**ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**2009 № 1**

**АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

**Научный журнал** **Основан в марте 1991 г.**

**Удмуртский государственный университет** **г. Ижевск**

# СОДЕРЖАНИЕ

**Редакционно–издательский отдел**

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916–015
http://www.vestnik.udsu.ru

УДК 521.1

***Б. П. Кондратьев***

# КАК ЗЕМЛЯ «ПЛАВАЕТ» В НЕБЕ ЛУНЫ

Чтобы понять, как движется Земля в небе Луны, не обязательно стремиться попасть на поверхность «царицы ночи» и стать там лунным Птолеемем. Для этого достаточно знать, как движется Луна в небе Земли.

*Ключевые слова*: законы Кеплера, либрация Луны, преобразование координат, орбита движения.

## Введение

Все знают, что Луна «смотрит» на Землю одной (лицевой) своей стороной, а её «затылок» можно увидеть только с помощью космических аппаратов. Разумеется, в каждый момент времени можно видеть ровно половину поверхности лунного шара. Но почему видна всегда одна и та же половинка? Объясняют это тем, что вращение Луны вокруг оси происходит синхронно с её обращением по орбите вокруг Земли (синхронность означает одинаковость периодов обоих движений). Кстати, так было не всегда: миллиарды лет назад этой синхронности не было и в помине, и с Земли на некотором интервале времени можно было видеть (вот только смотреть было некому!) всю поверхность Луны. Но в процессе долгой эволюции из-за приливных эффектов, создаваемых в оболочке Луны нашей планетой, указанный резонанс появился, и картина стала напоминать нынешнюю. Вроде бы всё просто, но это лишь отдельные внешние черты в сложной картине движения Земли и Луны. Стоит вникнуть в эту картину, как многие тонкие эффекты проявят себя. С появлением телескопа неожиданно были обнаружены небольшие покачивания Луны. Это случилось в 1637 году. Галилей, систематически изучая Луну в телескоп на вилле в Арчетри (где он пребывал в качестве пленника инквизиции), обнаружил, что «Луна открывает и скрывает свои волосы и часть диаметрально противоположного подбородка, что можно назвать понижением и поднятием лица». Кроме того, «Луна поворачивает свою голову то направо, то налево и открывает то или другое ухо»[1]. В этих словах итальянский ученый красочно представил замечательный эффект: периодическое перемещение деталей рельефа относительно края видимого лунного диска. У Галилео вид Луны сравнивается с лицом человека, но это лишь эффектный символический приём (люди с фантазией и в древности видели на Луне то лицо человека, то просто кролика). Так была открыта оптическая либрация Луны по долготе и широте (от латинского «libratio» – покачивание). Первый вид либрации объяснил Ньютон. Поскольку собственное вращение Луны происходит строго равномерно, а её движение по эллипсу (согласно второму закону Кеплера) неравномерное, то для наблюдателя на Земле однажды отмеченный центр лунного диска станет со временем слегка покачиваться и на краях диска Луны для обзора будут открываться дополнительные участки поверхности. С учетом всех видов либрации удается наблюдать до 59% площади Луны.

Но обратим задачу и спросим себя: каким с Луны можно увидеть движение самой Земли? Сразу поясним, что нас интересует движение Земли относительно осей координат, связанных с телом твердой Луны (а не её движение относительно фона звезд!). Учитывая не столь уж далекую перспективу активного освоения Луны человеком, этот вопрос актуален!

Для лунного Птолемея (а при желании им может стать любой из посетивших Луну!), находящегося на «лицевой» части лунной поверхности, наша планета в небе Луны со временем не будет неподвижной, но вследствие указанной выше оптической либрации станет совершать небольшие периодические движения. Но какие движения конкретно? И тут выясняется, что недостаточно просто намекнуть и сослаться на обращение эффекта оптической либрации Луны по долготе и широте. Нет, задача о движении Земли в небе Луны содержит много тонких деталей (а в них-то всё и дело!) и оказывается интересной даже для «серьёзной» науки. Полагаясь только на пространственное воображение, характер движений Земли в небе Луны представить себе очень непросто. Более того, оказывается, этот вопрос до сих пор остаётся малоизученным. Мы рассмотрим его, пренебрегая небольшой параллактической и (совсем незначительной) физической либрацией Луны.

## § 1 Постановка задачи и её решение

Наблюдатель на Луне может построить (мысленно, конечно!) для себя небесный меридиан (большой круг небесной сферы, проходящий через точку зенита и, например, точку северного полюса). Пусть этот наблюдатель для определенности находится на экваторе Луны с видимой её стороны с тем расчетом, чтобы в тот момент, когда Луна в перигее, Земля находилась для него как раз на небесном меридиане (кульминировала, говорят астрономы). Очевидно, такая кульминация произойдет с южной стороны зенита. Но через половину лунного месяца Земля снова будет в кульминации, только уже к северу от точки зенита. И если бы не было другого вида либрации (по долготе), то указанное поступательно-возвратное движение

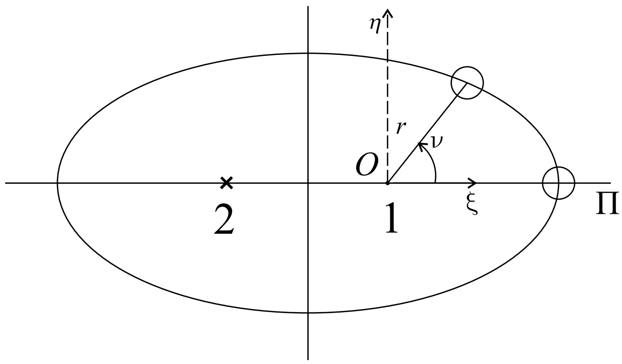


**Рис. 1.** Луна движется вокруг Земли в первом приближении по эллипсу (цифрами показаны точки первого и второго фокусов; $O\xi\eta$ – используемая ниже вспомогательная система координат)

Земли по отрезку небесного меридиана явилось бы проявлением либрации Луны по широте в её исходном великолепном виде. Но поскольку либрация Луны по долготе все же есть [2], то с учетом её Земля станет уходить в сторону, и прямолинейная траектория превратится в замкнутую кривую. Выясним вид этой кривой.

В первом приближении Луна движется вокруг нашей планеты по эллипсу с эксцентриситетом $\;=0,0549$ и большой полуосью $a=384400\,\text{км}$. Земля (а точнее, центр масс системы Земля-Луна) находится в одном из фокусов этого эллипса. Тело Луны не идеальный шар, а чуть вытянуто и похоже, скорее, на дыню, длинная ось которой ориентирована в среднем на второй фокус эллипса. По законам механики ось вращения движущейся по орбите Луны сохраняет своё положение в пространстве и имеет постоянный наклон к плоскости орбиты $90^\circ - I - i \approx 83^\circ 19'$.

Движение по эллипсу описывается законами Кеплера. По первому из них радиус-вектор Луны $r$ равен

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon}, \tag{1.1}$$

где параметр эллипса $p = a\,(1-e^2)$ и $\upsilon$ – истинная аномалия ( $0 \leqslant \upsilon \leqslant 2\pi$ )(рис.1). Введём вспомогательные прямоугольные координаты $O\eta\xi$:

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\upsilon = \frac{p\cos\upsilon}{1+e\cos\upsilon}, \\ \eta &= r\sin\upsilon = \frac{p\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

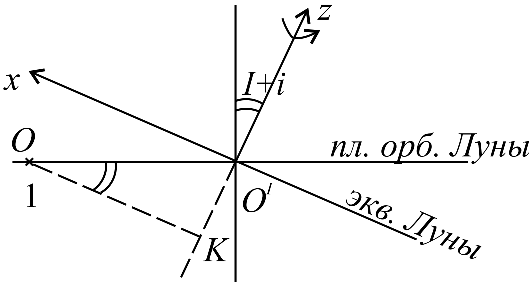


**Рис. 2.** Взаимное положение плоскости экватора Луны и плоскости её орбиты

В любой точке орбиты пространственная ориентация тела Луны фиксируется углом наклона её среднего экватора к плоскости этой орбиты (этот угол равен $I+i \approx 6°41'$). Далее учтем, что отрезок $\xi = r\cos v$ и ось собственного вращения Луны $z$ всегда, в какой бы точке орбиты Луна не находилась, лежат в одной плоскости.

В качестве зацепки рассмотрим положение Луны в точке перигея П. В этом случае взаимная ориентация плоскости орбиты и оси вращения показана на рис. 2. Введём дополнительную селеноцентрическую декартову систему координат $O'xyz$, центр которой совпадает с центром масс Луны: ось $z$ смотрит вдоль оси вращения Луны, ось $x$ направлена в среднем на второй фокус орбиты (и при положении Луны в точке П лежит в плоскости (рис.1)), ось $y$ дополняет эти две оси до правой системы координат и на рис.2 «смотрит» на читателя. Из прямоугольного треугольника $OKO'$ находим координаты центра Земли, которые измеряет наблюдатель с Луны.

$$\begin{aligned} z_\oplus &= -a(1-e)\sin(I+i),\\ y_\oplus &= 0,\\ x_\oplus &= a(1-e)\cos(I+i). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Как уже отмечалось, отрезок $\xi$ и ось $z$ всегда лежат в одной плоскости, и поэтому третья координата Земли при любом положении нашего естественного спутника будет известна и равна

$$z_\oplus = -r\cos v\sin(I+i). \tag{1.4}$$

Не столь просто при произвольном положении Луны на орбите найти две другие координаты $x_\oplus$ и $y_\oplus$. Для решения задачи свяжем два набора координат $(z_\oplus, y_\oplus, x_\oplus)$ и $(\xi, \eta)$, проделав следующие простые действия.

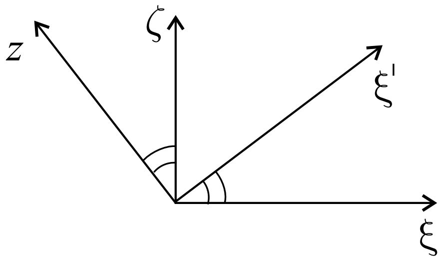


**Рис. 3.** Поворот вокруг оси $\eta$ на угол $I+i$

Совершим первый поворот системы координат вокруг оси $\eta$ на угол $I+i$ (рис. 3), который дает

$$\begin{gathered} \xi = \xi' \cos(I+i) - z\sin(I+i), \\ \zeta = \xi' \sin(I+i) + z\cos(I+i), \\ \eta = \eta, \end{gathered} \tag{1.5}$$

или в символическом матричном виде

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(I+i) & 0 & -\sin(I+i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(I+i) & 0 & \cos(I+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Теперь сделаем поворот вокруг оси $z$ на угол средней аномалии $M$, что дает

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos M & \sin M & 0 \\ \sin M & \cos M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta' \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В сумме эти два вращения дают матрицу поворота $A$:

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} \cos(I+i) & 0 & -\sin(I+i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(I+i) & 0 & \cos(I+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos M & \sin M & 0 \\ \sin M & \cos M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos M\cos(I+i) & -\sin M\cos(I+i) & -\sin(I+i) \\ \sin M & \cos M & 0 \\ \sin(I+i) & -\sin M\sin(I+i) & \cos(I+i) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

В матричном виде связь между системами координат примет простой вид:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta' \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Интересующие нас координаты Земли $(\xi'', \eta', z)$ находим обращением формулы (1.9):

$$\begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta' \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos M \cos(I+i) & \sin M & \cos M \sin(I+i) \\ -\sin M \cos(I+i) & \cos M & -\sin M \sin(I+i) \\ -\sin(I+i) & 0 & \cos(I+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Чтобы ось вращения Луны была направлена в соответствии с действительным её положением в пространстве, в (1.10) сделаем замену $(I+i) \to -(I+i)$, и тогда (напомним, $\xi = r\cos\upsilon$; $\eta = r\sin\upsilon$) искомые координаты Земли в указанной селеноцентрической системе координат оказываются равными

$$\begin{gathered} \xi'' = x_\oplus = r\left(\cos M \cos\upsilon \cdot \cos(I+i) + \sin M \sin\upsilon\right), \\ \eta' = y_\oplus = r\left(-\sin M \cdot \cos(I+i) \cdot \cos\upsilon + \cos M \cdot \sin\upsilon\right), \\ z = -r\sin(I+i) \cdot \cos\upsilon. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Здесь величина $r$ берется из (1.1), а средняя аномалия $M$ вычисляется по известной формуле кеплеровского движения

$$M = 2 \cdot arctg\left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} tg\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\right] - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon}. \tag{1.12}$$

В частности, когда Луна находится в точке перигея:
1) $\upsilon = 0, r = a(1-e),\ M = 0$

$$\begin{gathered} x_\oplus = a\cos(I+i) \cdot (1-e), \\ y_\oplus = 0, \\ z_\oplus = -a\sin(I+i) \cdot (1-e). \end{gathered} \tag{1.13}$$

В точке же апогея:
2) $\upsilon = \pi,\ M = \pi,\ r = a(1+e)$

$$\begin{gathered} x_\oplus = a\cos(I+i) \cdot (1+e), \\ y_\oplus = 0, \\ z_\oplus = a\sin(I+i) \cdot (1+e). \end{gathered} \tag{1.14}$$

Расчёт по формулам (1.11) и дает ответ на поставленный вопрос о движении Земли в небе Луны. Движение это оказывается трёхмерным и весьма сложным. Упростим поэтому задачу и ограничимся далее анализом движения Земли в картинной плоскости, перпендикулярной лучу зрения наблюдателя на Луне. Тогда достаточно рассмотреть лишь вторую и третью формулы из (1.11). Но и в этом случае траектория Земли в небе Луны остается сложной. В первом приближении это будет эллипс со смещенным центром по оси $z$, в следующих же, более точных приближениях, данный эллипс будет слегка искажаться гармониками более высокого порядка. Например, с точностью до гармоник третьего порядка имеем из двух указанных параметрических уравнений (1.11) уравнение траектории Земли в виде

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1 + \alpha\,\frac{z^3}{c^3}. \tag{1.15}$$

Параметры здесь равны

$$\begin{gathered} z_0 \approx 2634{,}47\,\text{км};\ b \approx 40357{,}65\,\text{км};\ c \approx 50315{,}83\,\text{км}; \\ \alpha \approx 0{,}352;\ \varepsilon = 1 - {}^{b}\!/_{c} \approx 0{,}198. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Действительно, в первом приближении, полагая в (1.15) $\alpha$ равным нулю, получим упомянутый эллипс, который оказывается вытянутым в направлении север-юг, перпендикулярно экватору Луны. Такая ориентация эллипса свидетельствуют о том, что амплитуда либрационных колебаний по широте больше, чем амплитуда колебаний по долготе. А размеры эллипса (как и фигуры в целом) не так уж малы: вследствие либрации по долготе Земля смещается в горизонтальном направлении примерно на $6{,}3$ своих диаметров, а смещение по небесному меридиану вследствие либрации по широте составит $7{,}9$ диаметров.

Во втором приближении, с учетом кубического члена в (1.15), эллипс слегка деформируется: его южная часть несколько поднимется и расширится, а северная, наоборот, чуть заострится (рис. 4).

Возможен, конечно, учет поправок и от более высоких гармоник, но их влияние будет ещё меньше. В целом траектория Земли в небе Луны, представленная двумя уравнениями из (1.11), показана на рис. 5. Движение Земли происходит по часовой стрелке.

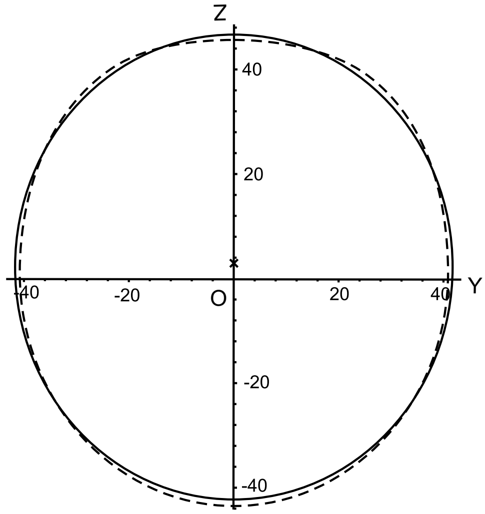


**Рис. 4.** Траектория Земли в первом приближении есть эллипс (показан штрихами)(сплошной кривой показана траектория Земли во втором приближении; крестик – центр симметрии фигуры. Цифры на осях означают расстояния в тысячах километров)

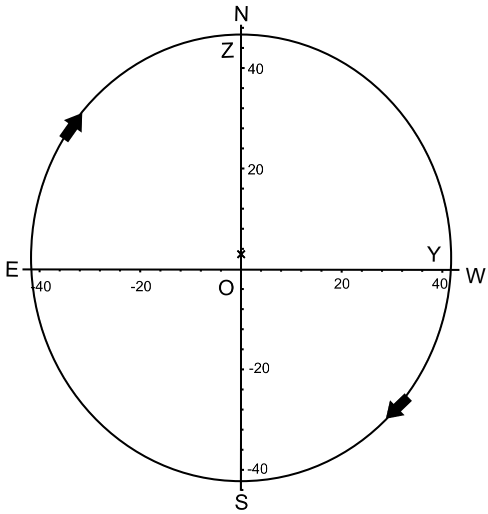


**Рис. 5.** Траектория Земли в небе Луны (стрелками указано направление движения Земли. Отмечены направления на стороны света для наблюдателя на Луне)

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. № 1

* * *

1. Араго Ф. Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Москва-Ижевск: РХД, 2000. Т. 1.
2. Перельман Я. И. Занимательная астрономия. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 01.09.08

***B. P. Kondratyev***
**As earth «floats» in moon sky**

Popular scientific paper. To understand, how the Earth moves in the Moon sky, not bindingly to aspire to hit on a surface «queen of night». The intellectual look, in a combination to knowledge of some fundamental facts about motion of the Moon, will unclose before you a fascinating picture.

*Keywords*: Kepler's laws, Lunar libration, transformation of coordinates, orbit of motion.

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru