ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 № 1

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Научный журнал **Основан в марте 1991 г.**

Удмуртский государственный университет **г. Ижевск**

СОДЕРЖАНИЕ

Редакционно-издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916-015
http://www.vestnik.udsu.ru

УДК 530.145.61

Б. П. Кондратьев, В. А. Антонов

НЕОБХОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Рассматриваются принципиальные вопросы, стоящие перед квантовой механикой. Обращается внимание на то, что постулат Борна носит лишь приближенный характер, а настоящим источником случайного в квантовой механике являются физические процессы расщепления волновых пакетов на границе между микро- и макромиром. Подчеркивается, что популярные ныне теории перемешивания и фазовой декогеренции не объясняют парадокса кошки Шредингера. У нас этот парадокс получает свое разрешение и логически доказывается, что в мезомире должен существовать *механизм разрушения волновых пакетов.*

Ключевые слова: микромир, волновая функция, разрушение волновых пакетов.

§ 1. Неполнота линейной квантовой теории

Линейная квантовая механика, в основе которой лежит уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi,$$

блестяще проявила себя в задачах атомной, ядерной и молекулярной физики, а также в области элементарных частиц. Практическая эффективность квантовой механики свидетельствует о том, что в микромире всегда выполняется *принцип линейной суперпозиции*: если для квантовой системы существует два, например, состояния $\psi_1(x,\, t)$ и $\psi_2(x,\, t)$, являющихся решениями уравнения Шредингера, то в силу линейности последнего, этому уравнению будет удовлетворять и суперпозиция указанных частных решений

$$\psi(x,t) = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Пусть данная квантовая система наблюдается с помощью макроприбора и указанным состояниям микросистемы ψ_1 и ψ_2 соответствуют волновые функции макроприбора Φ_1 и Φ_2. Тогда из опыта следует фундаментальный факт: *макроприбор может находиться либо только в состоянии*

Φ_1, *либо только в состоянии* Φ_2, *но он никогда не будет находиться в состоянии суперпозиции*

$$\Phi = \alpha\,\Phi_1 + \beta\,\Phi_2.$$

Другими словами, макроприбор не может находиться одновременно в двух состояниях и его показания относятся либо к состоянию Φ_1, либо к состоянию Φ_2. Например, любая элементарная частица, кроме фотона, не может одновременно находиться в двух точках пространства, разделенных несколькими метрами. С фотоном же такое возможно — он описывается линейными уравнениями электродинамики Максвелла и расстояние между его «частями» во вполне воспроизводимых опытах исчисляются многими метрами.

Но для всех других элементарных частиц *существует барьер между микромиром и макромиром*, не пропускающий суперпозиций типа (5.2) в макромир. В форме парадокса этот факт был отмечен в 1935 г. Э. Шредингером и с тех пор называется *парадоксом кошки Шредингера.*

Парадокс кошки Шредингера указывает на неполноту линейной квантовой теории [1]. В квантовой механике лишь пассивно констатируется, что макроприбор фиксирует только одну из компонент волновой функции, а все другие компоненты исходного волнового пакета физиков не интересуют, поскольку никак себя в макромире они не проявляют.

§ 2. Постулат Борна и введение вероятности в квантовую механику

Что касается важного практического вопроса, какая именно компонента волнового пакета фиксируется макроприбором, в квантовой механике утвердилось следующее мнение, исходящее от Макса Борна: *чем больше квадрат модуля амплитуды компоненты волнового пакета, тем больше вероятность соответствующего макроскопического состояния. Таким образом, через постулат Борна в квантовую механику вводится вероятность.* Именно здесь возникают принципиальные вопросы.

1. Прежде всего, непонятна природа введенной таким образом вероятности. Апелляция к классической теории здесь не проходит. Как известно, случайность везде и всегда появляется как признак обобщения — когда у того или иного описываемого явления отбрасываются трудноучитываемые детали и оставляют лишь те, которые можно воспроизводить и рассчитывать. Типичные примеры даются азартными играми. Так, выпадение монеты гербом или решкой зависит от многих трудноучитываемых факторов: от механических характеристик самого броска монеты, дуновений воздуха, свойств поверхности стола и т. д. Все эти факторы не воспроиз-

водимы в полном объеме игроками при новом броске, отсюда и трактовка результата «орёл–решка» как явления случайного.

Подчеркнём, что в примере с броском монеты, как и во многих других задачах, указанные трудноучитываемые факторы играют роль своеобразных скрытых параметров. Таким образом, *случайность в задачах обычной механики вводится как следствие существования скрытых параметров в описываемых явлениях.* Но иная ситуация в квантовой механике! Естественной трактовкой случайности, введенной Борном, было бы также игнорирование каких-то скрытых параметров в квантово-механическом описании. Игнорирование скрытых параметров, если бы они действительно существовали, могло происходить на границе между микромиром и макромиром — в зоне мезомира. Но, и в этом все дело, *в квантовой механике таких невоспроизводимых скрытых параметров не существует*, что блестяще доказал математик Нейман. Из этого самым решающим образом следует, что *введение вероятности в квантовую механику по методу Борна не имеет никакой естественной физической трактовки.*

Остаётся считать: *либо вероятность, введенная Максом Борном в квантовую механику, имеет совершено иные корни, нежели вероятность при описании всего остального мира, либо принцип Борна — лишь какое-то приближение к квантово-механической реальности и за ним стоят более глубокие и неизвестные нам физические процессы, происходящие с волновой функцией при её переходе из микромира в наш макромир. Мы склоняемся ко второму варианту. С нашей точки зрения, было бы очень странно, если бы в мире вместо одного общего источника случайного имелись два абсолютно разных источника. Поэтому мы полагаем, что сам постулат Борна носит лишь приближенный характер, а настоящим источником случайного в квантовой механике являются физические процессы расщепления волновых пакетов на границе между микро- и макромиром. Эта зона называется мезомиром.*

2. Но если барьер между микро- и макромиром существует, возникает вопрос о местоположении такого барьера. Ведь в принципе, такой барьер можно отодвигать сколь угодно глубоко в макромир, и в некоторых случаях это так и бывает, если вспомнить явление сверхтекучести и сверхпроводимости. Почему же в других случаях мы считаем волновое описание процесса справедливым только до уровня измерительного прибора? Разве наши измерительные приборы чем-то выделяются принципиально среди других предметов? Иногда высказывается другая, «наиболее последовательная» интерпретация, согласно которой барьер между мирами находится на уровне мыслительных процессов в мозгу человека. Но такая интерпретация не дает ответа на естественный вопрос: как же существовала

природа до человека и как она существует в Космосе, где, по-видимому, нет никаких наблюдателей. Да и на Земле не во всяком опыте обязательно присутствует измерительный прибор — современные эксперименты, например, с анализом движения электрона в ловушке, идут непрерывным потоком без разделения на этапы с подведением промежуточных итогов.

3. Кроме того, постулат Борна содержит неявно сформулированную *локальность*: он предусматривает разделение волнового пакета только по какому-то определенному параметру, имеющему конкретное значение, например, по импульсу данной частицы, тогда как на характеристики других частиц никаких ограничений не накладывается. С учетом этого обстоятельства, вместо существующего сейчас примитивного отождествления $|\psi|^2$ с плотностью вероятности в действительности должна получаться очень громоздкая процедура разделения волновых пакетов.

§ 3. О теории декогеренции и фазового перемешивания

Заметим еще, что существует иная точка зрения, которая связывает переход к макромиру с явлением *перемешивания и декогеренции* [2]. Перемешивание заключается в *уравновешивании амплитуд* компонент волновой функции, что по существу эквивалентно приближению системы к термодинамическому равновесию. Однако приближение к термодинамическому равновесию и происходящее при этом увеличение энтропии — это как раз обратное тому, что требуется для проникновения в суть парадокса кошки Шредингера. В действительности возрастает амплитуда только одной из гармоник, а другие гармоники должны угасать. Другими словами, мы нуждаемся не в уравновешивании амплитуд, а, напротив, в увеличении одной из них за счет других. В частности, в известном мысленном эксперименте Шредингера либо растет амплитуда живой кошки за счёт амплитуды мертвой кошки, либо наоборот — и этот процесс направлен в сторону уменьшения энтропии, тогда как любое перемешивание ее только увеличивает. Отметим также, что в некоторых работах по перемешиванию обращают внимание на потерю фазовых отношений (декогеренцию). Но и декогеренция сути дела не меняет.

§ 4. О нелинейном механизме разрушения волновых пактов

Таким образом, логически из вышесказанного следует, что в мезомире должен существовать *механизм разрушения волновых пакетов*. На входе указанного механизма появляется волновая функция с n состояниями ненулевой амплитуды, а на выходе должна получаться волновая функция только с одним состоянием, а все остальные угасают в ходе эволюции почти до нулевой амплитуды, практически исчезая. Номер этого «выигравшего» состояния заранее не известен, он определяется в ходе объективно существующего в природе случайного процесса. Подчеркнем, что во всех рассматриваемых нами до сих пор моделях по расщеплению квантовых пакетов фигурировал марковский процесс. Важной чертой процесса расщепления пакета является непрерывное поступление случайности извне. Однако без внешней случайности, только за счет свойств волновой функции, по-видимому, невозможно представить такой процесс расщепления. Действительно, обратимый процесс, хотя бы и нелинейный, опять привел бы к перемешиванию состояний и ненужному нам увеличению энтропии квантовой системы. С другой стороны, явная необратимость слишком сильно нарушила бы известные атомно-молекулярные закономерности, накапливаясь с течением времени. Например, не стоит особого труда ввести диссипативный член в уравнение Шредингера, но это сразу нарушит твердо установленные правила квантования орбит.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (1-i\alpha)\,H\psi;\quad \psi=\sum C_n\psi_n;\quad H\psi_n=\lambda_n\psi_n.$$

Тогда

$$i\hbar\sum\dot{C}_n\psi_n = (1-i\alpha)\sum_n C_n\lambda_n\psi_n,$$

откуда

$$i\hbar\dot{C}_n = (1-i\alpha)\,\lambda_n C_n,\ \ C_n = C_n\,(0)\cdot e^{-\frac{i\lambda_n t}{\hbar}}\cdot e^{-\frac{\alpha\,\lambda_n t}{\hbar}}.$$

Здесь $i\alpha$ - несамосопряженная добавка к гамильтониану, вызывающая необратимость протекания квантового процесса. Введение добавки $i\alpha$ приводит к появлению затухания

$$C_n\,(t) = C_n\,(0)\cdot e^{-\,\frac{i\lambda_n t}{\hbar}}\cdot e^{-\,\frac{\alpha\,\lambda_n t}{\hbar}}.$$

Это затухание приводит к угасанию высокоэнергетических уровней (у которых величины λ_n большие). В итоге, введение добавки $i\alpha$ приводит к нарушению закона сохранения энергии и должно быть *отвергнуто.*

Теория расщепления волновых пакетов должна носить нелинейный характер с участием внешнего воздействия, уменьшающего энтропию системы. Мы приходим к выводу, что уменьшение энтропии квантовой системы происходит за счет взаимодействия с внешним излучением, принимающим на себя некоторую избыточную энтропию [1;3].

Математический аппарат

В настоящее время в физике назрела насущная необходимость «перебросить мост» между макро- и микромиром, представив закономерности по обе стороны как единое целое [1]. Но уловить и понять закономерности в самой промежуточной зоне между макромиром и микромиром —

чрезвычайно сложная задача. С одной стороны, внутри самой квантовой механики очень высока точность согласования расчётов с измерениями на уровне атомов и молекул (но только для сравнительно простых систем; для сложных же молекул точность расчетов в квантовой химии сравнительно невысока [4]). С другой стороны, для процессов в макромире, особенно чисто механической природы, благодаря усилиям выдающихся учёных прошлого также выявлены ведущие уравнения, которые с хорошей точностью, с привлечением феноменологических констант, описывают реальность *макромира*. Посередине же, между микромиром и макромиром, простирается область, пока почти не поддающаяся изучению. Хотя, конечно, и на неё обращают внимание в последние десятилетия, но лишь с точки зрения примитивного эмпиризма (создание кластеров, наноструктур), но точность и надёжность расчётов здесь очень часто весьма далеки от практических потребностей, а единой теоретической концепции пока не существует.

По нашему мнению, ключ к созданию теории мезомира — в описании нелинейности протекающих там процессов. Первый вариант нелинейной квантовой механики был создан в монографии [1]. В этой работе мы излагаем краткие соображения, основанные на предложенной нами ранее точке зрения.

§ 5. Независимость взаимно изолированных процессов

Относительно того, как ведет себя волновая функция квантовой системы, разделенной на две или более взаимно изолированные подсистемы, сомнений, видимо, не возникает: полная волновая функция ψ системы в целом должна представляться произведением волновых функций $\psi_1 ... \psi_n$ отдельных подсистем.

С точки зрения формального удобства выкладок упомянутая мультипликативная структура (ψ_j — функции разных координат X_j)

$$\psi = \psi_1 ... \psi_n \tag{5.1}$$

представляет очевидное преимущество в виде разделения переменных. Но возникает другой вопрос, уже натурфилософского порядка. Если, как мы подчеркивали во введении, рассматривать эволюцию Вселенной как непрерывную последовательность состояний, без искусственного деления на пары опыт-наблюдение, то мы вправе спросить, как условие (5.1) достигается.

На этот вопрос *линейная* квантовая механика не в состоянии дать удовлетворительный ответ. Действительно, если мы выключим взаимодействие, точнее, отбросим соответствующий член в гамильтониане, то произведение типа (5.1) никак не может при эволюции согласно *линейному* *уравнению Шредингера* превратиться, например, в суперпозицию двух не пропорциональных друг другу произведений, равно как и обратно.

Именно здесь необходима нелинейность. Простейшее, казалось бы, решение — это искусственно заставить стремиться волновую функцию к мультипликативной форме, что в несколько упрощенном варианте выглядит как задание уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c(\psi - \psi_1 \psi_2 ... \psi_n),\ c > 0. \tag{5.2}$$

Примерно такая идея, действительно, встречается время от времени в литературе. Но ее простота иллюзорна. Заметим, что уравнение (2) и ему аналогичные «псевдолинейны»: нелинейность в них проникает через определение подходящих множителей $\psi_1, \psi_2 ... \psi_n$ по заданной полной ψ посредством, например, соотношений

$$\psi_j = \frac{\int ... \int \psi \prod\limits_{v \neq j} \psi_v^* \, (dX_v)}{\prod\limits_{v \neq j} \int |\psi_v|^2 \, dX_v}, \tag{5.3}$$

где, как и далее, звездочка означает комплексное сопряжение, а интегрирование проводится по всем значениям X_ν. Определение n функций ψ_j согласно (5.3), однако, выглядит сложным, неявным, и его корректность в общем случае сомнительна. Физически это легко было предвидеть. Например, если в начальный момент

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1 ... \psi_n + \widetilde{\psi}_1 ... \widetilde{\psi}_n \right), \tag{5.4}$$

где функции ψ_j и $\widetilde{\psi}_j$ различны, ортогональны друг другу, притом одинаково нормированы, то брать ли в качестве первого приближения для представления (5.1) набор ψ_j или $\widetilde{\psi}_j$? Или, может быть, аппроксимировать правую часть (5.4) произведением с осредненным множителем $\frac{\psi_j + \widetilde{\psi}_j}{\sqrt{2}}$, по крайней мере, для вещественных функций? Таким образом, можно надеяться в лучшем случае на использование (5.2) применительно к избранным конкретным ситуациям, заранее, в сущности, предполагая из эмпирических соображений то, что требовалось бы вывести из общих принципов. *В точном естествознании, и астрофизических проблемах в частности, подобный метод ad hoc решения задач совершенно неприемлем.*

Предметом более тонкого вопроса является именно *необратимость*. Мы уже упоминали, что она необходима для эволюции от функций ψ общего вида к функциям подкласса мультипликативных. Но в (5.2) она подана слишком грубо, и не мешало бы задуматься, почему по отношению к ряду параметров эксперимент не обнаруживает систематического дрейфа, который напрашивается при взгляде на уравнение (5.2).

Выраженные более точным языком, эти «эстетические» соображения означают, что надо предусмотреть а) отсутствие, по возможности, побочных эффектов; б) автоматическое установление функций $\psi_1, \psi_2 ... \psi_n$, не известных заранее.

§ 6. Постановка задачи и лагранжиан

Довольно естественно эти условия наводят на мысль использовать какие-то подобия коэффициентов корреляции, но в терминах волновых функций [1], а не вероятностей, и ввести специальные управляющие параметры, обнаруживающие себя именно в связи с этими корреляциями. Кроме того, основа уравнений, хотя и нелинейных, должна оставаться *обратимой*; необратимости мы отведем достаточно узкую «точку приложения». Для получения же обратимых уравнений эволюции существует испытанный прием задания варьируемого функционала, что, как известно [5], связано с выделением пар канонических переменных. У нас ниже таковыми служат ψ и ψ^* (звездочка — знак комплексного сопряжения). Подчеркнем, кстати, их вторичный характер, то есть отсутствие прямой связи с классическими q и p. Кроме того, вводится пара управляющих переменных λ и λ^*.

Ограничимся простейшим вариантом с разделением системы на две подсистемы, каждая из которых может находиться только в двух независимых состояниях, причем предполагается, что энергетическая связь между подсистемами уже исчезла. Тогда ψ представляется набором четырех комплексных величин $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}, \psi_{22}$, зависящих только от t. Два индекса нужны, чтобы отмечать состояния с номером 1 или 2 сначала первой, затем второй подсистемы.

Вышеприведенные соображения в совокупности подсказывают и вид лагранжиана. Варьируется следующий интеграл:

$$L = i\hbar \int \left(\psi_{11} \frac{\partial \psi_{11}^*}{\partial t} + \psi_{12} \frac{\partial \psi_{12}^*}{\partial t} + \psi_{21} \frac{\partial \psi_{21}^*}{\partial t} + \psi_{22} \frac{\partial \psi_{22}^*}{\partial t} \right) dt +$$
$$+ \int \left[(\varepsilon_1 + \mu_1) |\psi_{11}|^2 + (\varepsilon_1 + \mu_2) |\psi_{12}|^2 + (\varepsilon_2 + \mu_1) |\psi_{21}|^2 + (\varepsilon_2 + \mu_2) |\psi_{22}|^2 \right] dt +$$
$$+ \int \left[\lambda^* (\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}) + \lambda (\psi_{11}^*\psi_{22}^* - \psi_{12}^*\psi_{21}^*) \right] dt +$$
$$+ \frac{i\rho}{2} \int \left(\lambda \frac{d\lambda^*}{dt} - \lambda^* \frac{d\lambda}{dt} \right) \left(|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 + |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 \right) dt. \tag{6.1}$$

Кинетический член в лагранжиане (6.1) отсутствует, что согласуется с аппаратом квантовой механики (см. [6]). Кроме того, в (6.1) вещественные параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ отмечают уровни энергии первого и второго состояния первой подсистемы, а μ_1, μ_2- то же для второй подсистемы. Кроме того, введено управляющее воздействие $\lambda(t)$, которое и создает *нелинейность*. Последний член в (6.1) построен как аналог кинетической энергии для управления $\lambda(t)$, причем второй сомножитель под знаком интеграла нужен для соблюдения однородности получаемых уравнений по совокупности ψ_{jk} и ψ^*_{jk}, иначе нам грозят осложнения с поддержанием нормировки волновой функции. При этом $\rho-$ положительная постоянная. Для выкладок вводим следующие сокращения: суммарная энергия

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2, \tag{6.2}$$

нормировочная сумма

$$\Phi = |\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 + |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 \tag{6.3}$$

и мера зацепленности (корреляции) состояний

$$\tau = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}. \tag{6.4}$$

§ 7. Нелинейное уравнение эволюции

Используем обычные правила вариационного исчисления, считая основными переменными λ, λ^* и компоненты ψ_{jk}, ψ^*_{jk}. Отделяя затем друг от друга соотношения для производных от всех этих переменных, после некоторых выкладок с использованием сокращений (6.2)–(6.4), получаем уравнения эволюции для компонент волновой функции

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d\psi_{11}}{dt} &= (\varepsilon_1 + \mu_1)\,\psi_{11} + \lambda\psi^*_{22} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{11};\\
i\hbar\frac{d\psi_{12}}{dt} &= (\varepsilon_1 + \mu_2)\,\psi_{12} - \lambda\psi^*_{21} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{12};\\
i\hbar\frac{d\psi_{21}}{dt} &= (\varepsilon_2 + \mu_1)\,\psi_{21} - \lambda\psi^*_{21} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{21};\\
i\hbar\frac{d\psi_{22}}{dt} &= (\varepsilon_2 + \mu_2)\,\psi_{22} + \lambda\psi^*_{11} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{22},
\end{aligned} \tag{7.1}$$

причем попутно оказывается

$$i\hbar\frac{d\Phi}{dt} = 2\left(\lambda\tau^* - \lambda^*\tau\right), \tag{7.2}$$

а для эволюции λ находим уравнение

$$i\rho\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\Phi}\left[\tau + \frac{\rho\lambda}{\hbar}\left(\lambda^*\tau - \lambda\tau^*\right)\right]. \tag{7.3}$$

Следствием (7.1) также является

$$i\hbar\frac{d\tau}{dt} = \theta\tau + \left(\Phi - \frac{|\tau|^2}{\Phi}\right)\lambda - \frac{\lambda^*\tau^2}{\Phi}. \tag{7.4}$$

§ 8. Введение необратимости

Анализировать поведение решений системы (7.1)–(7.4) или укороченной системы (12) на всей вещественной оси t нет даже особой надобности — заранее ясно, что у такой системы в силу ее происхождения решения обладают свойством обратимости во времени. Для получения желаемой *необратимости* нужны какие-то искусственные задержки или сбои, разрывающие ось t на относительно самостоятельные интервалы. Одним из простейших приемов такого рассечения является *зануление* величины $\lambda(t)$ (без изменения остальных переменных) в случайно заданные моменты времени $t = t_1, t_2 ...$, после которых процесс продолжается заново с $\lambda(t_\nu) = 0, \nu = 1, 2$. Зануление управляющего параметра $\lambda(t)$ в моменты $\lambda(t)$ $t_1, t_2 ...$ происходит в результате взаимодействия квантового объекта с внешним миром, причем это взаимодействие может быть как дискретным, так и непрерывным. Механизм такого взаимодействия аналогичен известному явлению в молекулярной физике газов, где внешним элементом для пробной молекулы становится любая встречная молекула. В рассматриваемом случае, как и в теории газов, указанные случайные взаимодействия приводят в итоге к уничтожению корреляции τ между характеристиками квантового объекта (или между исходным и итоговым состоянием молекулы).

Рассмотрим случай достаточно частых актов зануления, между которыми величина λ не успевает существенно вырасти. Точнее, ниже предполагаем достаточно хорошую представимость основных переменных разложениями до $\sim (t - t_0)^2$ включительно. Очевидно, пока достаточно отождествить очередное t_ν с 0. Значения переменных в этой точке будем отмечать индексом "0" внизу. Из (7.3) следует, прежде всего,

$$\lambda(t) = -\frac{i\tau_0}{\rho\Phi_0}t + O\left(t^2\right) \ \ (t \geqslant 0). \tag{8.1}$$

Подстановка (8.1) в (7.2) дает

$$\Phi(t) = \Phi_0 - \frac{2\,|\tau_0|^2}{\rho\hbar\Phi_0}t^2 + O\left(t^3\right). \tag{8.2}$$

В (7.4) удобней вначале перейти к видоизмененной функции

$$\hat{\tau}(t) = \tau(t)\, e^{\frac{i\,\theta\, t}{\hbar}},$$

для которой

$$i\hbar\frac{d\hat{\tau}}{dt}=e^{\frac{i\theta t}{\hbar}}\left[\left(\Phi-\frac{|\tau|^2}{\Phi}\right)\lambda-\frac{\lambda^*\tau^2}{\Phi}\right]=-\frac{i\tau_0}{\rho}t+O\left(t^2\right),$$

так что

$$i\hbar\hat{\tau}=i\hbar\tau_0-\frac{i\tau_0}{2\rho}t^2+o\left(t^3\right). \tag{8.3}$$

Перейдя в (8.3) к модулям, находим

$$|\tau(t)|=|\tilde{\tau}(t)|=|\tau_0|\left(1-\frac{t^2}{2\hbar\rho}+o\left(t^3\right)\right). \tag{8.4}$$

Поскольку в силу (7.2) или (8.2) нормировка в процессе эволюции меняется, следует пользоваться относительной мерой зацепленности

$$\xi=\frac{\tau}{\Phi}, \tag{8.5}$$

принадлежащей, как показано ниже, отрезку $\left[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right]$. Для нее из (8.2) и (8.4) получаем с точностью до отбрасываемых членов порядка t^3

$$|\xi(t)|=|\xi(0)|\left[1+\left(\frac{4\,|\tau_0|^2}{\Phi_0^2}-1\right)\frac{t^2}{2\hbar\rho}\right]+... \tag{8.6}$$

Оценим, в какую сторону выражение в квадратных скобках в (8.6) отклоняется от 1. Элементарно сравниваем средние геометрические и средние арифметические:

$$|\psi_{11}|\cdot|\psi_{22}|\leqslant\frac{1}{2}\left(|\psi_{11}|^2+|\psi_{22}|^2\right);$$
$$|\psi_{12}|\cdot|\psi_{21}|\leqslant\left(|\psi_{12}|^2+|\psi_{21}|^2\right).$$

В результате

$$|\tau|\leqslant|\psi_{11}\psi_{22}|+|\psi_{12}\psi_{21}|\leqslant\frac{1}{2}\Phi,$$

то есть

$$|\xi|\leqslant\frac{1}{2}. \tag{8.7}$$

Из (8.6) и (8.7) сразу следует

$$|\xi(t)|\leqslant|\xi(0)|\ \ (\mathrm{t}\geqslant 0), \tag{8.8}$$

и зацепленность в нашей схеме стремится исчезнуть. Точнее, она стремится шаг за шагом к нулю, кроме, по-видимому, малоинтересного случая, когда (8.8) превращается в точное равенство, что имеет место в случае матричного тождества.

§ 9. Эволюция всей системы

Постараемся рассмотреть теперь эволюцию системы в целом. Сначала ограничиваемся случаем, когда зануление λ происходит регулярно через равные малые промежутки времени l. Предварительно удобней перейти к переменным

$$\varphi_{jk} = e^{i\chi - \frac{i\left(\varepsilon_j + \mu_k\right)t}{\hbar}} \psi_{jk}, \Lambda = \lambda e^{i\chi - \frac{i\,\theta\,t}{\hbar}}, \hat{\tau} = \tau e^{i\chi - \frac{i\,\theta\,t}{\hbar}} \tag{9.1}$$

(постоянную χ подберем позже). Для них, как легко проверить, система (7.1) упрощается за счет исчезновения первых членов правых частей:

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{d\varphi_{11}}{dt} = \Lambda\varphi_{22}^* - q\varphi_{11}, \quad i\hbar\frac{d\varphi_{12}}{dt} = -\Lambda\varphi_{21}^* - q\varphi_{12}; \\ i\hbar\frac{d\varphi_{21}}{dt} = -\Lambda\varphi_{12}^* - q\varphi_{21}, \quad i\hbar\frac{d\varphi_{22}}{dt} = \Lambda\varphi_{11}^* - q\varphi_{22}; \\ q = \frac{\Lambda^*\hat{\tau} + \Lambda\hat{\tau}^*}{2\Phi}, \end{gathered} \tag{9.2}$$

причем формально сохраняется определение меры корреляции состояний, см. также (6.4),

$$\hat{\tau} = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21} \tag{9.3}$$

и нормировочной суммы

$$\Phi = |\varphi_{11}|^2 + |\varphi_{12}|^2 + |\varphi_{21}|^2 + |\varphi_{22}|^2 . \tag{9.4}$$

Для $\Lambda(t)$ и $\hat{\tau}(t)$ в том же приближении сохраняют силу формулы (8.1) и (8.3), именно,

$$\Lambda(t) = -\frac{i\hat{\tau}_0}{\rho\Phi_0}t + ... \tag{9.5}$$

Формулу (8.3) записываем через приращение:

$$\Delta\hat{\tau} = -\frac{\hat{\tau}_0}{2\hbar\rho}t^2 \tag{9.6}$$

с точностью до $o(t^3)$. Из (9.2) аналогично получаем после интегрирования с учетом $q = 0$ в нашем приближении:

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_{11} = -\frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{22}^* t^2, \Delta\varphi_{12} = \frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{21}^* t^2; \\ \Delta\varphi_{21} = \frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{12}^* t^2, \Delta\varphi_{22} = -\frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{11}^* t^2. \end{gathered} \tag{9.7}$$

и как следствие

$$\Delta\Phi = -\frac{2\left|\hat{\tau}_0\right|^2}{\rho\hbar\Phi_0}t^2. \tag{9.8}$$

Но при большом числе следующих друг за другом малых приращений на интервалах $(0,l)$, $(l,2l)$, $(l,3l)$... мы имеем право сгладить процесс, заменив сложение приращений интегральной операцией. Такой переход *от дискретного к непрерывному* и обратно типичен для многих задач математической физики. Из (9.6)–(9.8) выводим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{11}}{dt} &= -\frac{\hat{\tau}\,l}{2\rho\hbar\Phi}\varphi_{22}^*, \frac{d\varphi_{12}}{dt} = \frac{\hat{\tau}l}{2\rho\hbar\Phi}\varphi_{21}^*; \\ \frac{d\varphi_{21}}{dt} &= \frac{\hat{\tau}\,l}{2\rho\hbar\Phi}\varphi_{12}^*, \frac{d\varphi_{22}}{dt} = -\frac{\hat{\tau}l}{2\rho\hbar\Phi}\varphi_{11}^*; \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\frac{\hat{\tau}\,l}{2\rho\hbar}, \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2\left|\hat{\tau}\right|^2 l}{\rho\hbar\Phi}, \tag{9.10}$$

причем сохранение условий связи (9.3) и (9.4) легко проверяется.

На данном этапе мы выбираем в (9.1) параметр χ так, чтобы величина $\hat{\tau}_0$ оказалась вещественной и положительной. Тогда в силу первого уравнения (9.10) положительность $\hat{\tau}(t)$ сохраняется и при $t > 0$ (и величина будет меняться по убывающей экспоненте).

Введем теперь вспомогательный аргумент

$$z = \frac{l}{2\rho\hbar}\int\limits_0^t \frac{\hat{\tau}}{\Phi}dt, \tag{9.11}$$

с которым система уравнений (9.9) становится линейной:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{11}}{dz} &= -\varphi_{22}^*, \frac{d\varphi_{12}}{dz} = \varphi_{21}^*, \frac{d\varphi_{21}}{dz} = \varphi_{12}^*, \frac{d\varphi_{22}}{dz} = -\varphi_{11}^*; \\ \frac{d\varphi_{11}^*}{dz} &= -\varphi_{22}, \frac{d\varphi_{12}^*}{dz} = \varphi_{21}, \frac{d\varphi_{21}^*}{dz} = \varphi_{12}, \frac{d\varphi_{22}^*}{dz} = -\varphi_{11}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Общим решением системы (9.12) является

$$\begin{aligned} \varphi_{11} = Ae^z + ae^{-z}, \varphi_{12} = Be^z + be^{-z}; \\ \varphi_{21} = B^*e^z - b^*e^{-z}, \varphi_{22} = -A^*e^z + a^*e^{-z} \end{aligned} \tag{9.13}$$

с произвольными комплексными постоянными A, B, a, b. Соответственно из (9.3) и (9.4) следует

$$\hat{\tau} = -\left(|A|^2 + |B|^2\right)e^{2z} + \left(|a|^2 + |b|^2\right)e^{-2z} + Aa^* - aA^* + Bb^* - bB^* \tag{9.14}$$

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2010. №1

и

$$\Phi = 2\left(|A|^2 + |B|^2\right)e^{2z} + 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)e^{-2z}. \tag{9.15}$$

Наконец, t выражается через общий аргумент z, если представить (9.11) в дифференциальной форме:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{2\rho\hbar}{l}\frac{\Phi}{\tau}. \tag{9.16}$$

Интегрирование (9.16) по z ведет к

$$t = \sigma - \frac{2\rho\hbar}{l}\ln\hat{\tau} \;\; (\sigma = \mathrm{const})\,, \tag{9.17}$$

что, для проверки, легко согласовать с первым уравнением (9.10).

Предельное значение $\hat{\tau}$, как мы уже убеждались, равно 0. Приравнивание правой части (9.14) нулю приводит к квадратному уравнению относительно $\eta = e^{2z}$ (кроме возможности $A = B = 0$, приводящей к уже упоминавшемуся исключительному случаю). У этого уравнения всегда два вещественных корня разных знаков; нам, ввиду $\hat{\tau} > 0$ в (9.11), подходит только положительный корень. После его подстановки в (9.15) элементарные выкладки дают финальное значение, отмечаемое индексом e,

$$\Phi_e = 2\sqrt{(Aa^* - aA^* + Bb^* - bB^*)^2 + 4\left(|A|^2 + |B|^2\right)\left(|a|^2 + |b|^2\right)}. \tag{9.18}$$

Для физических целей представляет интерес значение суммы квадратов только двух модулей, также отнесенное к финальному состоянию. Согласно (9.13)

$$\left\{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2\right\}_e = Aa^* + A^*a + Bb^* + B^*b + \frac{1}{2}\Phi_e. \tag{9.19}$$

Здесь левая часть (9.19), после деления на Φ_e, обычно трактуется как «вероятность» пребывания первой подсистемы в состоянии 1.

Параметры A, B, a, b не совсем удобны, и разумно перейти от них согласно (9.13) в случае $z = 0$, $t = 0$ к исходным φ_{jk}, а дальше к ψ_{jk}. Тогда

$$A = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}^*}{2}, B = \frac{\varphi_{12} + \varphi_{21}^*}{2}, a = \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}^*}{2}, b = \frac{\varphi_{12} - \varphi_{21}^*}{2}, \tag{9.20}$$

после чего выражение в левой части (9.19), обозначаемое нами далее как L_1, и аналогично определенные другие суммы квадратов модулей, раскрываются в виде

$$L_1 \equiv \left\{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e + \frac{1}{2}\left(|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 - |\psi_{21}|^2 - |\psi_{22}|^2\right)\right\}_0;$$
$$L_2 \equiv \left\{|\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e + \frac{1}{2}\left(|\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 - |\psi_{11}|^2 - |\psi_{12}|^2\right)\right\}_0;$$
$$N_1 \equiv \left\{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{21}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e + \frac{1}{2}\left(|\psi_{11}|^2 + |\psi_{21}|^2 - |\psi_{12}|^2 - |\psi_{22}|^2\right)\right\}_0;$$
$$N_2 \equiv \left\{|\psi_{12}|^2 + |\psi_{22}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e + \frac{1}{2}\left(|\psi_{12}|^2 + |\psi_{22}|^2 - |\psi_{11}|^2 - |\psi_{21}|^2\right)\right\}_0, \tag{9.21}$$

причем

$$\Phi_e = \sqrt{\Phi_0^2 - 4\,|\tau_0|^2}. \tag{9.22}$$

Предположение о положительности τ_0 в (9.22) уже отброшено: в общем случае изменение χ меняет только фазу у τ и совсем не меняет $|\psi_{jk}|$. По отдельности квадраты модулей легко представить через выражение (9.21), если помнить, что в финальном состоянии $\psi_{11}\psi_{22} = \psi_{12}\psi_{21}$. Действительно,

$$|\psi_{11}|_e^2 = \frac{L_1N_1}{\Phi_e}, |\psi_{12}|_e^2 = \frac{L_1N_2}{\Phi_e}, |\psi_{21}|_e^2 = \frac{L_2N_1}{\Phi_e}, |\psi_{22}|_e^2 = \frac{N_1N_2}{\Phi_e}. \tag{9.23}$$

Заметим, что при слабой зацепленности величины (9.23) оказываются пропорциональными их значениям при $t = 0$ с точностью до малых поправок порядка $\left(\dfrac{L_0}{\Phi_0}\right)^2$.

Предположение об одинаковости интервалов «работы» функции $\lambda(t)$ и их плотном прилегании друг к другу вообще несущественно, так как в промежутках, согласно (9.9), значения φ_{jk} «замерзают», а далее промежуточные интервалы выбрасываются, величина же l, если она меняется, остаётся под знаком интеграла. До формулы (9.23) все остается неизменным.

Эволюция самих величин ψ_{jk} также получается из наших формул, но она несколько сложнее, а зависимость от t, вообще говоря, сохраняется и после выхода на финальный режим. Изучение нелинейного процесса эволюции волновой функции при наличии многих подсистем и большего числа состояний в них, по-видимому, может быть проведено аналогичным образом, но более громоздко.

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2010. № 1

§ 10. Уравнения нелинейной квантовой механики не являются лоренц-инвариантными

При обсуждении уравнений нелинейной квантовой механики (9.9) возникает вопрос о том, в каком отношении развиваемая теория находится с теорией относительности. Само линейное уравнение Шредингера не является релятивистски инвариантным, так как производная по времени $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ у него первого порядка, но частные производные по координатам типа $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}$ имеют второй порядок. Это неравноправие временной и пространственной координат нарушает основное требование теории относительности, описывающей события в четырехмерном квазиевклидовом пространстве-времени. Как известно, выход из этого нашел Дирак: вместо одного уравнения второго порядка он получил четыре лоренц-инвариантных дифференциальных уравнения, которые содержат первые производные и по времени, и по координатам.

Наши нелинейные уравнения не допускают записи в лоренц-инвариантной форме. Дело прежде всего в том, что описываемый здесь процесс расщепления волновых пакетов необратим во времени, и выделение временной координаты на особую роль нарушает одно из главных положений теории относительности. Напомним, что уравнение Дирака во времени обратимо.

Заслуживает внимание еще один фактор. Коллапс волновых функций происходит со сверхсветовой скоростью, и это также нарушает принципы теории относительности, если признать что волновая функция имеет физическую реальность. Наличие сверхсветовых скоростей при коллапсе давно признается, однако с той оговоркой, что это не нарушает принцип причинности и не допускает передачи сигнала со скоростью, превышающей c. Однако все это верно только в том случае, когда не существует привилегированной системы координат. Именно это и утверждается теорией относительности, так в ней все системы отсчета переводятся одна в другую преобразованиями Лоренца. Так вот, неприменимость преобразований Лоренца в нашей теории связана ещё и с тем, что у нас неявно подразумевается наличие привилегированной системы отсчета. Это физически допустимо, так как одна привилегированная система отсчета в астрономии заведомо существует и связана она с фоном реликтового излучения. Мы допускаем поэтому передачу сигнала со сверхсветовой скоростью. Но, с нашей точки зрения, нельзя смешивать существование привилегированной системы отсчета с нарушением принципа причинности. А именно, принцип причинности у нас обязательно выполняется, и передача сверхсветового сигнала возможна только из прошлого в будущее. Это можно пояснить наличием определенной зоны «настоящее» между прошлым и будущим на световом конусе.

§ 11. Обсуждение

Мы построили нелинейную модель уравнения Шредингера, обеспечивающую расцепление со временем первоначально «зацепленных» подсистем и нашли для сравнительно простого примера их окончательное поведение после расцепления.

Заметим, что классический предел в квантовой механике, предполагающий как квазиклассическое приближение, так и теорему Эренфеста, никак не снимает с повестки дня парадокс кошки Шредингера. Ведь и в этом пределе волновая функция все равно продолжает действовать и вопрос о её расщеплении по-прежнему остается открытым. Что касается теорем выдающегося физика Эренфеста, то они парадокса кошки Шредингера также не затрагивают. Например, интегрирование квадрата амплитуды волновой функции по физическому пространству дает лишь условие её нормировки, переходящее в стандартное условие нормировки вероятностей, но никак не предопределяет, в какой точке реально окажется частица.

Физически содержательная теория декогеренции Зурека [7] представляет, конечно, большой интерес. Однако мы склоняемся к тому, что эта теория все же не решает окончательно проблему кошки Шредингера и не перекрывает нашу теорию. «Запутывание» волновой функции в теории декогеренции Зурека также не устраняет самой проблемы перехода из микромира в макромир.

Важно подчеркнуть ряд и других принципиальных моментов. Во-первых, аналогичный процесс известен и в классической физике, где его обычно называют потерей информации между двумя пространственно разобщенными явлениями под действием случайного шума [8]. Но есть и существенное различие: в классической физике это вмещается в установившиеся представления, а в квантовой – в переход к нелинейности уравнения Шредингера (именно к нелинейности самого этого уравнения Шредингера, что, конечно, надо отличать от нелинейности операторов). *Подчеркнем здесь еще раз, что при этом не всякая нелинейность подходит, а только та, которая создаёт необратимость, так как необратимым должен быть сам результат расцепления.* Поэтому попытки усовершенствовать уравнение Шредингера добавкой, например, ангармонических «сил», хорошо зарекомендовавших себя в нелинейной оптике и в нелинейной теории упругости, здесь обречены на неудачу. Насколько нам известно, и соответствующие выводы о результативности попыток введения такой нелинейности опровергаются экспериментом [9]. В вакууме, кстати, интерференция фотонов наблюдается ненарушенной и при космических длинах пробега. Далее, у нас нелинейность носит *внешний* характер как по форме воздействия, так и в смысле привлечения некоего дополнительного фона, чем-то похожего на фон из нейтрино или реликтового электромагнитного излучения, которые пронизывают Вселенную.

Существуют ли в действительности предполагаемый здесь тот другой, специфический фон, все пронизывающий и обуславливающий нелинейность для уравнения Шредингера? Такой «внешний» мир уже был предположен нами в [1] в связи с несколько другой, но по всем признакам родственной задаче о кошке Шредингера. В каком отношении для нас важно упоминание о реликтовом излучении? В том, что теория относительности задает хорошо известный световой конус по отношению к заданной точке пространства-времени, различающий для нее прошлое, настоящее и будущее. А реликтовое излучение задает нечто иное и несколько более точное: гиперплоскость в четырехмерном пространстве-времени. «Большую точность» здесь надо понимать как неинвариантность по отношению к преобразованиям Лоренца.

Представленный здесь математический аппарат, как и в работе [1], формально не включает в себя понятий теории относительности. Но анализ этого вопроса подсказывает нечто большее: этот аппарат несовместим с релятивистской инвариантностью. Ключевым пунктом является зануление λ, которое должно происходить в какие-то критические моменты времени. Если включить сюда зависимость от пространственных координат, получается опять-таки гиперповерхность в 4-мерном пространстве Минковского. Подчеркнём, что никаких противоречий с теорией относительности в областях её применения у нас нет. Но учитывая специфические закономерности поведения волновых пакетов в промежуточной зоне, в пространстве Минковского следует допустить существование изоповерхности равного специфического времени, связанного с разложением волновых функций. Вряд ли при этом речь идет об исконно заданных поверхностях; скорее, их положение само определяется распределением материи, хотя бы и в пока неизвестных нам ее формах. Кстати, такие изоповерхности, играя роль материальных препятствий на пути распространения реликтового излучения, могли бы вносить свой вклад и в обнаруженную недавно анизотропию реликтового излучения.

Имеется еще и другая сторона вопроса. Построение упомянутых гиперповерхностей одновременно означает и указание «стрел времени» как 4-мерных векторов, ортогональных в смысле Минковского этим поверхностям. Такая стрела времени, меняющаяся в зависимости от космической обстановки, влияет хотя бы на некоторые *необратимые* процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратьев Б. П., Антонов В. А. Решение парадокса кошки Шредингера. Опыт создания нелинейной квантовой механики. Ижевск, 1994. 144 с.

2. Гринштейн Дж., Зайонц А. Квантовый вызов. Современные исследования основ квантовой механики. М.: Изд. дом «Интеллект», 2008. 399 с.

3. Антонов В. А., Кондратьев Б. П. Астрономия и принципы квантовой механики // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Астрономия и математическая физика. 2009. №1. С. 75-94.

4. Синаноглу О. Современная квантовая химия / пер. с англ. М.: Мир, 1968. Т.1,2.

5. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.

6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. Т. 3. 704 с.

7. Зурек В. Декогеренция и переход от квантового мира к классическому // Los Alamos Sciensce , 2002. №27.

8. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983. 312 с.

9. Ципенюк Ю. М. Квантовая микро- и макрофизика. М.: Физматкнига, 2006. 640 с.

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2010. №1

Поступила в редакцию 01.09.09

B. P. Kondratyev, V. A. Antonov

Some principle questions, costing before quantum mechanics, are considered. Call attention to that the Born postulate has only aproximate nature, but the present source stochasticity in quantum mechanics are physical processes of the fission wave package on bound between micro- and macroworld. It is emphasized that popular now theories of intermixing and phase decoherence do not explain the paradox of Shredinger's cat . Beside us this paradox gets its permit and is logically proved, that in mezoworld must exist *mechanism of the destruction of wave package*.

Keywords: microworld, wave function, collapse of wave packets.

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических
наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical
science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru

Антонов Вадим Анатольевич,
доктор физико-математических
наук, ведущий научный
сотрудник,ГАО РАН
196140, Россия,
г. С.-Петербург

Antonov Vadim Anatolievich,
doctor of physical-mathematical
science, professor