ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 № 1

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Научный журнал — Основан в марте 1991 г.

Удмуртский государственный университет — г. Ижевск

СОДЕРЖАНИЕ

Редакционно-издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916-015
http://www.vestnik.udsu.ru

УДК 517.958:530.145.6

Л. Е. Морозова

ОБ АСИМПТОТИКЕ КВАЗИУРОВНЕЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Получена двучленная асимптотическая формула для квазиуровней (собственных значений или резонансов) двухчастичного дискретного оператора Шредингера при фиксированном квазиимпульсе в случае, когда константа связи мала.

Ключевые слова: двухчастичный дискретный оператор Шредингера, убывающий потенциал, собственное значение, резонанс.

Введение

Рассмотрим двухчастичный дискретный оператор Шредингера $H = H_0 + V(n-m)$, действующий в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^2)$. Здесь H_0 определяется формулой

$$(H_0\psi)(n,m) = \psi(n+1,m)+\psi(n-1,m)+\psi(n,m+1)+\psi(n,m-1),\ \ n,m \in \mathbb{Z}.$$

Предполагаем, что функция $V(n-m)$ ненулевая, вещественная и удовлетворяет оценке

$$|V(n)| \leqslant Ce^{-a|n|},\ a > 0.$$

Рассматриваемые в работе операторы возникают в теории спиновых волн при решении уравнения Гейзенберга с помощью анзаца Бете для двухмагнонных состояний - состояний с двумя перевернутыми спинами - в цепочках атомов [1].

Операторы подобного вида исследовались ранее, в частности в следующих работах. В статье [2] исследуется двухчастичный оператор $H(k)$, где k - квазиимпульс, с потенциалом взаимодействия специального вида V. Доказывается, что при фиксированном квазиимпульсе данный оператор имеет бесконечное число собственных значений. В работе [3] рассматривается семейство двухчастичных дискретных операторов $H(k)$, отвечающих гамильтониану системы двух фермионов на ν - мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geqslant 1$, где $k \in (-\pi,\pi]^\nu$. Доказано, что для любого ν данный оператор имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра, если оператор $H(0)$ имеет виртуальный уровень ($\nu = 1, 2$) или собственное значение ($\nu \leqslant 3$) на дне существенного спектра. В работе [4] исследуется двухчастичный дискретный оператор с потенциалом взаимодействия $V = \mu\delta_{n_1,n_2}$, где δ_{n_1,n_2} – символ Кронекера. Установлено, что этот оператор при фиксированном квазиимпульсе либо имеет единственное собственное значение, либо не имеет собственных значений в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu > 0$ и квазиимпульса.

В работе [5] получен первый член в асимптотическом разложении по ε квазиуровней двухчастичного оператора Шредингера $H_0(k) + \varepsilon V$, при достаточно малых ε. В данной статье найден член второго порядка в указанном разложении.

Обозначим через $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ резольвенту оператора H_0. Через $\sigma(A)(\sigma_{ess}(A))$ будем обозначать спектр (существенный спектр) оператора A.

§ 1. Спектр и резольвента оператора $H_0(k)$

Рассмотрим унитарный оператор

$$U : l^2(\mathbb{Z}^2) \to l^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2([-\pi, \pi)),$$

определяемый формулой

$$(U\psi)(n, k) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} e^{-i(k,\nu)} \psi(n + \nu, \nu),$$

где параметр $k \in [-\pi, \pi)$ называется *квазиимпульсом.*

С помощью отображения U можно разложить оператор H в прямом интеграле пространств (более подробно см. [5])

$$\int_{[-\pi,\pi)}^{\oplus} l^2(\mathbb{Z})\, dk = l^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2\bigl([-\pi, \pi)\bigr).$$

Следовательно, исследование оператора H эквивалентно исследованию семейства операторов $H(k) = H_0(k) + V(n)$, действующих при фиксированном k в пространстве $l^2(\mathbb{Z})$.

Спектр оператора $H_0(k)$ (см. [5]) совпадает с отрезком

$$\Bigl[-4\cos(k/2), 4\cos(k/2)\Bigr].$$

Так как $V(n)$ представляет относительно компактное возмущение оператора $H_0(k)$, то согласно [6] $\sigma_{\text{ess}}\bigl(H(k)\bigr) = \sigma\bigl(H_0(k)\bigr)$.

Согласно [5, 7] ядро резольвенты оператора $H_0(k)$ имеет вид

$$G_0(n,k,\lambda) = -\frac{e^{ikn/2}}{\sqrt{\lambda^2 - 16\cos^2(k/2)}}\Big[g\big(\frac{\lambda}{4\cos(k/2)}\big)\Big]^{|n|},$$

где $g(z) = z - \sqrt{z^2-1}$ обратная функция к функции Жуковского. Функция G_0 аналитически продолжается по λ на двухлистную риманову поверхность $\mathcal{M}$, определяемую функцией $g\big(\lambda/4\cos(k/2)\big)$, листы которой склеиваются вдоль $\big[-4\cos(k/2), 4\cos(k/2)\big]$.

Уравнение Шредингера

$$\big(H_0(k) + \varepsilon V\big)\psi = \lambda\psi,$$

рассматриваемое в классе $l^2(\mathbb{Z})$, перепишем для $\lambda \notin \sigma(H_0(k))$ в виде

$$\psi = -\varepsilon R_0(k,\lambda)V\psi. \tag{1.1}$$

Введем обозначение $\sqrt{V} = \sqrt{|V|}\mathrm{sgn}V$ (только для $\sqrt{V}$). Сделаем в уравнении (1.1) замену, полагая, что $\varphi = \sqrt{|V|}\psi$, тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\varphi = -\varepsilon\sqrt{|V|}R_0(k,\lambda)\sqrt{V}\varphi. \tag{1.2}$$

Сделанная замена позволяет исследовать в $l^2(\mathbb{Z})$ не только собственные значения (в этом случае $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$), но и резонансы, когда ψ экспоненциально возрастает.

Введем обозначение $H_\varepsilon(k) = H_0(k) + \varepsilon V$.

Определение 1. Число λ, принадлежащее второму листу римановой поверхности $\mathcal{M}$, будем называть *резонансом* оператора $H_\varepsilon(k)$, если существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\mathbb{Z})$ уравнения (1.2).

Определение 2. *Квазиуровнем* оператора будем называть его собственное значение или резонанс.

Определение 3. *Кратностью* квазиуровня будем называть

$$\dim\ker\big(1 + \sqrt{|V|}R_0(k,\lambda)\sqrt{V}\big).$$

Введем в окрестностях граничных точек $\pm 4\cos(k/2)$ существенного спектра оператора $H(k)$ новую переменную

$$\varkappa = \mp i\sqrt{\lambda^2 - 16\cos^2(k/2)}, \tag{1.3}$$

тогда

$$\lambda = \pm i\sqrt{\varkappa^2 - 16\cos^2(k/2)}.$$

Корень здесь предполагается двухзначным, его риманова поверхность совпадает с римановой поверхностью функции G_0. Изменению λ на двух листах римановой поверхности в окрестностях точек $\pm 4\cos(k/2)$ отвечает изменение $\varkappa$ в окрестности нуля комплексной плоскости.

Введем обозначение

$$G_\pm(n,k,\varkappa) = G_0\big(n,k,\pm\sqrt{\varkappa^2 - 16\cos^2(k/2)}\,\big) = \\ = \mp\frac{\exp\big(i(kn \mp \pi|n|)/2\big)}{i\varkappa}\Big[g\big(\frac{\varkappa}{4\cos(k/2)}\big)\Big]^{|n|}. \tag{1.4}$$

Положим далее

$$\widetilde{G}_\pm(n,k,\varkappa) = \mp\frac{\exp\big[i(kn \mp \pi|n|)/2\big]}{i\varkappa}\left(\Big[g\big(\frac{\varkappa}{4\cos(k/2)}\big)\Big]^{|n|} - \Big[g(0)\Big]^{|n|}\right). \tag{1.5}$$

Здесь $g(0) = -i$.

Обозначим через $\widetilde{R}_0^\pm(k,\varkappa)$ резольвенту оператора $H_0(k)$ после замены (1.3). Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$\varphi = -\varepsilon\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^\pm(k,\varkappa)\sqrt{V}\varphi. \tag{1.6}$$

Обозначим через $M_\pm(k,\varkappa)$ операторнозначную функцию с ядром

$$\sqrt{|V(n)|}\widetilde{G}_\pm(n-m,k,\varkappa)\sqrt{V(m)}.$$

Нетрудно показать, что операторнозначная функция $M_\pm(k,\varkappa)$ представляет собой аналитическую функцию аргумента $\varkappa$ в некоторой окрестности нуля со значениями в множестве операторов Гильберта-Шмидта.

Учитывая (1.4) и (1.5), запишем

$$\sqrt{|V|}\widetilde{R}_0^\pm(k,\varkappa)\sqrt{V} = \mp\frac{(\cdot,\widetilde{\varphi}_\pm)\varphi_\pm}{i\varkappa} + M_\pm(k,\varkappa), \tag{1.7}$$

где

$$\varphi_+(n) = \sqrt{|V(n)|}e^{i(k/2-\pi)n},\ \widetilde{\varphi}_+(n) = \sqrt{V(n)}e^{i(k/2-\pi)n};$$
$$\varphi_-(n) = \sqrt{|V(n)|}e^{ikn/2},\ \widetilde{\varphi}_-(n) = \sqrt{V(n)}e^{ikn/2}.$$

Здесь резольвента продолжена по $\varkappa$ на второй лист римановой поверхности своей функцией Грина.

§ 2. Асимптотика квазиуровней

Теорема 1. *Предположим, что*

$$\overline{V} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n) \neq 0.$$

Тогда в некоторых окрестностях точек $\pm 4\cos(k/2)$ *для всех достаточно малых* ε *существует ровно по одному квазиуровню* $\lambda = \lambda_\varepsilon$ *кратности единица оператора* $H_\varepsilon(k)$, *для которых справедлива формула*

$$\lambda_\varepsilon = \pm\left[4\cos(k/2) + \frac{\varepsilon^2\overline{V}^2}{8\cos(k/2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^3\overline{V}}{16\cos^2(k/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} V(n)\,|n-m|\,V(m)(\mp i)^{|n-m|}\right] + O(\varepsilon^4).$$

При этом квазиуровень, расположенный вблизи точки $4\cos(k/2)$ (*соответственно* $-4\cos(k/2)$), *является при* $\overline{V} > 0$ *собственным значением* (*соответственно, резонансом*), *а при* $\overline{V} < 0$ — *резонансом* (*соответственно, собственным значением*).

Доказательство. Запишем уравнение (1.6) с помощью (1.7) в виде

$$\varphi = \pm\varepsilon\frac{(\cdot,\widetilde{\varphi}_\pm)\varphi_\pm}{i\varkappa} + \varepsilon M_\pm(k,\varkappa). \tag{2.1}$$

Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $\varkappa$ из малой окрестности нуля выполнена оценка:

$$||\varepsilon M_\pm(k,\varkappa)|| < 1.$$

Для таких ε положим

$$\phi = \big(1 + \varepsilon M_\pm(k,\varkappa)\big)\varphi$$

и перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\phi = \pm\varepsilon\frac{\Big([1+\varepsilon M_\pm(k,\varkappa)]^{-1}\phi, \widetilde{\varphi}_\pm\Big)\varphi_\pm}{i\varkappa}.$$

Следовательно, эквивалентным условием существования решения уравнения (2.1) является существование решения уравнения

$$F(\varkappa,\varepsilon) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$F(\varkappa,\varepsilon)=\varkappa+\pm\varepsilon\Big(\big[1+\varepsilon M_\pm(k,\varkappa)\big]^{-1}\varphi_\pm,\widetilde{\varphi}_\pm\Big).$$

Функция F является аналитической по $\varkappa$ и ε, причем

$$F(0,0)=0,\ \frac{\partial F(0,0)}{\partial\varkappa}=1\neq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции для аналитических функций нескольких переменных (см. [8]) для достаточно малых ε существует единственное решение $\varkappa=\varkappa(\varepsilon)$ уравнения (2.2), аналитически зависящее от ε. Разлагая операторнозначную функцию $M_\pm(k,\varkappa)]^{-1}$ в ряд по степеням ε, получим

$$\varkappa=\mp i\varepsilon(\varphi_\pm,\widetilde{\varphi}_\pm)\pm i\varepsilon^2\big(M_\pm(k,\varkappa)\varphi_\pm,\widetilde{\varphi}_\pm\big)+\alpha(\varkappa,\varepsilon),\tag{2.3}$$

где $|\alpha(\varkappa,\varepsilon)|\leqslant \mathrm{C}\varepsilon^3$ и константа C не зависит от $\varkappa$ из окрестности нуля.

В силу (2.3) имеем $\varkappa=O(\varepsilon)$, следовательно

$$M_\pm(k,\varkappa)=M_\pm(k,0)+O(\varkappa)=M_\pm(k,0)+O(\varepsilon).\tag{2.4}$$

Очевидно, что ядро оператора $M_\pm(k,0)$ имеет вид

$$\mp\frac{1}{i}\sqrt{|V(n)|}\exp\big(i(kn\mp\pi n)/2\big)\left[\frac{d}{d\varkappa}\Big(g\big(\frac{\varkappa}{4\cos(k/2)}\big)\Big)^{|n-m|}\right]\Big|_{\varkappa=0}\sqrt{V(m)}=$$
$$=\mp\exp\big(i(kn\mp\pi n)/2\big)\frac{\sqrt{|V(n)|}\,|n-m|\,(\mp i)^{|n-m|}\sqrt{V(m)}}{4\cos(k/2)}.\tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) получаем

$$\varkappa=\mp i\varepsilon(\varphi_\pm,\widetilde{\varphi}_\pm)\mp\frac{i\varepsilon^2}{4\cos k/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sqrt{|V(n)|}\widetilde{\varphi}_\pm(n)\,|n-m|\times$$
$$\times(\mp i)^{|n-m|}\sqrt{V(m)}\ \overline{\varphi_\pm(m)}+O(\varepsilon^3)=\tag{2.6}$$
$$=\mp i\varepsilon\sum_{n\in\mathbb{Z}}V(n)\mp\frac{i\varepsilon^2}{4\cos(k/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}V(n)|n-m|V(m)(\mp i)^{|n-m|}+O(\varepsilon^3).$$

Следовательно,

$$\lambda=\pm4\cos(k/2)\sqrt{1-\Big(\frac{\varkappa}{4\cos(k/2)}\Big)^2}=\pm4\cos(k/2)\times$$

$$\times \left(1+\left(\frac{\varepsilon}{4\cos(k/2)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}V(n)+\frac{i\varepsilon^2}{16\cos^2(k/2)}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}V(n)|n-m|V(m)(\mp i)^{|n-m|}+O(\varepsilon^3)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\pm\left[4\cos(k/2)+\frac{\varepsilon^2\overline{V}^2}{8\cos(k/2)}+\frac{\varepsilon^3\overline{V}}{16\cos^2(k/2)}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\mp i)^{|n-m|}V(n)|n-m|V(m)\right]+O(\varepsilon^4).$$

Далее, из (1.3) и (2.6) имеем равенство на первом листе римановой поверхности $\mathcal{M}$:

$$\pm\sqrt{\lambda^2-16\cos^2(k/2)}=\varepsilon\overline{V}(n)+\frac{i\varepsilon^2}{4\cos(k/2)}\times$$
$$\times\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}V(n)|n-m|V(m)(\mp i)^{|n-m|}+O(\varepsilon^3).$$

Поэтому, если $\overline{V}>0$, то вблизи точки $4\cos(k/2)$ при малых ε находится собственное значение, а вблизи точки $-4\cos(k/2)$ — резонанс, а если $\overline{V}<0$, то наоборот.

Утверждение о кратности квазиуровня следует из того, что согласно (2.1) $\phi=C\varphi_{\pm}$. Теорема доказана.

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изюмов Ю. А., Скрябин Ю. Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987. 264 с.

2. Абдулаев Ж. И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке // Uzbek. Math. J. 2005. № 1. С. 3–11.

3. Лакаев С. Н., Халхужаев А. М. О спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке // ТМФ. 2008. Т. 155, № 2. С. 287–300.

4. Faria da Viega A., Ioritti L., O'Carroll M. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians // Physical Review E. 2002. Vol. 66, 016130-1–016130-9.

5. Баранова Л. Е., Чубурин Ю. П. Квазиуровни двухчастичного дискретного оператора Шредингера с малым потенциалом //Вестник Удм. ун–. 2008. № 1. С. 35–46.

6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.

7. Baranova L. E. Chuburin Yu. P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential //J.Phys.A: Math.Theor. 2008. Vol 41, №. 435205 (11pp).

8. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. 430 с.

Поступила в редакцию 12.12.09

L. E. Morozova

On asymptotic behavior of quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with decreasong potential

We obtain the binomial asymptotic formula of quasi-levels (eigenvalues or rezonances) of the two-particle discrete Schrödinger operator for a fixed quasimomentum when a coupling constant tends to zero.

Keywords: two-particle discrete Schrödinger operator, decreasong potential, eigenvalue, rezonance.

Морозова Людмила Евгеньевна,
старший преподаватель,
Ижевский государственный технический университет
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7 (корп. 1),
E-mail: luvial@mail.ru