\Omega_1}{\omega_4}\cos(\omega_4\,t+\theta_2). \tag{7.25}$$

Заметим, что для осредненных по времени функций соблюдается примерное (по порядку величин) равенство

$$\langle x_1(t)\rangle \sim \langle y_1(t)\rangle; \qquad \langle x_2(t)\rangle \sim \langle y_2(t)\rangle. \tag{7.26}$$

Нахождение $p\,(t)$ **и** $z\,(t)$

При известном $q\,(t)$ из (7.21) из первого уравнения (7.3) с тем же приближением находим

$$\frac{p\,(t)}{\alpha}=-\frac{\Omega_1 H_1}{\omega_1}\cos\left(\omega_1\,t+\theta_1\right)-\frac{\Omega_1 H_2}{\omega_2}\cos\left(\omega_2\,t+\theta_2\right)-\zeta\frac{h\,H_3}{1+\eta_1}\cos{Q_1}'. \quad (7.27)$$

Аналогично из третьего и четвертого уравнений в (7.3) находим и функцию

$$\begin{gathered}\frac{z\,(t)}{R_0}=\frac{A_3\Omega_1+H_1}{\omega_2}\cos\left(\omega_2\,t+\theta_1\right)+\\ +\frac{A_3\Omega_1+H_1}{\omega_4}\cos\left(\omega_4\,t+\theta_2\right)+\zeta\frac{h\left(1+\frac{H_3}{\Omega_1}\right)-\eta_1}{1+\eta_1}\cos{Q_1}'.\end{gathered} \quad (7.28)$$

Стационарное решение

Система (7.3) содержит пять дифференциальных уравнений первой степени, следовательно, алгебраическое характеристическое уравнение должно иметь пятый порядок. Но уравнение (7.10) имеет четвертый порядок, так что должна существовать еще одна – пятая частота. Эта пятая частота для системы уравнений (7.3) должна быть, согласно (7.5), нулевой, что означает бесконечный период и стационарность решения. Само это решение мы получим из (7.3):

$$q=y_1=0;\qquad \frac{p}{\Omega_1}=\frac{m}{\beta}\frac{z}{R_0}=x_1\ \left(=\cos\delta\right). \quad (7.29)$$

Таким образом, новое решение предсказывает существование наклона тела Луны, когда длинная ось её эллипсоида инерции «смотрит» несколько ниже (на юг) центра самой Земли. При этом ось вращения Луны наклоняется не столь сильно, как само тело нашего спутника: имеет место эллиптическая прецессия оси вращения Луны.

§ 8 Сравнение с наблюдениями и проверка формул

Calame из лазерных наблюдений нашла свободные колебания с периодом примерно 75 *юл. л.* [15]. У нас такой период также есть, см. (7.15), однако относится он к произвольным колебаниям. У Calame имеет место неудачное применение термина free oscillation (см. § 6).

Чтобы выполнялся третий закон Кассини, необходимо потребовать обращения в нуль определителя

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}=0. \quad (8.1)$$

Подставляя в левую часть (8.1) найденные выше решения, находим, что

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \sim \eta_1. \tag{8.2}$$

Из-за малости η_1 из (1.9) равенство (8.1) выполняется с принятой точностью первого приближения.

Другим важным результатом теории, допускающим прямую проверку с наблюдениями, является нахождение отношения $\Delta = \frac{y_2}{y_1}$. Из геометрических соображений следует, что

$$\Delta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\sin I}{\sin(I+i)}. \tag{8.3}$$

Подставляя сюда значения $I = 1,542417°$ – средний угол наклона плоскости лунного экватора к плоскости эклиптики и $i = 5,143°$ – средний угол между эклиптикой и плоскостью лунной орбиты, в согласии с наблюдениями имеем:

$$\Delta = 0,2311. \tag{8.4}$$

С другой стороны, из (7.16) и (7.20):

$$\Delta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{1+h}{h}. \tag{8.5}$$

Подставляя сюда h из (7.19), находим

$$\Delta = \frac{y_2}{y_1} \approx 0,2319. \tag{8.6}$$

Сравнивая Δ в (8.4) и (8.6), находим хорошее совпадение наблюдений и теории.

Для определения амплитуд произвольных колебаний в нашей теории необходимо провести сравнение полученных формул с результатами наблюдений. Обратимся для этого к [15] и [16]. В [16] на с. 262 приводятся выражения

$$\begin{gathered} p_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + g_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + g_2), \\ p_2 = K_1 A_1 \cos(\omega_1 t + g_1) + K_2 A_2 \cos(\omega_2 t + g_2). \end{gathered} \tag{8.7}$$

Здесь p_1 и p_2 – направляющие косинусы полюса эклиптики по отношению к двум главным осям инерции, причем

$$\begin{gathered} \omega_1 = 0,230184429\, \textit{рад/день}; \\ \omega_2 = 2,303155338 \cdot 10^{-4}\, \textit{рад/день}; \\ K_1 = 0,9990713\ ;\ K_2 = -2,4872105. \end{gathered} \tag{8.8}$$

Фактически сравнивая формулы (8.7) с нашими, находим, что p_1 есть наше $y_2(t)$ из (7.19) и p_2 есть $x_2(t)$ из (7.24), а ω_1 и ω_2 из (8.8) и есть частоты нашей теории из (7.12) и (7.14). На с. 263 в [16] приводятся и сами амплитуды колебаний:

$$A_1 \approx 0{,}377''; \;\; A_2 \approx 0{,}325''. \tag{8.9}$$

Для амплитуд в нашей теории это дает

$$A_3 \approx 0{,}377''; \;\; A_4 \approx 0{,}325''. \tag{8.10}$$

С этими значениями коэффициентов A_3 и A_4 имеем:

$$\begin{gathered} y_1(t) = 0{,}377'' \sin(\omega_2 t + \theta_1) + 0{,}325'' \sin(\omega_4 t + \theta_2) - \\ -6{,}671^\circ \sin\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T'_0\right)\right]; \end{gathered} \tag{8.11}$$

$$\begin{gathered} y_2(t) = 0{,}377'' \sin(\omega_2 t + \theta_1) + 0{,}325'' \sin(\omega_4 t + \theta_2) - \\ -1{,}5479^\circ \sin\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T'_0\right)\right]. \end{gathered} \tag{8.12}$$

Здесь y_1 и y_2 описываются тремя гармониками (две первые произвольные, третья – вынужденная). Далее

$$\begin{gathered} x_1(t) = 6{,}7693^\circ \cos\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T'_0\right)\right] - \\ -0{,}3774'' \cos(\omega_2 t + \theta_1) + 0{,}1737'' \cos(\omega_4 t + \theta_2); \end{gathered} \tag{8.13}$$

$$\begin{gathered} x_2(t) = 1{,}6935^\circ \cos\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T'_0\right)\right] - \\ -0{,}3774'' \cos(\omega_2 t + \theta_1) + 0{,}1737'' \cos(\omega_4 t + \theta_2); \end{gathered} \tag{8.14}$$

$$\begin{gathered} \frac{q(t)}{\Omega_1} = -0{,}0007'' \sin(\omega_2 t + \theta_1) + 0{,}3252'' \sin(\omega_4 t + \theta_2) + \\ +45{,}02'' \sin\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T'_0\right)\right]; \end{gathered} \tag{8.15}$$

$$\begin{gathered} \frac{p(t)}{\Omega_1} = -2{,}9'' \cdot 10^{-7} \cos(\omega_2 t + \theta_1) - 0{,}13015'' \cos(\omega_4 t + \theta_2) + \\ +0{,}01806'' \cos\left[(\mu + \Omega_1)\left(t - T'_0\right)\right]; \end{gathered} \tag{8.16}$$

$$\begin{gathered} \frac{z(t)}{R_0} = -6{,}7693^\circ \cos\left[(\Omega_1 + \mu)\left(t - T'_0\right)\right] + \\ +0{,}3774'' \cos(\omega_2 t + \theta_1) - 0{,}1737'' \cos(\omega_4 t + \theta_2). \end{gathered} \tag{8.17}$$

Подчеркнем, что y_1 b y_2 из (8.11) и (8.12) описываются тремя гармониками (две - произвольные, одна – вынужденная), величины же x_1, x_2, p, q и z представлены четырьмя гармониками (три произвольных и одна вынужденных колебаний). Заметим, что амплитуды произвольных колебаний здесь зависят от значений (8.9) и в дальнейшем при уточнении наблюдений могут быть скорректированы.

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. №1

§ 9 О недостатках прежней теории

В прежней теории физической либрации Луны накопился ряд ошибок.

1. В § 5 уже говорилось, что в отечественной и зарубежной литературе либрационные колебания Луны ошибочно подразделялись на свободные («free oscillations») и вынужденные («forced oscillations»). В нашей работе развивается и обосновывается иная точка зрения: в либрации Луны свободных (эйлеровских) колебаний вообще нет. При постановке задачи о вращательных и поступательных движениях Луны с самого начала уже обязательно учитывается притяжение Земли, что создает (в первом приближении) саму эллиптическую орбиту Луны и приводит к появлению (для землян) оптической либрации. Так и физическая либрация, рассматриваемая как отклонение во вращательном движении Луны от законов Кассини (от оптической либрации), появляется вследствие воздействия на тело Луны возмущающего приливного момента от Земли и других небесных тел. Именно поэтому никаких свободных либраций Луны, взятой (вопреки сути задачи!) самой по себе и не испытывающей гравитационного воздействия Земли, нет и быть не может. Либрационные колебания Луны мы подразделяем на два типа: произвольные (unrestricted) и вынужденные (forced).

В механике неправильная терминология ведёт к ошибкам, что и случилось ранее при рассмотрении либрации Луны. Укажем на две из них.

2. Рассматривая свободную либрацию по широте и отбрасывая в правых частях первых двух уравнений (4.5) приливной момент от Земли и Солнца, видный специалист Мельхиор [8, С. 460] записывает систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot p + \alpha\,\Omega_1\, q = 0; \\ \dot q - \beta\,\Omega_{\,1} p = 0 \end{aligned} \tag{9.1}$$

с очевидными решениями

$$\begin{aligned} p = F\cos\left[\Omega_1\sqrt{\alpha\beta}\,t + g\right]; \\ q = F\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sin\left[\Omega_1\sqrt{\alpha\beta}\,t + g\right], \end{aligned} \tag{9.2}$$

которые трактует как свободную прецессию Луны по широте с частотой $\Omega_1\sqrt{\alpha\beta}$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_1\sqrt{\alpha\beta}} = 148,167\,\textit{юл. л.} \tag{9.3}$$

У нас таких свободных колебаний в задаче о физической либрации Луны не существует. Вместо ошибочного решения (9.3) в нашем подходе имеем из (7.14) частоту в два раза большую, нежели у Мельхиора:

$$\omega_4 \approx 2\Omega_1\sqrt{\alpha\beta} \tag{9.4}$$

с соответствующим периодом (7.15) $T_5 \approx 74,180$ *юл. л.* Итак, вместо навязываемого Луне периода в 150 *юл. л.*, на самом же деле у неё должен быть период в два раза меньше.

3. Похоже, именно из-за неправильной классификации колебаний в теории физической либрации Луны у ряда исследователей (Хабибуллин, Мельхиор, Куликов и Гуревич) отсутствует и критическое отношение к описанию кинематики вращения Луны с помощью известного метода Пуансо, когда вращение твердой Луны трактовалось ими как качение без скольжения подвижного кругового аксоида по круговому неподвижному аксоиду, или качение полодии по герполодии [7; 8, С. 462; 14, С. 70]. Опираясь на трактовку Пуансо, по известным данным они получали угол полураствора подвижного аксоида равным

$$5524''\frac{27,212}{18,61\times 365,25} \equiv 22''. \tag{9.5}$$

Эти $22''$ рассматривались как угол между мгновенной осью вращения Луны и полюсом фигуры (полюсом Кассини). Однако данный результат неверен. Метод Пуансо нельзя применять в таком виде (т.е. считая Землю сжатым сфероидом с известным полураствором неподвижного конуса в $5524''$). См., например, [18].

Для правильной, с нашей точки зрения, оценки углового расстояния между мгновенной осью вращения Луны и полюсом фигуры рассмотрим движение мгновенного полюса Луны вокруг точки пересечения лунной поверхности с осью Кассини (динамического полюса фигуры). Согласно (7.21) или (8.15) это движение представлено тремя гармониками. У второй и третьей гармоник частоты очень близки: $\omega_2 \approx \left(1+9.44\cdot 10^{-4}\right)\Omega_1$ и $\Omega_1\left(1+\eta_1\right) = \left(1+4.0213398\cdot 10^{-3}\right)\Omega_1$. Эти две гармоники образуют биения с большим периодом 48,62 *юл. л.* и внутренним периодом в $T_1 = 27,389$ *д.*, чуть большим, чем сидерический месяц. Первый же период в 648 раз больше, и амплитуда этих биений колеблется периодически, меняясь между двумя пределами:

$$|H_1+\zeta hH_3| \leqslant q \leqslant |H_1-\zeta hH_3|. \tag{9.6}$$

Таким образом, найденное движение истинного полюса является весьма сложным, и даже если постоянной интегрирования A_5 можно было бы пренебречь (а данных для этого пока нет), то и тогда

$$44,7'' \leqslant \frac{q}{\Omega_1} \leqslant 45,3'', \tag{9.7}$$

что почти в два раза больше обычно принимаемой цифры в $22''$ (см. [9;14]).

Некоторые выводы

Подход Лапласа к задаче о физической либрации твердой Луны имеет ряд недостатков и в значительной степени себя исчерпал. Векторный аналитический подход более удобен, информативен и при интеграции уравнений не требует сложных замен переменных. В нем упрощается и процесс линеаризации уравнений. Всё это важно, учитывая математическую сложность данной проблемы.

В новом подходе все либрационные колебания Луны разделены на произвольные (unrestricted) и вынужденные (forced), причем отказ от свободных (эйлеровских) вращательных колебаний обоснован и приводит к важным последствиям. Хотя этот вопрос поднимался и до нас [13], но он считался методическим, и никаких существенных выводов из него не делалось. Мы показываем, что отказ от свободных колебаний приводит к решительному пересмотру навязываемого Луне в либрации по широте периода в 150 *юл. л.* Вместо них правильными следует считать значение периода в $T_5 \approx 74,180$ *юл. л.*

Произвольные колебания в долготе имеют период $T_1 = 2,878$ *юл. л.* (амплитуда $1,855''$), а вынужденная физическая либрация в долготе представлена периодами в $T_2 = 27,2011$ *д.* ($15,305''$), звёздный год ($0,090''$), полугод ($17,626''$) и треть года ($0,050''$). Из-за полугодовой гармоники влияние Солнца на эти колебания сравнимо с земным. Найденный период T_1 произвольной либрации Луны по долготе близок к трем годам, а амплитуда отлична от нуля. Внутри космического тела таких размеров, как Луна, вещество должно проявлять вязкость и пластичность и такие колебания должны затухать. Очевидно, вопрос о существовании и поддержке колебаний Луны, не являющихся вынужденными, связан с необходимостью указания их источника. Это могут быть какие-то дополнительные силы или удары крупных метеоритов о тело Луны. Эти вопросы важны и интересны, однако лежат вне рамок данной работы.

Физическую либрацию Луны в широте (при учете влияния одной только Земли) описывают две гармоники произвольных колебаний $T_5 \approx 74,180$ *юл. л.*, $T_6 = 27,3474$ *д.* и одна гармоника вынужденных колебаний $T_3 = 27,212$ *д.* Движение истинного полюса представлено этими же гармониками. Стационарный наклон к югу длинной оси Луны, предсказанный нами, действительно существует. Для известного из наблюдений отношения $\dfrac{\sin I}{\sin(I+i)} \approx 0,2311$ теория даёт весьма близкое значение $0,2319$, что подтверждает надежность разработанного метода.

В данной работе задача о физической либрации Луны была рассмотрена в линейном приближении. Учет нелинейности может в целом заметно изменить и уточнить результаты по либрации в широте. Однако это тема исследования для будущей статьи. В этой связи заметим, что найденные выше решения понадобятся нам во второй части работы при анализе проблемы о физической либрации Луны в нелинейной постановке.

Сравнения с наблюдениями приводят к заключению, что модель абсолютно твердой Луны не дает объяснения полного эффекта. Дело в том, что для разности фаз между приложенным к Луне моментом сил и самой либрацией эта модель предсказывает величину запаздывания, равную нулю. Вместе с тем, наблюдения дают для указанной разности фаз величину, отличную от нуля. Это позволило предположить, что модель твердого тела недостаточно хороша и внутри Луны есть жидкое вязкое ядро. Учет вязкости недр Луны в проблеме физической либрации – это важная тема для последующих исследований в рамках нового подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Араго Ф. Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Москва–Ижевск: РХД, 2000. Т. 1. 495 с.
2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Собр. трудов акад. А.Н. Крылова. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 7.
3. Кондратьев Б. П. Задача о движении и вращении Луны // Квант. 2009.
4. Lagrange J. L. Mem. Acad. Berlin, in "Oeuvres de Lagrange"/ ed J. M.Serret Paris: Gauthiers - Villars, 1780. Vol. 5.
5. Хабибуллин Ш. Т. Физическая либрация Луны // Изв. АОЭ. 1958. № 31. 182 с.
6. Хабибуллин Ш. Т. Нелинейная теория физической либрации Луны // Тр. Казан. гор. астрон. обс. 1966. № 34. С. 3-70.
7. Горыня А. А. Постоянные физической либрации Луны. Киев: Наук. думка, 1969. 276 с.
8. Мельхиор П. Физика и динамика планет. М.: Мир, 1976. Ч. 2. 483 с.
9. Моутсулас М. Д. Либрация Луны // Физика и астрономия Луны/ под. ред. З. Копала. М.: Мир, 1973. 320 с.
10. Williams J. G., Newhall X. X., Dickey J. O. Lunar free libration // Planetary and Space Science. 1996. Vol. 44. C. 10.
11. Полак И. Ф. Курс общей астрономии. М.-Л.: ОНТИ, 1938. 196 с.
12. Кислюк В. С. Обобщенная система астрономо-геодезических параметров Луны // Современная астрометрия: Сб. Л.:ГАО РАН СССР, 1987. С. 49.
13. Хабибуллин Ш. Т., Чиканов Ю. А. О произвольной либрации Луны и эйлеровском движении ее полюсов // Тр. Казан. гор. астр. обс. 1969. № 36. С. 49-60.
14. Куликов К. А., Гуревич В. Б. Основы лунной астрометрии. М.: Наука, 1972. 391 с.

15. Calame O. The problem of the Eulerian oscillations: a weakness of numerical versus analitical methods // Moon. 1976. Vol. 15. C. 343.
16. Wenjing J.c Jinling L. Determination of some phisical parameters of the moon with lunar laser ranging data // Earth, Moon and Planets. 1996. Vol. 73. C. 259-265.
17. Koziel K. Constants of the moon's free libration on the basis of heliometric observations from the years 1841-1945 // Earth, Moon and Planets. 1989. Vol. 45. C. 153-159.
18. Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. М.:Иностр. лит., 1951. 468 с.

Поступила в редакцию 01.09.08

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. № 1

B. P. Kondratyev
Vector approach to the lunar phisical libration

The new analytical approach to the problem of physical libration of the rigid Moon taking account of perturbations from the Earth and the Sun is developed. The Euler's equations are added by twelve kinematic equations. Movement is described by fifteen variables that makes this method more informative and flexible in comparison with traditional ones. After transformations and linearization the system from nine non-uniform linear differential equations of the first order breaks up on two groups, even one and odd in relation to reflection in a plane of lunar equator. The general rotational oscillations of the Moon are superposition of independent longitude and latitude librations.
The libration on longitude is presented by three equations for "free" (ore unrestricted) and forced oscillations. The first have the period 2.8785 *Jul. year* (and the amplitude $1.855''$). The forced physical libration of the Moon on a longitude is presented by periods $T_2 = 27.2011\ d.$ ($15.30''$), the sidereal year ($0.090''$) and the half-year ($17.626''$) and third of year ($0.050''$) (together five harmonics). Influence of the Sun on these oscillations is comparable with Earth one.
Physical libration on latitude is presented by six equations, and at the account of influence only from the Earth is described by two harmonics of the unrestricted ($T_5 \approx 74.180\ Jul.y.$, $T_6 = 27.347\ d.$) and forced oscillations $T_3 = 27.212\ d.$ Movement of a true pole is presented by same harmonics; two last oscillations give beating with the external $48.62\ Jul.\ y.$ and internal $T_7 = 27.389\ d.$ periods. The maximal deviation of true pole is $45.3''$. One of frequencies is equal to zero and gives the stationary solution with an inclination to the south of a long Moon axis. The third law Cassini is theoretically confirmed. For the important relation $\frac{\sin I}{\sin(I+i)} \approx 0.2311$ the theory gives 0.2319, that confirms adequacy of the developed method.
Revision of the former theory is made. For the Moon is not exist free (Euler's) oscillations, and instead of the oscillations with the period $T \approx 148.167\ Jul.y.$ actually there is a harmonic with $T_5 \approx 74.180\ Jul.\ y.$ Application to the Moon (Melchior and others) of the kinematic Poinsot method with result in $22''$ between an instant axis of rotation and the smallest axis of inertia of the Moon is only rough approximation, our dynamic calculation gives $45''$.

Keywords: Moon, physical libration on longitude and latitude, vector approach, linearization of equations, unrestricted and forced oscillations.

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru