ГОУВПО "УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

КЛОЧКОВ МИХАИЛ АРКАДЬЕВИЧ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЗМУЩЕНИЯМИ МИНИМАЛЬНОГО РАНГА

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения

Научный руководитель —

доктор физ.-мат. наук, проф. Исламов Г.Г.

Ижевск 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1°. Спектральные задачи для линейных операторов давно привлекают внимание исследователей. Особый интерес представляет задача управления дискретным спектром дифференциальных операторов. Дискретный спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и описывает важные характеристики физических и химических объектов (квадраты частот собственных колебаний механических систем, энергетические уровни квантовых объектов и т.п.) Явления резонанса, энергетические сдвиги излучения и ряд других нежелательных явлений могут быть устранены путём введения блоков обратной связи, позволяющих изменить в заданном направлении спектральные характеристики операторов, описывающих динамику и статику изучаемых объектов.

2°. Рассматриваемая в диссертации задача управления дискретным спектром касается изменения конечного числа точек дискретного спектра с помощью конечномерного возмущения, однако, преследует три важные цели, определяющие новизну исследования: исследуется роль возмущений минимально возможного ранга, поведение их норм при удалении n собственных значений при $n \to \infty$, а также получение оценок погрешности, допустимой при приближённом построении возмущений.

Общий характер влияния на спектр конечномерных возмущений достаточно хорошо изучен в работах А. Вайнштейна и Н. Ароншайна [18, с. 307-310], Ю.Н. Андреева [1, 2], А.Г. Бутковского [6, 7], Е.Я. Смирнова [39] и ряд других авторов [8, 43, 45, 47, 49, 53]. В работах Г.Г. Исламова [12]-[15] впервые поставлена задача изучения возмущений минимального ранга, поведения их норм при большом числе изменяемых собственных значений и при приближённом построении возмущений. Мы углубляем эти исследования применительно к самосопряжённым операторам с чисто точечным спектром, а также несамосопряжённым операторам, подобным самосопряжённым.

Следуя [13], перейдём к постановке задачи о построении возмущений минимального ранга для операторов. Ограниченный оператор K, действующий в комплексном банаховом пространстве X, называется конечномерным, если он представим в виде

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} a_i \left\langle x, b_i \right\rangle, \quad a_i \in X, \quad b_i \in X^*(i = \overline{1, n}),$$

где X^*—сопряжённое пространство, $\langle x, b_i \rangle$—значение функционала b_i на элементе x.

Пусть замкнутый оператор $A : X \to X$ с областью определения $D(A)$ имеет собственные значения в некоторой "запрещённой" области Ω комплексной плоскости $\mathbf{C}(\Omega \neq \mathbf{C})$. Требуется указать такой конечномерный оператор $K : X \to X$, при котором оператор $V = A - K$ не будет иметь точек спектра $\sigma(V)$ в Ω, т. е. $\Omega \subset P(V)$, где $P(V)$—резольвентное множество оператора V. Сформулированная задача относится к классу задач управления спектром линейного оператора и возникает при анализе итерационных процессов решения уравнений, в управлении квантовыми объектами, исследовании колебательных систем и в ряде других проблем [1, 2, 6, 7, 39].

Известно, что существенный спектр оператора A не может измениться при воздействии конечномерным оператором K [18]. Поэтому операторы

$V = A - K$ и A имеют одинаковые существенные спектры. Однако дискретные спектры этих операторов могут сильно отличаться, что очень важно для приложений.

Переход от спектра $\sigma(A)$ к спектру $\sigma(A - K)$ образно можно представить как "удаление" собственных значений оператора A из области Ω и преобразование части спектра $\sigma(A)$, лежащей вне Ω. Понятно, что конечномерными возмущениями можно удалить те, и только те, точки μ спектра $\sigma(A)$, при которых оператор $A - \mu I$ фредгольмов (индекса нуль). Более того, при определённых условиях такими точками могут быть лишь изолированные собственные значения конечной алгебраической кратности. Например, в случае гильбертова пространства X это верно для нормального оператора.

Приведём ещё одно из условий. Пусть существует такое разложение $A = V + K$, что $\Omega \subset P(V)$ и $\operatorname{rang} K < \infty$, где $\operatorname{rang} K$—размерность образа KX. При фиксированном $\mu \in \Omega$ уравнение $Ax - \mu x = f$ эквивалентно уравнению $x + R(\mu; V)Kx = R(\mu; V)f, \quad R(\mu; V) = (V - \mu I)^{-1}$— резольвента оператора V, которое однозначно разрешимо при любом $f \in X$ в том и только том случае, когда детерминант Вайнштейна-Ароншайна [18, с. 307]:

$$\omega(\lambda) = \det(I + R(\lambda; V)K) = \det(I + KR(\lambda; V)), \quad \lambda \in P(V),$$

в точке μ отличен от нуля. При выполнении условия $\Omega \cap P(A) \neq \emptyset$ голоморфная функция $\omega(\lambda) \neq 0$. Следовательно, нули функции $\omega(\lambda)$ и только они являются точками спектра оператора A, лежащими в $P(V)$. При этом в силу формулы Вайнштейна-Ароншайна [18, с. 310] алгебраическая кратность $\lambda \in \Omega \cap \sigma(A)$ равна кратности λ как нуля функции $\omega(\lambda)$ и, следовательно, конечна, а само λ будет изолированной точкой спектра $\sigma(A)$.

Среди всех конечномерных операторов K, "исправляющих" спектр оператора A описанным выше способом, выделим те, которые имеют минимальный ранг. Такие возмущения мы назовём экстремальными: они являются решениями экстремальной задачи

$$\operatorname{rang} K \to \min, \quad \Omega \subset P(A-K). \tag{1}$$

Величина r_0 минимального ранга в задаче (1) указывает на то, что оператором меньшего ранга уже нельзя исправить спектр требуемым образом.

При рассмотрении задачи (1) возникают две разные по трудности подзадачи:

а) оценка минимального значения функционала $\operatorname{rang} K$;

б) отыскание возмущения K, доставляющего минимум функционалу $\operatorname{rang} K$.

Изучение подзадачи а) естественно начать с поиска двойственного функционала. Возмущение $K : X \to X$ назовём допустимым в задаче (1), если $\Omega \subset P(A-K)$ и $\operatorname{rang} K < \infty$. Пусть K—произвольное допустимое возмущение, $\lambda \in \Omega$. Тогда уравнения $Ax = \lambda x$ и $x = -(V-\lambda I)^{-1}Kx$ ($V = A-K$, I—тождественный оператор) эквивалентны. Отсюда $\operatorname{rang} K \geqslant M(\lambda; A)$ для любого $\lambda \in \Omega$ и произвольного допустимого возмущения K. Здесь $M(\lambda; A) = \dim\ker(A-\lambda I)$—геометрическая кратность числа λ. Это означает, что целевая функция экстремальной задачи

$$M(\lambda; A) \to \max, \quad \lambda \in \Omega, \tag{2}$$

мажорируется сверху целевой функцией задачи (1). По аналогии с математическим программированием утверждение о совпадении экстремальных значений целевых функций задач (1) и (2) назовём теоремой двойственности, а задачу (2)—двойственной к задаче (1).

Исламовым Г. Г. доказана следующая теорема двойственности.

Теорема 0.1. *[13] Пусть множество $\Omega \cap \sigma(A)$ пусто или конечно и состоит из изолированных собственных значений оператора A конечной алгебраической кратности. Тогда экстремальные значения целевых функций задач* (1) *и* (2) *совпадают.*

Замечание 1. Из доказательства данной теоремы вытекает, что существует такое возмущение K минимального ранга, которое оставляет без изменения точки спектра $\sigma(A)$, лежащие вне области Ω, и переводит все изолированные собственные значения оператора A из области Ω в одну и ту же наперёд заданную точку $\xi \notin \Omega$.

Замечание 2. Если нуль не принадлежит замыканию $\overline{\Omega}$, то условию теоремы 0.1 удовлетворяют потенциально-компактные операторы ([35, с. 459]). Если же Ω—ограниченное подмножество комплексной плоскости, то условию теоремы 0.1 удовлетворяют замкнутые операторы с компактной резольвентой.

3°. Кратко остановимся на содержании диссертации. Диссертация состоит из Введения, двух глав и Списка литературы. Нумерация определений, лемм, теорем, замечаний независимая: первое число обозначает номер главы, второе—порядковый номер внутри главы. В пределах глав используется сквозная нумерация формул.

В **первой главе** диссертации исследуется задача управления точечным спектром самосопряжённых операторов с простым чисто точечным спектром. В силу теоремы 0.1 необходимые изменения можно достичь одноранговым возмущением. Получено описание всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр надлежащим образом. Исследовано поведение оценки нормы возмущений при неограниченном увеличении количества выводимых из спектра собственных значений. Получены оценки точности построения одноранговых возмущений по приближённым решениям спектральной задачи. Результаты распространяются на несамосопряжённые операторы, подобные самосопряжённым. Построены примеры управления дискретным спектром дифференциальных операторов уравнений математической физики.

В **первом параграфе главы I** рассматривается самосопряжённый оператор T с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H по закону

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, X_k \rangle X_k, \tag{3}$$

где $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$—полная ортонормированная система элементов из H, $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$—однократные собственные значения, образующие точечный спектр $\sigma_p(T)$ оператора T. Область определения такого оператора имеет вид

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u | u \in H, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 | \langle u, X_k \rangle |^2 < \infty \right\}.$$

В форме (3) может быть записан самосопряжённый оператор с чисто точечным простым спектром [18, с. 638]. В силу известной теоремы Вейля-фон Неймана [18, с. 648] любой самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве можно превратить в самосопряжённый оператор с чисто точечным спектром, добавив к нему подходящий "малый" оператор.

Одноранговое возмущение $K : H \to H$ имеет вид

$$Ku = a\langle u, b\rangle, \quad a \in H, \quad b \in H, \tag{4}$$

где

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j, \quad b = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j,$$

причём $\{\nu_i\}_{i\geqslant 1}, \{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел. Приводимая ниже теорема даёт описание всех операторов вида (4), для которых имеет место равенство

$$\sigma_p(T - K) = \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega),$$

здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, который по предположению состоит из однократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$, Ω—заданное конечное подмножество изолированных собственных значений оператора T, которое надлежит удалить с помощью однорангового возмущения (4), Θ—заданное конечное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω.

Теорема 0.2. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ изолированных собственных значений оператора (3) в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ ($\Theta \cap \Omega = \emptyset$) с помощью однорангового возмущения вида (4) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_m\}$;

б) $\nu_{k_i}\beta_{k_i} = \dfrac{P\left(\lambda_{k_i}\right)}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m}\left(\lambda_{k_i}-\lambda_{k_j}\right)}, i = \overline{1, m}$, *где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ*.*

Во **втором параграфе главы I** для несамосопряжённых дифференциальных операторов работы [46], где установлено их подобие самосопряжённым, доказывается аналог теоремы 0.2, определяющей вид однорангового возмущения.

Каноническая форма этих операторов записывается в следующем виде

$$T = A(D+M)^n A^{-1},$$

где $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$—линейный гомеоморфизм, $\alpha_k = O(|k|^{\frac{1}{2}})$, $\varphi_k(x) = e^{2k\pi\mathbf{i}x}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$—собственные функции оператора $Du = \dot{u}$, $u(0) = u(1)$, M—оператор, диагонализируемый в базисе $\varphi_k(x) = e^{2k\pi\mathbf{i}x}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ пространства $L^2(0,1)$. Собственные значения оператора $(D+M)^n$ и, следовательно, подобного ему оператора T, имеют вид

$$\{(2k\pi\mathbf{i} + \alpha_k)^n : \quad k = 0, \pm 1, \ldots\}.$$

Собственными функциями оператора $D+M$ будут функции φ_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, и, значит, собственными функциями оператора T будут функции $u_k = A\varphi_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Эта форма представления позволяет распространить результат теоремы 0.2 на указанный класс несамосопряжённых операторов. В самом деле, T подобен самосопряжённому оператору $(D+M)^n$ с простым спектром. Описание класса всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр оператора $(D+M)^n$ требуемым образом, дано в теореме 0.2. Для получения всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр оператора T надлежащим образом, достаточно применить преобразование подобия к одноранговым возмущениям оператора $(D+M)^n$.

Если элементы $\tilde{a}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\nu_k\varphi_k$ и $\tilde{b}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_k\varphi_k$ порождают одноранговое возмущение для $(D+M)^n$, то $a=A\tilde{a}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\nu_k A\varphi_k$ и $b=\left(A^{-1}\right)^*\tilde{b}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_k\left(A^{-1}\right)^*\varphi_k$ порождают одноранговое возмущение для T. Итак, имеет место

Теорема 0.3. *Пусть T—дифференциальный оператор n-го порядка с простым спектром, определённый на классе функций с абсолютно непрерывной $(n-1)$-й производной и n-й производной из L^2 и имеющий регулярные по Биркгофу краевые условия. Для того чтобы заданное подмножество собственных значений $\Omega=\{\lambda_{k_1},\ldots,\lambda_{k_m}\}$ оператора T с помощью однорангового возмущения вида (4), где $a=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\nu_j A\varphi_j$, $b=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_j\left(A^{-1}\right)^*\varphi_j$, $\{\nu_i\}_{i=-\infty}^{\infty},\{\beta_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ —две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, переводилось в произвольно заданное подмножество $\Theta=\{\kappa_1,\ldots,\kappa_m\}$ $(\Theta\cap\Omega=\emptyset)$ необходимо и достаточно, чтобы эти последовательности удовлетворяли следующим условиям:*

а) $\nu_j\beta_j=0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda=\{k_1,\ldots,k_m\}$;
б) $\nu_{k_j}\beta_{k_j}=\dfrac{P\left(\lambda_{k_j}\right)}{\prod\limits_{l=1,l\neq j}^{m}\left(\lambda_{k_j}-\lambda_{k_l}\right)}$, $j=\overline{1,m}$, где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

Третий параграф главы I посвящён задаче управления частотами собственных колебаний струны, даёт вывод уравнения колебаний с учётом формирования внешней силы по принципу обратной связи. Обратная связь представлена в виде одноранговового возмущения. Рассмотрены некоторые свойства этого возмущения.

В **четвёртом параграфе главы I** описана структура решений возмущённых уравнений и рассмотрен пример, иллюстрирующий процесс сдвига и удаления пяти собственных значений, найдены собственные функции для добавленных в точечный спектр собственных значений.

В **пятом параграфе главы I** получена оценка нормы одноранговового возмущения и изучено её поведение при удалении бесконечно большого числа точек спектра. Норма одноранговового возмущения $K : H \to H$ может неограниченно расти при удалении из спектра оператора T бесконечно большого числа собственных значений, как в случае их сгущения в точке ноль, так и в случае их стремления к бесконечно удалённой точке. Поэтому, мы пробуем сузить область определения наших операторов с целью получения конечных оценок нормы оператора K и рассмотреть случаи, когда возможно достижение нашей цели.

Согласно теореме 0.2 рассмотрим одноранговое возмущение K для оператора T в следующем виде

$$Ku = a\left\langle u, b\right\rangle, \;\; a = \sum_{i=1}^{m} \nu_{k_i} X_{k_i}, \;\; b = \sum_{i=1}^{m} \bar{\beta}_{k_i} X_{k_i}, \tag{5}$$

где m—число удаляемых собственных значений оператора T, X_{k_i}—соответствующие удаляемым собственным значениям собственные функции. Пусть оператор T действует из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) = \left\{ u | u \in H, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 | \left\langle u, X_k\right\rangle |^2 < \infty \right\}$

в H. Выберем следующую норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\left\langle u, X_j \right\rangle|^2\right)^{1/2}, \; \lambda_j \neq 0, \; j = \overline{1, \infty}. \tag{6}$$

Если в спектре оператора T имеется собственное значение $\lambda_k = 0$, тогда поменяем λ_1 и λ_k местами, получим $\lambda_1 = 0$, X_1—собственная функция, соответствующая нулевому собственному значению. В этом случае норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ запишем в виде

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\varepsilon^2 |\left\langle u, X_1 \right\rangle|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\left\langle u, X_j \right\rangle|^2\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Здесь λ_1 заменили на малое значение $0 < \varepsilon < 1$. Норму (6) можно использовать, если оператор T обратим, иначе необходимо брать норму (7). Тогда имеет место

Теорема 0.4. *Пусть задано подмножество $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ удаляемых однократных собственных значений оператора T, конечное подмножество Θ добавляемых точек к спектру оператора T и норма (7). Пусть среди удаляемых собственных значений имеется $\lambda_{k_1} = 0$, $X_{k_1} = X_1$. Тогда имеет место следующая оценка нормы для возмущения (5) с условием, что $\nu_{k_i} = 1$ для всех $i = \overline{1, m}$*

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \frac{\sqrt{m}|P(0)|}{\varepsilon \prod\limits_{j=2}^{m} |\lambda_{k_j}|} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\sqrt{m}|P(\lambda_{k_i})|}{|\lambda_{k_i}| \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|},$$

где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

При $m \to \infty$ изучено асимптотическое поведение данной оценки, получены некоторые условия существования конечного предела. Возьмём

$\lambda_{k_i} = i^2$. В качестве нормы, по аналогии с (6), выберем

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{2m} m^{2m+6} | \left\langle u, X_j \right\rangle |^2 \right)^{1/2}.$$

Имеет место новая оценка $\|K\|_{\mathcal{D}\to H}$:

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \frac{2m^{m+1/2}}{e^m m!}.$$

Предел $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{2m^{m+1/2}}{e^m m!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ —конечен.

Данный результат важен по той причине, что, выбрав определённым образом норму для функций из области определения оператора T, имеем конечное значение верхней оценки нормы одноранговогo возмущения K при неограниченном увеличении количества выводимых из спектра собственных значений.

В том же параграфе получены теоремы, позволяющие оценить точность вычисления собственных значений и функций, необходимых для построения конечномерных возмущений. Эти результаты имеют некоторое значение для решения практических задач, так как обычно на практике собственные значения и функции вычисляются с некоторой погрешностью.

В качестве возмущаемого оператора рассматривается самосопряженный оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий спектральное разложение $Tu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left\langle u, X_k \right\rangle X_k$, $\lambda_k \neq 0,\ k = \overline{1, \infty}$. Пусть имеется одноранговое возмущение вида $Ku = a \left\langle u, b \right\rangle$—одноранговое возмущение, для которого имеет место равенство $\sigma_p(T - K) = \{0\} \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega)$, где $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$—заданное подмножество однократных собственных значений самосопряженного оператора T.

Теорема 0.5. *Всякий одноранговый оператор $\tilde{K}$, удовлетворяющий условию*

$$||K-\tilde{K}||<\min_{k=\overline{1,m}}\left(\frac{1}{\nu_{l_k}^2}\sum_{i=1,i\neq l_k}^{\infty}\left(\left|\frac{\nu_{l_k}}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\left|\frac{\nu_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\frac{2|\nu_{l_k}||\nu_i|}{|\lambda_i-\lambda_{l_k}|^2}\right)+\right.$$

$$+\left(\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\right|+\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,i\notin\Lambda}^{\infty}\frac{\beta_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|+\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|+\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|\right)^2\right)^{-1/2}$$

также будет вносить в точечный спектр возмущаемого оператора необходимые изменения, а именно $\sigma_p(T-\tilde{K})=\{0\}\cup(\sigma_p(T)\setminus\Omega)$.

Теорема 0.6. *Пусть выполняются все условия предыдущей теоремы, Ω содержит только m положительных однократных собственных значений. Пусть имеется пара одноранговых возмущений K и $\tilde{K}$, определяющихся следующим образом $Ku=a\langle u,b\rangle$, где $a=\sum\limits_{j=1}^{m}X_{l_j}$, $b=\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{\beta}_{l_j}X_{l_j}$, $\beta_{l_i}=\frac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}(\lambda_{l_i}-\lambda_{l_j})}$, $i=\overline{1,m}$, $\tilde{K}u=\tilde{a}\langle u,\tilde{b}\rangle$, где $\tilde{a}=\sum\limits_{j=1}^{m}X_{l_j}$, $\tilde{b}=\sum\limits_{j=1}^{m}\bar{\tilde{\beta}}_{l_j}X_{l_j}$, $\tilde{\beta}_{l_i}=\frac{P(\tilde{\lambda}_{l_i})}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}(\tilde{\lambda}_{l_i}-\tilde{\lambda}_{l_j})}$, $i=\overline{1,m}$, где $P(\mu)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество $\sigma_p(T)\setminus\Omega$, дополненное нулём, $\tilde{\lambda}_{l_j}=\lambda_{l_j}+\varepsilon$.*

Если

$$M=\min_{k=\overline{1,m}}\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1,i\neq l_k}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+3\sum\limits_{i=1,l_i\neq l_k}^{m}\left|\frac{1}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|^2+\right.}$$

$$\frac{1}{+\left(\left(\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\right|+2\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|\right)^2\right)^{1/2}}$$

и $||K-\tilde{K}||<M$, *тогда*

$$\varepsilon\leqslant\frac{M}{m\sqrt{m}\left|\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\lambda_{l_j}^{m-1}}{\prod\limits_{i=1,j\neq i}^{m}\left|\lambda_{l_j}-\lambda_{l_i}\right|}\right|}.$$

Шестой параграф главы I посвящен задаче Трикоми. В **седьмом параграфе главы I** построено одноранговое возмущение для частного случая уравнения Шрёдингера, приводится конкретный пример удаления из спектра "нежелательных" собственных значений.

Во **второй главе** рассматривается задача управления кратным спектром линейных операторов возмущениями минимального ранга. В **первом параграфе главы II** доказывается конструктивная теорема построения возмущения минимального ранга. Во **втором** выводится оценка нормы возмущения.

Для самосопряжённого оператора с кратным спектром, имеющего следующее спектральное представление в виде ряда:

$$Tu=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_l}\lambda_l\left\langle u,\varphi_{l,i}\right\rangle\varphi_{l,i}, \tag{8}$$

где λ_l—собственные значения оператора T кратности m_l, $1\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant\ldots$, действующего из

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}(T)=\left\{h|h\in H,\quad\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_l}\lambda_l^2|\left\langle h,\varphi_{l,i}\right\rangle|^2<\infty\right\}$$

в H, H—сепарабельное гильбертово пространство, получена теорема, описывающая все многоранговые возмущения вида

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si} \langle u, b_{si} \rangle , \quad m_{l_0} = 0, \quad a_{si} \in H, \quad b_{si} \in H, \tag{9}$$

где $m_{l_1} \leqslant m_{l_2} \leqslant \dots \leqslant m_{l_m}$, для которых выполнено соотношение

$$\sigma_p(T-K) = \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega) .$$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, Ω—заданное непустое подмножество собственных значений оператора T, Θ—заданное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω.

Теорема 0.7. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество* $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_m}\}$ *изолированных собственных значений оператора* (8) *в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_{l_1}, \dots, \kappa_{l_m}\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью многорангового возмущения вида* (9) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\nu_{sij}\beta_{sij} = 0$ *для индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_1, \dots, l_m\}$;

б) $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \nu_{sil_j}\beta_{sil_j} = \dfrac{P(\lambda_{l_j})}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} (\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k})}, \quad j = \overline{1,m}$, *где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

Так же, как в случае оценки нормы одноранговоro возмущения, получена оценка для многорангового возмущения. Согласно теореме 0.7 рассмотрим одноранговое возмущение K для оператора T в следующем виде

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si} \langle u, b_{si} \rangle , \quad m_{l_0} = 0,$$

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{m} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}}, \quad b_{si} = \sum_{j=s}^{m} \bar{\beta}_{sil_j} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}},$$

где $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \beta_{sil_j} = \frac{P\left(\lambda_{l_j}\right)}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k}\right)}$, $j = \overline{1,m}$. Оценим норму оператора K, действующего из $\mathcal{D}$ в H. Возьмём следующую норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_l} |\lambda_l|^2 |\left\langle u, \varphi_{l,i} \right\rangle|^2 \right)^{1/2}, \ \lambda_l \neq 0, \ l = \overline{1,\infty}.$$

Имеем следующее выражение для нормы

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} = \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} \|Ku\|_H = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \|a_{si}\|_H \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\left\langle u, b_{si} \right\rangle|,$$

тогда справедлива оценка

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{m-j+1}|P(\lambda_{l_j})|}{|\lambda_{l_j}| \prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}|}.$$

В **третьем параграфе главы II** в качестве конкретного примера рассматривается задача управления колебаниями прямоугольной мембраны. Приводится вывод уравнения колебаний с учётом возмущения. Приводится пример удаления двух собственных значений из спектра. Построены графики колебаний. В **четвёртом параграфе главы II** строится возмущение минимального ранга для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере. [1]

Апробация работы и публикации.

Основные результаты диссертации представлялись на следующих научных семинарах и конференциях:

[1] Примечание. В пределах глав используется сквозная нумерация, если необходимо сослаться на теорему или формулу, которые находятся не в текущей главе, то сначала указывается номер главы.

- Четвёртая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция (Ижевск, 1999).

- Семинар по математике и информатике кафедры вычислительной математики (Ижевск, УдГУ, 1999-2003).

- VII Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2000" (МГУ, 2000).

- "Понтрягинские чтения-XI,XV" (Воронежская весенняя математическая школа, Воронеж, 2000,2004).

- Всероссийская конференция "Общие проблемы управления и их приложения к математической экономике" (Тамбов, 2000).

- Современные методы теории функций на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2001,2003).

- Пятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция (Ижевск, 2001).

- Математический семинар проф. Хромова А.П. (Саратов, 2001).

- Научный семинар проф. Покорного Ю.В. (Воронеж, 2001,2004).

- Ижевский городской семинар по дифференциальным уравнениям (2002).

Результаты диссертации опубликованы в работах [19]—[28].

Глава I. КОНСТРУКЦИИ ОДНОРАНГОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§1. Построение одноранговового возмущения для самосопряжённого оператора с чисто точечным спектром.

1°. Пусть T—произвольный самосопряжённый оператор с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H по закону

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, X_k \rangle X_k, \tag{1}$$

где $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$—полная ортонормированная система элементов из H, $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$—однократные собственные значения, образующие точечный спектр $\sigma_p(T)$ оператора T. Область определения такого оператора имеет вид

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u | u \in H, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle u, X_k \rangle|^2 < \infty \right\}. \tag{2}$$

В форме (1) может быть записан самосопряжённый оператор с чисто точечным простым спектром [18, с. 638]. В силу известной теоремы Вейля-фон Неймана [18, с. 648] любой самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве можно превратить в самосопряжённый оператор с чисто точечным спектром, добавив к нему подходящий "малый" оператор.

В работе Исламова Г.Г. [14] для нормального компактного оператора (1) с простым спектром дано описание класса всех одноранговых возмущений, которые оставляют без изменения точки дискретного спектра $\sigma_d(T)$, лежащие вне заданной области Ω, и переводят все изолированные собственные значения оператора T из области Ω в точку 0. Это позволило изучить поведение нижней грани нормы одноранговых возмущений при $n \to \infty$, где n—число удаляемых собственных значений оператора T.

Цель первой главы—распространить результаты работы [14] на случай неограниченных самосопряжённых операторов с простым чисто точечным спектром. Одноранговое возмущение $K : H \to H$ представимо в виде

$$Ku = a\langle u, b\rangle, \quad a \in H, \quad b \in H, \tag{3}$$

где

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j, \quad b = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j, \tag{4}$$

причём $\{\nu_i\}_{i\geqslant 1}, \{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел. Приводимая ниже теорема даёт описание всех операторов вида (3), для которых имеет место равенство

$$\sigma_p(T - K) = \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega). \tag{5}$$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, который по предположению состоит из однократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$, Ω—заданное конечное подмножество изолированных собственных значений оператора T, которое надлежит удалить с помощью одноранговoго возмущения (3), Θ—заданное конечное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω.

Теорема 1.1. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ изолированных собственных значений опера-*

тора (1) *в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью одноранговго возмущения вида* (3) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{k_1, \dots, k_m\}$;

б) $\nu_{k_i} \beta_{k_i} = \dfrac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}$, $i = \overline{1, m}$, *где* $P(\lambda)$ — *некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Необходимость.</u> Пусть имеет место (5). Покажем, что выполняются условия а), б) теоремы. Решение $\varphi \neq 0$ спектральной задачи

$$\mu\varphi = (T - K)\varphi, \text{ где } \mu \in \sigma_p(T - K), \tag{6}$$

представим в виде ряда по ортонормированной системе $\{X_k\}_{k \geqslant 1}$ собственных функций оператора (1): $\varphi = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \gamma_l X_l$. В силу (3)

$$K\varphi = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j\right) \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l X_l, \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\beta}_k X_k \right\rangle = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j\right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l \beta_l\right).$$

Далее, из представления (1) имеем

$$T\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l X_l, X_j \right\rangle X_j = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \lambda_j X_j.$$

Таким образом, задача (6) в базисе $\{X_k\}_{k \geqslant 1}$ гильбертова пространства H сводится к спектральной задаче для системы линейных алгебраических уравнений

$$\mu\gamma_i = \lambda_i \gamma_i - \nu_i \Delta, \; i = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

где

$$\Delta = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l \gamma_l. \tag{8}$$

Согласно условию (5) при $\mu = \lambda_j, \quad j \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$ система (7) должна иметь нетривиальное решение. При $i = j$ из (7) получим $\nu_j \Delta = 0$.
Если $\Delta \neq 0$, то $\nu_j = 0$, и, значит, выполнено условие а) теоремы.
Если же $\Delta = 0$, то согласно (7) $(\lambda_j - \lambda_i)\gamma_i = 0$. При $i \neq j$ имеем $\lambda_i \neq \lambda_j$ и, значит $\gamma_i = 0$. Отсюда в силу (8) $\Delta = \beta_j \gamma_j = 0$. Учитывая, что γ_j не может обратиться в нуль ($\varphi \neq 0$), заключаем, что $\beta_j = 0$, и, значит, опять выполнение условия а) теоремы обеспечено.

Теперь проверим выполнение условия б) теоремы. Возьмём $\mu \notin \{\lambda_i\} = \sigma_p(T)$. Из (7) следует, что

$$\gamma_i = -\frac{\nu_i \Delta}{\mu - \lambda_i}, \ i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Подставляя γ_i в (8), получим

$$\Delta = -\Delta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i \beta_i}{\mu - \lambda_i}.$$

Отсюда с учётом уже доказанного свойства а) имеем

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_{k_i} \beta_{k_i}}{\mu - \lambda_{k_i}}\right) \Delta = \frac{P(\mu)\Delta}{\prod\limits_{j=1}^{m} (\mu - \lambda_{k_j})} = 0, \tag{10}$$

где P—многочлен, определяемый равенством

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_{k_j}) + \sum_{i=1}^{m} \nu_{k_i} \beta_{k_i} \prod_{j=1, j \neq i}^{m} (\lambda - \lambda_{k_j}).$$

Полагая в последнем равенстве $\lambda = \lambda_{k_l}$, где $l = \overline{1, m}$, получим

$$P(\lambda_{k_l}) = \nu_{k_i} \beta_{k_i} \prod_{j=1, j \neq i}^{m} (\lambda_{k_l} - \lambda_{k_j}),$$

что эквивалентно условию б) теоремы.

Осталось показать, что корни многочлена $P(\lambda)$ образуют подмножество $\Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega)$. Если ξ—корень $P(\lambda)$, не принадлежащий $\sigma_p(T)$, то равенство (10) выполнено при $\Delta \neq 0$. В таком случае по формуле (9), где $\mu = \xi$ можно построить нетривиальное решение системы (7) и, значит, уравнения $\xi\varphi = (T-K)\varphi$. Из предположения (5) получим $\xi \in \Theta$. Следовательно, все не принадлежащие множеству Θ корни $P(\lambda)$ обязательно принадлежат $\sigma_p(T)$. Покажем, что они в действительности принадлежат $\sigma_p(T) \setminus \Omega$.

Из доказанного выше утверждения б) вытекает, что если λ_{k_j} будет нулём многочлена $P(\lambda)$, то $\nu_{k_j}\beta_{k_j} = 0$. Однако $\nu_{k_j} = \left\langle a, X_{k_j} \right\rangle, \quad \beta_{k_j} = \left\langle X_{k_j}, b \right\rangle$, поэтому X_{k_j} при $\mu = \lambda_{k_j}$ удовлетворяет одному из уравнений

$$\mu\varphi = T\varphi - a\left\langle \varphi, b \right\rangle = (T-K)\varphi,$$

$$\overline{\mu}\psi = T^*\psi - b\left\langle \psi, a \right\rangle = (T^* - K^*)\psi, \tag{11}$$

что противоречит условию (5), согласно которому $\lambda_{k_j} \notin \sigma_p(T-K)$.
Итак, корни $P(\lambda)$, отличные от точек совокупности Θ, принадлежат $\sigma_p(T) \setminus \Omega$. Если допустить, что $P(\kappa_i) \neq 0$, $i = \overline{1,m}$, то из (9) и (10) при $\mu = \kappa_i$ получаем, что все $\gamma_i = 0$, что противоречит условию $\Theta \subset \sigma_p(T-K)$.

Достаточность. Для доказательства отметим, что из условия а) следует, что если $\mu = \lambda_j$, $j \notin \Lambda$, то функция X_j удовлетворяет хотя бы одному из уравнений (11).

Поэтому $\sigma_p(T) \setminus \Omega \subset \sigma_p(T-K)$. Далее из условия б) следует, что ν_{k_i}, β_{k_i}, $i = \overline{1,m}$, отличны от нуля. Полагая, что в системе (7) $\mu = \lambda_{k_i}$, найдём, что $\nu_{k_i}\Delta = 0$, следовательно, $\Delta = 0$, но тогда $\gamma_j = 0$ при $j \neq k_i$.

Так как $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j \gamma_j = 0$, тогда $\beta_{k_i} \gamma_{k_i} = 0$, следовательно $\gamma_{k_i} = 0$.
Итак, при $\mu = \lambda_{k_i}$ система (7) имеет только тривиальное решение. Это означает, что $\Omega \cap \sigma_p(T-K) = \emptyset$.

Пусть теперь $\mu \notin \{\lambda_i\} = \sigma_p(T)$ и $\mu \notin \Theta$, следовательно $P(\mu) \neq 0$. Из (10) находим, что $\Delta = 0$, но тогда из (9) следует, что (7) имеет только тривиальное решение. Таким образом, $\sigma_p(T-K) \subset \Theta \cup \sigma_p(T) \setminus \Omega$. Осталось проверить, что $\Theta \in \sigma_p(T-K)$. По условию теоремы $P(\kappa_i) = 0$, $i = \overline{1,m}$. Из (10) находим, что можно взять $\Delta \neq 0$. Из (9) следует, что (7) имеет нетривиальное решение.

2°. В случае одноранговых возмущений типа (3) существует формула Вайнштейна и Ароншайна, которая позволяет оценить изменение кратности собственных значений при конечномерных возмущениях оператора (1) [18, с. 307]. Найдём вид этой формулы для возмущения (3) со свойством (5). Сначала вычислим функцию Вайнштейна-Ароншайна, заданную на резольвентном множестве оператора T:

$$\omega(\mu) = \omega(\mu; T, K) = \det(I + K(T-\mu I)^{-1}) =$$

$$= 1 + \langle a, R^*(\mu) b \rangle = 1 + \langle a, R(\mu) b \rangle, \tag{12}$$

где I—тождественный оператор в H, $R(\mu) = (T-\mu I)^{-1}$—резольвента самосопряжённого оператора T. Так как $R(\mu)u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \mu)^{-1} \langle u, X_k \rangle X_k$, то в силу (4) и условий а) и б) теоремы 1.1 имеем

$$\omega(\mu) = 1 + \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k X_k, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\beta}_k}{\lambda_k - \mu} X_k \right\rangle = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_{k_i} \beta_{k_i}}{\lambda_{k_i} - \mu} =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{P\left(\lambda_{k_i}\right)}{\left(\lambda_{k_i} - \mu\right) \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} \left(\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}\right)}. \tag{13}$$

Согласно первой $W - A$-формуле [18, с. 310] изменение алгебраической кратности комплексного числа μ происходит по правилу

$$\tilde{\nu}(\mu; T - K) = \nu(\mu; \omega) + \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \text{—точка резольвентного} \\ & \quad \text{множества оператора } T, \\ 1, & \text{если } \mu \text{—изолированное собственное} \\ & \quad \text{значение } T, \\ +\infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\tilde{\nu}(\mu; T - K) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \text{ принадлежит резольвентному} \\ & \quad \text{множеству оператора } T - K, \\ \dim P, & \text{если } \mu \text{—изолированная точка} \\ & \quad \text{спектра оператора } T - K, \\ +\infty & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{15}$$

P—спектральный проектор, соответствующий изолированной точке спектра μ,

$$\nu(\mu; \omega) = \begin{cases} k, & \text{если } \mu \text{—нуль функции (13) порядка } k, \\ -k, & \text{если } \mu \text{—полюс функции (13) порядка } k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{16}$$

Все удаляемые собственные значения $\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}$ оператора T являются полюсами первого порядка для функции (13). Формула (14) подтверждает, что все λ_{k_i} содержатся в резольвентном множестве возмущённого оператора $T - K$, где K задаётся равенством (3) и удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 1.1.

§2. Случай оператора, подобного самосопряжённому.

1°. В работе [46] построена каноническая форма для одного класса несамосопряжённых дифференциальных операторов с простым спектром. Она показывает, что операторы этого класса подобны самосопряжённым операторам. Этот факт позволяет сформулировать аналог теоремы 1.1 для операторов работы [46].

Пусть T—дифференциальный оператор n-го порядка в гильбертовом пространстве $H = L^2(0,1)$ квадратично-суммируемых функций, область действия которого задаётся регулярными по Бирхгофу краевыми условиями. Обозначим через D оператор дифференцирования абсолютно непрерывных периодических с периодом 1 функций с производной из $L^2(0,1)$. Пусть $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.

Теорема 1.2. *[46] Найдутся линейный гомеоморфизм A пространства $L^2(0,1)$ и диагонализируемый в базисе $\varphi_k(x) = e^{2k\pi\mathbf{i}x}$, $k = 0, \pm1, \dots$ пространства $L^2(0,1)$ оператор M, такие что*

$$T = A(D+M)^n A^{-1}.$$

Так как $Mu = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \langle u, \varphi_k\rangle \varphi_k$ для некоторой комплексной последовательности $\{\alpha_k\}$ ($\alpha_k = O(|k|^{\frac{1}{2}})$), то

$$(D+M)u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi\mathbf{i} + \alpha_k) \langle u, \varphi_k\rangle \varphi_k.$$

Собственные значения оператора $(D+M)^n$ и, следовательно, подобного ему оператора T, имеют вид

$$\{(2k\pi\mathbf{i} + \alpha_k)^n : \quad k = 0, \pm1, \dots\}.$$

Собственными функциями оператора $D+M$ будут функции φ_k, $k=0,\pm1,\dots$, и, значит, собственными функциями оператора T будут функции $u_k=A\varphi_k$, $k=0,\pm1,\dots$. Отсюда и из теоремы 1.2 получаем каноническую форму для дифференциальных операторов n-ого порядка с простым спектром, рассмотренных в работе [46]:

$$Tu=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2k\pi\mathbf{i}+\alpha_k)^n\left\langle A^{-1}u,\varphi_k\right\rangle A\varphi_k,$$

где $A : L^2(0,1)\to L^2(0,1)$—линейный гомеоморфизм, $\alpha_k=O(|k|^{\frac{1}{2}})$, $\varphi_k(x)=e^{2k\pi\mathbf{i}x}$, $k=0,\pm1,\dots$—собственные функции оператора $Du=\dot{u}$, $u(0)=u(1)$.

Эта форма представления позволяет распространить результат теоремы 1.1 на указанный класс несамосопряжённых операторов. В самом деле, T подобен самосопряжённому оператору $(D+M)^n$ с простым спектром. Описание класса всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр оператора $(D+M)^n$ надлежащим образом, дано в теореме 1.1. Для получения всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр оператора T требуемым образом, достаточно применить преобразование подобия к одноранговым возмущениям оператора $(D+M)^n$.

Если элементы $\tilde{a}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\nu_k\varphi_k$ и $\tilde{b}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_k\varphi_k$ порождают одноранговое возмущение для $(D+M)^n$, то $a=A\tilde{a}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\nu_kA\varphi_k$ и $b=\left(A^{-1}\right)^*\tilde{b}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\bar{\beta}_k\left(A^{-1}\right)^*\varphi_k$ порождают одноранговое возмущение для T. Итак, имеет место

Т е о р е м а 1.3. *Пусть T—дифференциальный оператор n-го порядка с простым спектром, определённый на классе функций с абсолютно непре-*

рывной $(n-1)$-й производной и n-й производной из L^2 и имеющий регулярные по Биркгофу краевые условия. Для того чтобы заданное подмножество собственных значений $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ оператора T с помощью однорангового возмущения вида (3), где $a = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \nu_j A\varphi_j$, $b = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_j \left(A^{-1}\right)^* \varphi_j$, $\{\nu_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \{\beta_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ —две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, переводилось в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ необходимо и достаточно, чтобы эти последовательности удовлетворяли следующим условиям:

а) $\nu_j\beta_j = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_m\}$;

б) $\nu_{k_j}\beta_{k_j} = \frac{P\left(\lambda_{k_j}\right)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{m}\left(\lambda_{k_j}-\lambda_{k_l}\right)}, j = \overline{1, m}$, где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

Замечание. Класс операторов, подобных самосопряженным, достаточно широк. Другие примеры могут быть получены на основе метода Фридрихса [10, с. 487].

§3. Управление частотой собственных колебаний струны с помощью обратной связи.

1°. В этом параграфе иллюстрируется применение теоремы 1.1 при изучении задачи управления частотой собственных колебаний конечной струны. Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний закреплённой струны длины l:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t),\ x \in (0,l),\ t \geqslant 0, \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ характеризует величину отклонения струны от положения равновесия, c—константа, свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения, которое предлагается формировать по закону обратной связи

$$F(x,t) \equiv Ku = a(x) \int_0^l u(s,t) b(s) ds. \tag{18}$$

Собственные колебания с частотой ω закреплённой струны с обратной связью (18) формируются по закону

$$u(x,t) = e^{\mathbf{i}\omega t} X(x), \tag{19}$$

где $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, $X(x)$—описывает прогиб струны в начальный момент $t = 0$. Подстановка (19) в (17) даёт следующую спектральную задачу

$$-c^2 X''(x) - a(x) \int_0^l X(s) b(s) ds = \lambda X(x),\ \lambda = \omega^2,\ X(0) = X(l) = 0.$$

Известно решение невозмущённой спектральной задачи [5, с. 24]:

$$-c^2 X''(x) = \lambda X(x),\ X(0) = X(l) = 0, \tag{20}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2, \tag{21}$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{22}$$

Система функций $\{X_k\}_{k \geqslant 1}$ является полной, ортонормированной в $L^2(0, l)$ и образует полную систему собственных функций дифференциального оператора $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями $X(0) = X(l) = 0$. Дискретный характер спектра этого оператора позволяет записать спектральное разложение

$$TX(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k(x) \int_0^l X(s) X_k(s) ds. \tag{23}$$

Область определения этого оператора допускает эквивалентное описание

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ X | X \in L^2((0,l)), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left| \int_0^l X(s) X_k(s) ds \right|^2 < \infty \right\}. \tag{24}$$

Теперь необходимая теорема об управлении частотами собственных колебаний струны получается в результате переформулировки теоремы 1.1.

Теорема 1.4. *Пусть $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения* (24). *Чтобы перевести заданное подмножество квадратов собственных частот колебаний струны $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_m}\}$ в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ с помощью однорангового возмущения вида $KX = a(x) \int\limits_0^l X(s) b(s) ds$, $a = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j$, $b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j$, где $\{\nu_i\}_{i \geqslant 1}, \{\beta_i\}_{i \geqslant 1}$—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, необходимо и достаточно выбрать эти последовательности так, чтобы выполнялись следующие условия:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{l_1, \dots, l_m\}$;

б) $\nu_{l_i}\beta_{l_i} = \frac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m}(\lambda_{l_i}-\lambda_{l_j})}$, $i=\overline{1,m}$, *где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ*.*

2°. Если в теореме 1.4 длина струны $l=2\pi$ и в качестве квадратично суммируемой последовательности $\{\nu_k\}$ взято $\{\frac{1}{k}\}$, то

$$a(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\sin(jx) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\pi-x}{2},\ 0<x<2\pi.$$

Нетрудно проверить, что если

$$\nu_k = \frac{1}{k^2},\ \text{то } a(x) = -\sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_0^x \ln\left(2\sin(z/2)\right)dz,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

$$\text{и если } \nu_k = \frac{1}{k^3},\ \text{то } a(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x}{12}\right),\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

§4. Структура решений возмущённой задачи.

1°. Допустим, необходимо удалить из спектра колебаний струны первые N частот, $\Omega = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$. Зададим $\nu_k = \frac{1}{k}$, $c = 1$,

$$a(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} X_k(x), \quad b(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k X_k(x),$$

чтобы ν_k, β_k удовлетворяли условиям теоремы 1.4. Из условия б) получим

$$\frac{1}{i}\beta_i = \frac{P(\lambda_i)}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{N} (\lambda_i - \lambda_j)}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P(\mu)$ можно определить как $P(\mu) = \mu(\mu - \lambda_{N+1})^{N-1}$. Оператор (18) запишется в виде:

$$Ku = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{kl} \sin\frac{k\pi x}{l} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \int_0^l u(s) \sin\frac{i\pi s}{l} ds. \tag{25}$$

Данный пример показывает, что искомое возмущение можно построить самыми различными способами в рамках теоремы.

С помощью пакета программ Mathematica v.4.1 были получены графики функций из образа оператора $Vu = (T - K)u$, где $T = -\frac{d^2}{dx^2}$, $u = X_k(x)$, $x \in [0, \pi]$. В соответствии с приведённым выше примером удалялось $N = 5$ первых частот.

На рис.1-3 видно, что построенные графики отличаются по форме от синусоиды. Таким образом, очевидно, что $\lambda_k X_k \neq (T - K)X_k$ при $k \in \overline{1, 5}$ и $\lambda_k X_k = (T - K)X_k$, $k > 5$, т. е. в спектре оператора $T - K$ отсутствуют удалённые собственные значения и соответствующие им собственные

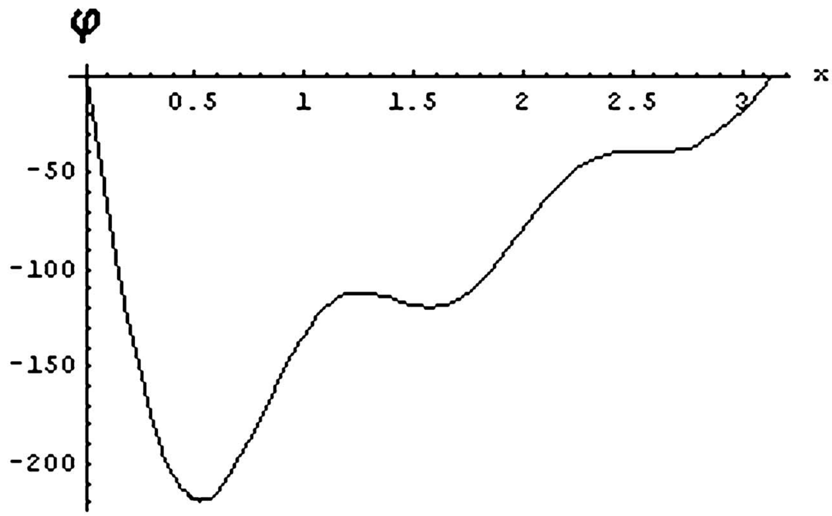

Рис. 1. $k = 1$; $X_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)$; $\varphi = (T - K)X_k$

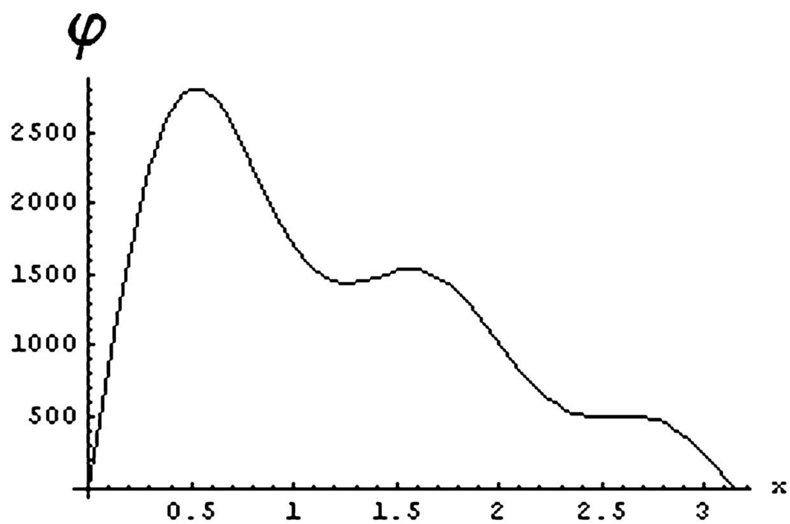

Рис. 2. $k = 2$; $X_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)$; $\varphi = (T - K)X_k$

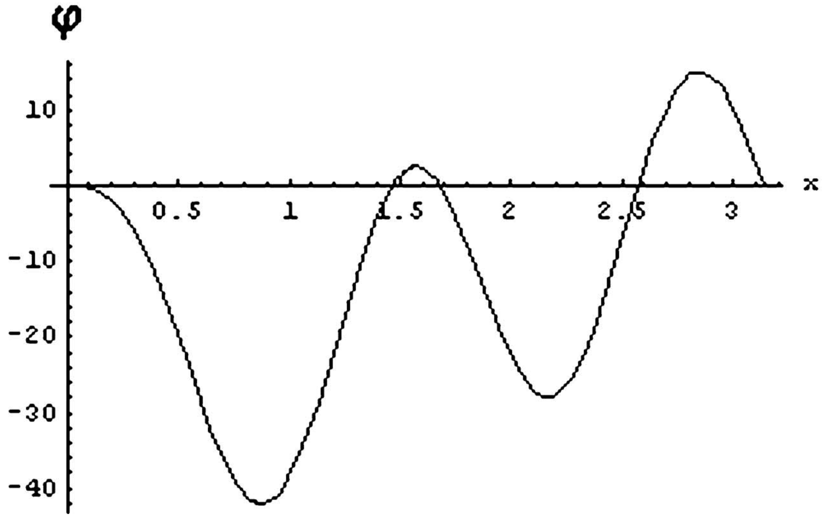

Рис. 3. $k = 5$; $\quad X_5(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(5x)$; $\varphi = (T - K)X_k$

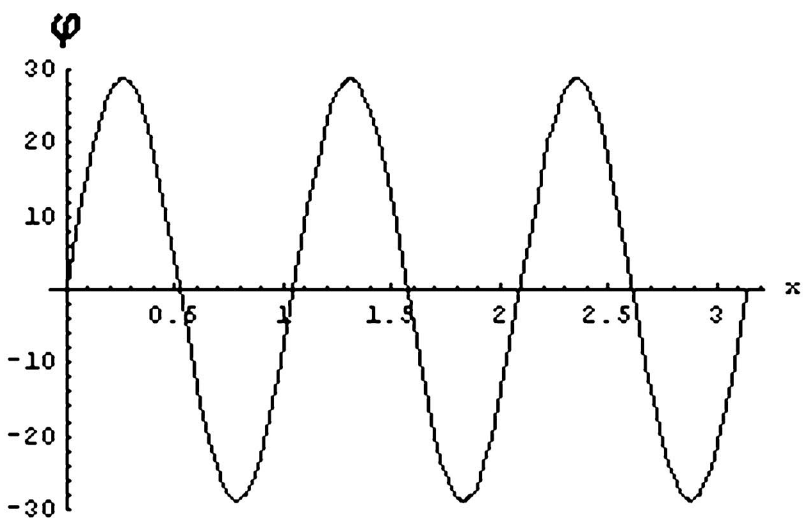

Рис. 4. $k = 6$; $\quad X_6(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(6x)$; $\varphi = (T - K)X_k$

функции в соответствии с теоремой 1.4. Дополнительно для данного примера вычислим $W-A$-детерминант по формуле (13)

$$\omega(\mu) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{k(\lambda_k - \mu)}.$$

Построим график $\omega(\mu)$ На графике четко видны полюса, соответствующие

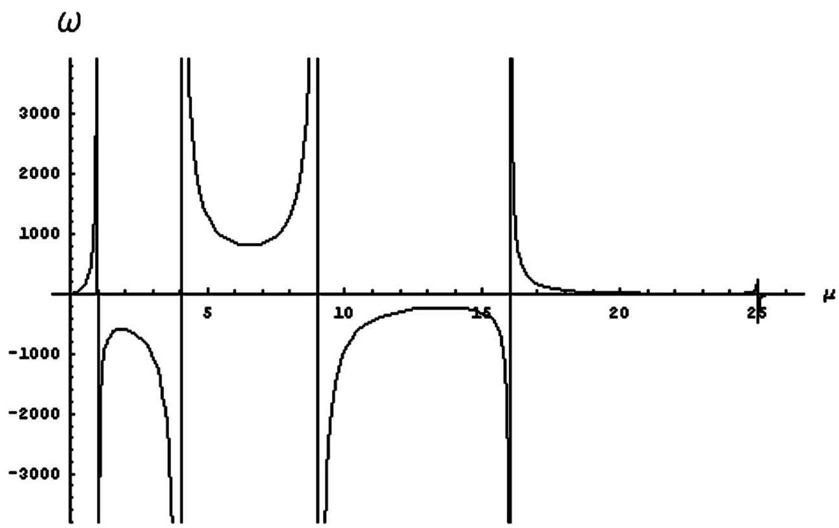

Рис. 5. $\omega = \omega(\mu)$.

удаленным из спектра первых пяти собственных значений.

2°. Из контекста теоремы 1.1 следует, что, возможно построить одноранговое возмущение K, которое переводит заданное подмножество Ω собственных значений оператора T в точку ноль, тогда существует один из возможных способов описания множества решений возмущенной задачи в следующей постановке

$$\lambda u = (T-K)u, \quad u(0) = u(l) = 0. \tag{26}$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.5. *Все собственные значения из* Ω *являются нулями функции* $SG(\lambda) = 1 - \int\limits_0^l b(\tau)\tilde{a}(\tau,\lambda)d\tau$, *где* $\tilde{a}(x,\lambda) = \int\limits_0^l G(x,\tau,\lambda)a(\tau)d\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Запишем её решение через функцию Грина

$$u(x) = \int_0^l G(x,s,\lambda)Ku(s)ds, \tag{27}$$

$$u(x) = \int_0^l G(x,s,\lambda)a(s)ds \int_0^l b(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{28}$$

$$u(x) = \tilde{a}(x,\lambda) \int_0^l b(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{29}$$

Обозначим $C = \int\limits_0^l b(\tau)u(\tau)d\tau$, получим тождество

$$C \equiv \int_0^l b(\tau)\tilde{a}(\tau,\lambda)C d\tau, \tag{30}$$

$$C\left(1 - \int_0^l b(\tau)\tilde{a}(\tau,\lambda)d\tau\right) = 0. \tag{31}$$

Таким образом, все собственные значения из Ω являются нулями функции $SG(\lambda) = 1 - \int\limits_0^l b(\tau)\tilde{a}(\tau,\lambda)d\tau$.

3°. Допустим, необходимо добавить к спектру колебаний струны следующее подмножество собственных значений $\Theta = \{5,\ 6,\ 7\}$. Для этого заменим подмножество $\Omega = \{1,\ 4,\ 9\}$ на Θ. Таким образом, $\kappa_1 = 5,\ \kappa_2 = 6, \kappa_3 = 7$, $\lambda_{l_1} = 1,\ \lambda_{l_2} = 4, \lambda_{l_3} = 9$.

Согласно теореме 1.4 построим одноранговое возмущение вида

$$Ku = a(x)\int_0^\pi u(s)b(s)ds,$$

где

$$a(x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}X_k(x),\quad b(x)=\sum_{k=1}^{3}\beta_k X_k(x),\ X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx),$$

$$\frac{1}{i}\beta_i=\frac{P\left(\lambda_{l_i}\right)}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{3}\left(\lambda_{l_i}-\lambda_{l_j}\right)},\quad i=\overline{1,3},$$

$$P(\mu)=(\mu-\kappa_1)(\mu-\kappa_2)(\mu-\kappa_3).$$

Тогда

$$(T-K)u=-\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\sin(kx)\right)\times$$

$$\times\left(-5\int_0^{\pi}u(s)\sin(s)ds+\frac{4}{5}\int_0^{\pi}u(s)\sin(2s)ds+\frac{9}{5}\int_0^{\pi}u(s)\sin(3s)ds\right).$$

С помощью пакета программ Mathematica v.4.1 были получены графики функций из образа оператора $Vu=(T-K)u$, где $T=-\frac{d^2}{dx^2}$, $u=X_{l_k}(x)$, $x\in[0,\pi]$. На данных графиках хорошо показано действие конечномерных возмущений на спектр оператора. На рис.6-11 видно, что построенные пары графики отличны друг от друга по амплитуде и форме, что соответствует изменению собственных значений оператора T заданным образом.

4°. Найдём решение следующей спектральной задачи

$$-u''-Ca(x)=\lambda u(x),\ u(0)=u(\pi)=0, \tag{32}$$

где

$$a(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\sin(kx),\ b(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{3}\frac{kP\left(\lambda_{l_k}\right)}{\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{3}\left(\lambda_{l_k}-\lambda_{l_j}\right)}\sin(kx),$$

$$P(\mu)=(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7),$$

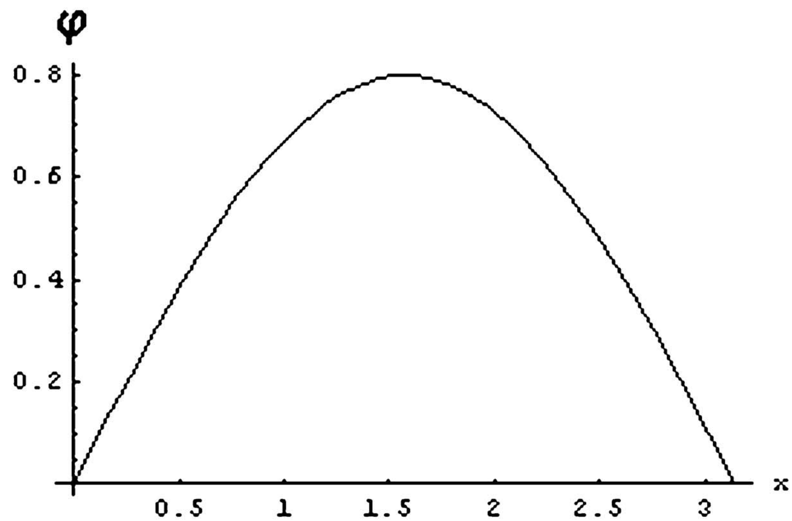

Рис. 6. $\varphi = TX_{l_1} = -\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)$

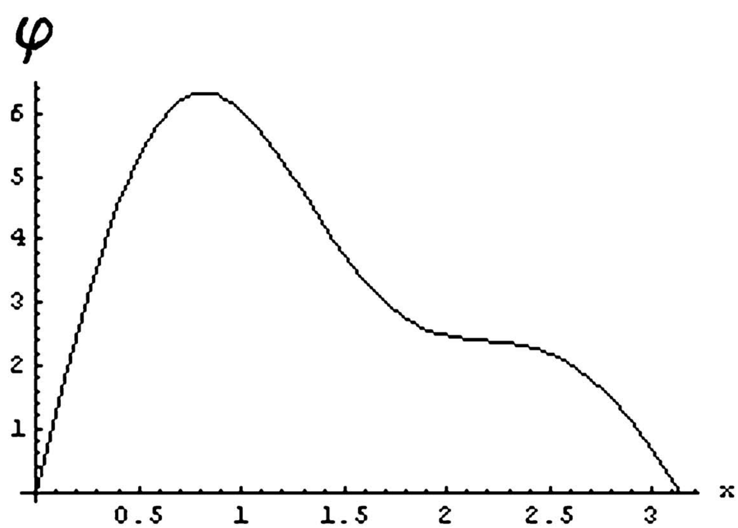

Рис. 7. $\varphi = (T-K)X_{l_1} = -\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x) + 5\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\right)$

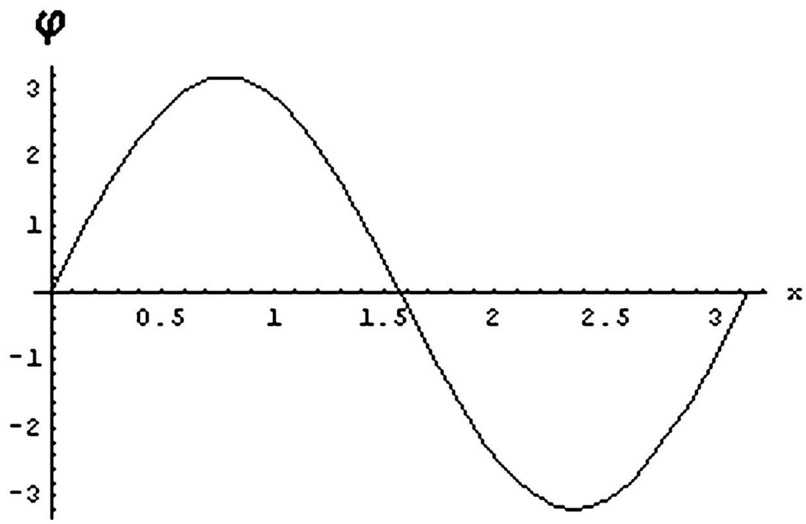

Рис. 8. $\varphi = TX_{l_2} = -\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)$

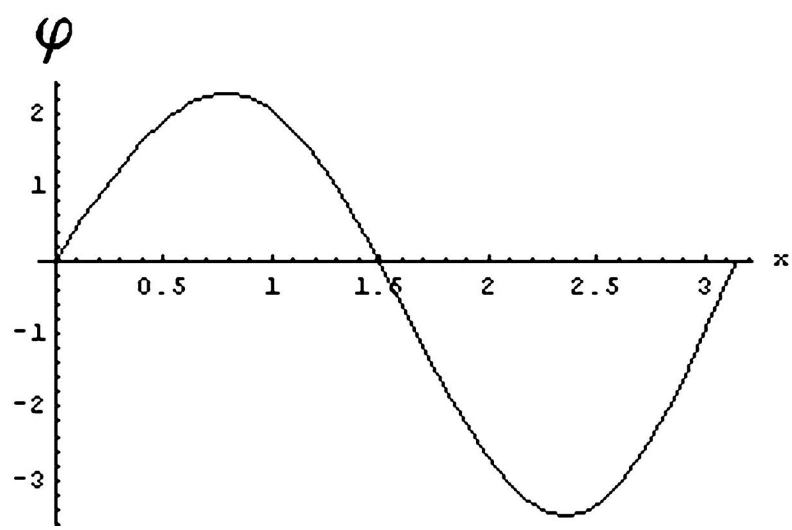

Рис. 9. $\varphi = (T-K)X_{l_2} = -\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x) - \frac{4}{5}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\right)$

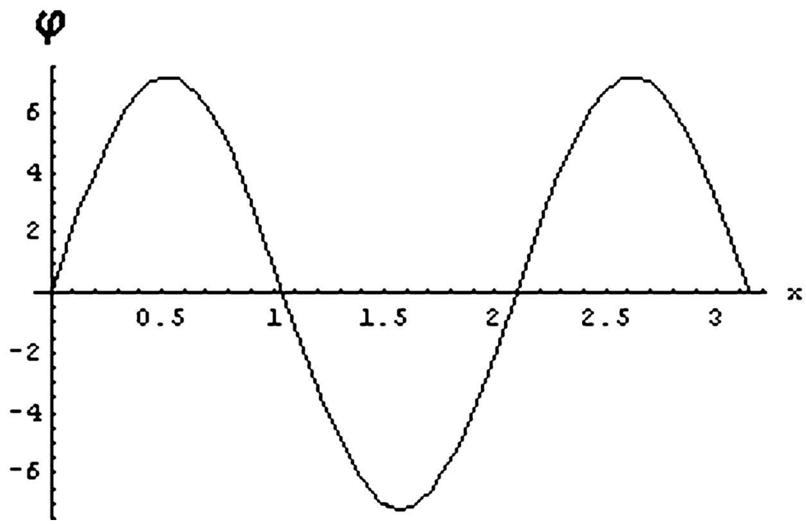

Рис. 10. $\varphi = TX_{l_3} = -\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)$

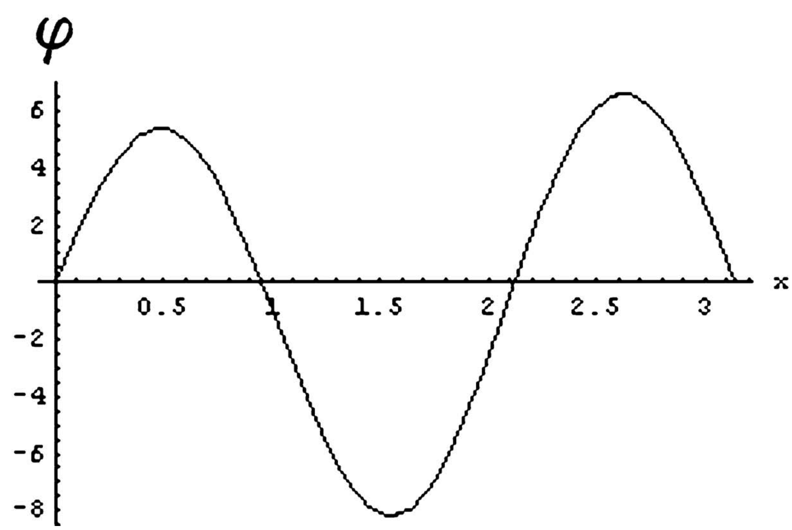

Рис. 11. $\varphi = (T-K)X_{l_3} = -\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x) - \frac{9}{5}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)\right).$

$$C = \int_0^\pi b(s)u(s)ds. \tag{33}$$

Запишем решение (32) в виде

$$u(x) = -\frac{C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(3(\lambda-9)(\lambda-1)\cos(x) + 2(\lambda-4)\left(2(\lambda-7)+(\lambda-1)\cos(2x)\right)\right)}{3(\lambda-9)(\lambda-4)(\lambda-1)} \times$$

$$\times \sin(x).$$

Подставив $u(x)$ в (33), получим уравнение

$$\frac{2(87+\lambda(2\lambda-29))}{(\lambda-9)(\lambda-4)(\lambda-1)} - 1 = 0,$$

его решения $\lambda = \{5, 6, 7\}$. Таким образом, мы убедились, что в точечном спектре оператора T присутствуют собственные значения из Θ.

Для каждого собственного значения из множества Θ можно найти собственную функцию. Подставив в (32) $\lambda \in \Theta$, определим следующие собственные функции

$$\lambda = 5,\ X_{\kappa_1} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left(-3\sin(x) - 6\sin(2x) + \sin(3x)\right),$$

$$\lambda = 6,\ X_{\kappa_2} = \frac{1}{90\sqrt{2\pi}}\left(-36\sin(x) - 45\sin(2x) + 20\sin(3x)\right),$$

$$\lambda = 7,\ X_{\kappa_3} = -\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\left(\sin(x) + \sin(2x) - \sin(3x)\right).$$

§5. Оценка нормы одноранговых возмущения.

1°. В работе [14] исследовано поведение нижней грани норм всех одноранговых возмущений, удаляющих из спектра нормального компактного оператора первые n собственных значений, при $n \to \infty$. В случае неограниченного самосопряжённого оператора T с чисто точечным простым спектром, доказанная выше, теорема 1.1 также даёт описание всех одноранговых возмущений $Ku = a\langle u, b\rangle$, изменяющих точечный спектр оператора T требуемым образом. Поэтому, следуя схеме работы [14], получим оценки нормы оператора $K : H \to H$. Заметим, что собственные значения нормального компактного оператора в случае их бесконечного числа стремятся к нулю. В нашем случае предельной точкой может выступить бесконечно удалённая точка, либо точка существенного спектра. Кроме того, представляет интерес поведение нормы одноранговых возмущения $K : \mathcal{D}(T) \to H$. Рассмотрим все эти случаи раздельно.

Рассмотрим случай $K : H \to H$. Из неравенства Коши-Буняковского и свойства б) в теореме 1.1 имеем

$$||K|| = ||a|| \cdot ||b|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|^2} \geqslant \sum_{i=1}^{m} |\nu_{k_i}\beta_{k_i}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{|P(\lambda_{k_i})|}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}\right|} = \gamma_m.$$

Приведём пример, показывающий, что величина γ_m может стремиться к бесконечности при $m \to \infty$. Возьмём $\lambda_{k_i} = i^{-1}$, $i = \overline{1, m}$. Таким образом, мы удаляем из спектра множество точек $\{\lambda_{k_i}\}_{i=1}^{m}$. Для этого случая многочлен

P имеет вид $P(\lambda) = \lambda^m$. Используя оценки для $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\frac{1}{i} - \frac{1}{j}| = \frac{i!(m-i)!}{i^{m-1}m!}$, полученную ниже, имеем

$$\gamma_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!i} \geqslant \frac{m!}{(m-1)!} = m.$$

Следовательно, $\gamma_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Осталось рассмотреть случай, когда предельной точкой собственных значений, удаляемых из спектра, является бесконечно удалённая точка. Опять оценим величину γ_m при $m \to \infty$. Возьмём $\lambda_{k_i} = i^2$, $i = \overline{1,m}$. Для удаляемых из спектра собственных значений $\{\lambda_{k_i}\}_{i=1}^{m}$ многочлен P возьмём в виде $P(\lambda) = \lambda^m$. Используя оценки для $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |i^2 - j^2| = \frac{(m-i)!(m+i)!}{2i^2}$, также полученную ниже (42), имеем

$$\gamma_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{2i^{2m+2}}{(m-i)!(m+i)!} \geqslant \frac{2m^{2m+2}}{(2m)!}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{2m^{2m+2}}{(2m)!} = \infty$, достаточно воспользоваться формулой Стирлинга для замены $(2m)!$. Таким образом, на примерах мы показали, что норма одорангового возмущения $K : H \to H$ может неограниченно расти при удалении из спектра оператора T бесконечно большого числа собственных значений, как в случае их сгущения в точке ноль, так и в случае их стремления к бесконечно удалённой точке. Поэтому, мы попробуем сузить область определения наших операторов с целью получения конечных оценок нормы оператора K и рассмотреть случаи, когда возможно достижение нашей цели.

Согласно теореме 1.1 рассмотрим одноранговое возмущение K для оператора T в следующем виде

$$Ku = a\langle u, b\rangle\,,\ a = \sum_{i=1}^{m} \nu_{k_i} X_{k_i},\ b = \sum_{i=1}^{m} \bar{\beta}_{k_i} X_{k_i}, \tag{34}$$

где m—число удаляемых собственных значений оператора T, X_{k_i}—соответствующие удаляемым собственным значениям собственные функции. Ещё раз необходимо отметить, что T—самосопряжённый оператор с простым чисто точечным спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий следующее спектральное разложение $Tu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, X_k \rangle X_k$.

Оператор T действует из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) = \left\{ u | u \in H, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 | \langle u, X_k \rangle |^2 < \infty \right\}$ в H. Выберем следующую норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 | \langle u, X_j \rangle |^2 \right)^{1/2}, \ \lambda_j \neq 0, \ j = \overline{1, \infty}. \tag{35}$$

Если в спектре оператора T имеется собственное значение $\lambda_k = 0$, тогда поменяем λ_1 и λ_k местами, получим $\lambda_1 = 0$, X_1—собственная функция, соответствующая нулевому собственному значению. В этом случае норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ запишем в виде

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\varepsilon^2 | \langle u, X_1 \rangle |^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |\lambda_j|^2 | \langle u, X_j \rangle |^2 \right)^{1/2}. \tag{36}$$

Здесь λ_1 заменили на малое значение $0 < \varepsilon < 1$. Норму (35) можно использовать, если оператор T обратим, иначе необходимо брать норму (36). Тогда имеет место

Теорема 1.6. *Пусть задано подмножество $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ удаляемых однократных собственных значений оператора T, конечное подмножество Θ добавляемых точек к спектру оператора T и норма* (36). *Пусть среди удаляемых собственных значений имеется $\lambda_{k_1} = 0$, $X_{k_1} = X_1$. Тогда имеет место следующая оценка нормы для возмущения* (34) *с условием,* *что* $\nu_{k_i} = 1$ *для всех* $i = \overline{1, m}$

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \frac{\sqrt{m}|P(0)|}{\varepsilon \prod\limits_{j=2}^{m} |\lambda_{k_j}|} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\sqrt{m}|P(\lambda_{k_i})|}{|\lambda_{k_i}| \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|},$$

где $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

Доказательство. Имеем для одорангового возмущения (34) следующую оценку нормы

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} = \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} \|Ku\|_H = \|a\|_H \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\langle u, b\rangle|, \qquad (37)$$

$$\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\langle u, b\rangle| = \sum_{i=1}^{m} |\beta_{k_i}| \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\langle u, X_{k_i}\rangle|.$$

Так как sup берётся по $\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant 1$, то согласно (36) имеем

$$\varepsilon^2 |\langle u, X_1\rangle|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\langle u, X_j\rangle|^2 \leqslant 1,$$

следовательно

$$|\langle u, X_j\rangle| \leqslant \frac{1}{|\lambda_j|},\ |\langle u, X_1\rangle| < \frac{1}{\varepsilon},\ j = \overline{2, \infty}.$$

Тогда $\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\langle u, X_{k_i}\rangle| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{k_i}|}$ для $i = \overline{2, m}$, $\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\langle u, X_{k_1}\rangle| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, следовательно $\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\langle u, b\rangle| \leqslant \frac{|\beta_{k_1}|}{\varepsilon} + \sum\limits_{i=2}^{m} |\beta_{k_i}| \frac{1}{|\lambda_{k_i}|}$. По свойствам нормы, имеем следующее равенство

$$\|a\|_H = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{i=1}^{m} \nu_{k_i} X_{k_i}, \sum_{i=1}^{m} \nu_{k_i} X_{k_i} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\nu_{k_i}|^2}. \qquad (38)$$

Из (37) следует

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \|a\|_H \left(\frac{|\beta_{k_1}|}{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{m} \frac{|\beta_{k_i}|}{|\lambda_{k_i}|} \right) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\nu_{k_i}|^2} \left(\frac{|\beta_{k_1}|}{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{m} \frac{|\beta_{k_i}|}{|\lambda_{k_i}|} \right).$$

Возьмём по условию теоремы $\nu_{k_i} = 1$ для всех $i = \overline{1,m}$, тогда, согласно теоремы 1.1 имеем

$$\beta_{k_i} = \frac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}.$$

Учитывая условие б) теоремы 1.1 получим

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \frac{\sqrt{m}|P(0)|}{\varepsilon \prod\limits_{j=2}^{m} |\lambda_{k_j}|} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\sqrt{m}|P(\lambda_{k_i})|}{|\lambda_{k_i}| \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|}. \tag{39}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если в условии теоремы в случае обратимого оператора T взять норму (35), то в неравенстве (39) исчезнет первое слагаемое. Получим следующую оценку нормы

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{m}|P(\lambda_{k_i})|}{|\lambda_{k_i}| \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|}. \tag{40}$$

Обозначим $\theta_m = \inf \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{m}|P(\lambda_{k_i})|}{|\lambda_{k_i}| \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|}$, где inf берётся по всем многочленам $P(\lambda)$ степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которых совпадают со значениями из Θ. Взяв $P(\lambda) = \lambda^m$ и учитывая неравенство $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$, получим оценку сверху

$$\theta_m \leqslant \tau_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{m}|\lambda_{k_i}|^{m-1}}{\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} \big||\lambda_{k_i}| - |\lambda_{k_j}|\big|}. \tag{41}$$

2°. Исследуем поведение данной оценки нормы при удалении большого числа собственных значений. В качестве примера возьмём $\lambda_{k_i} = i^2$, тогда область определения оператора T запишем в следующем виде $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) =$

$\left\{ u | u \in H, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 |\langle u, X_k \rangle|^2 < \infty \right\}$. Вычислим величину знаменателя оценки нормы $\prod\limits_{j=1, i \neq j}^{m} \big| |\lambda_{k_i}| - |\lambda_{k_j}| \big|$, т.е. $\prod\limits_{j=1, i \neq j}^{m} |i^2 - j^2|$. Запишем $\prod\limits_{j=1, i \neq j}^{m} |i^2 - j^2|$ в виде произведения

$$\prod_{j=1}^{i-1} (i^2 - j^2) \prod_{j=i+1}^{m} (j^2 - i^2) = \prod_{j=1}^{i-1} (i - j) \prod_{j=1}^{i-1} (i + j) \prod_{j=i+1}^{m} (j - i) \prod_{j=i+1}^{m} (j + i).$$

Вычислим каждый из сомножителей

$$\prod_{j=1}^{i-1} (i - j) = (i - i + 1)(i - i + 2) \ldots (i - 1) = (i - 1)!,$$

$$\prod_{j=1}^{i-1} (i + j) = (i + 1)(i + 2) \ldots (2i - 1) = \frac{(2i - 1)!}{i!},$$

$$\prod_{j=i+1}^{m} (j - i) = (i + 1 - i)(i + 2 - i) \ldots (m - i) = (m - i)!,$$

$$\prod_{j=i+1}^{m} (j + i) = (i + 1 + i)(i + 2 + i) \ldots (m + i) = \frac{(m + i)!}{(2i)!},$$

следовательно

$$\prod_{j=1, i \neq j}^{m} |i^2 - j^2| = \frac{(m - i)!(m + i)!}{2i^2}. \tag{42}$$

Для функций из области определения $\mathcal{D}(T)$ в качестве нормы выберем

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{2m} m^{2m+6} |\langle u, X_j \rangle|^2 \right)^{1/2}. \tag{43}$$

Проведя новые выкладки согласно формулам (37)-(43), получим новую оценку нормы возмущения $\|K\|$

$$\|K\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{m} i^{2m}}{\sqrt{e^{2m} m^{2m+6}} \prod\limits_{j=1, i \neq j}^{m} |i^2 - j^2|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{2 i^{2m+2}}{e^m m^{m+5/2} (m - i)!(m + i)!} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{2m^{m-1/2}}{e^m m!} = \frac{2m^{m+1/2}}{e^m m!}.$$

Для замены факториала воспользуемся формулой Стирлинга $m! \approx \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$. Таким образом, получили

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2m^{m+1/2}}{e^m m!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{44}$$

Данный результат важен по той причине, что, выбрав определённым образом норму для функций из области определения оператора T, значение оценки нормы однорангового возмущения K при неограниченном увеличении количества выводимых из спектра собственных значений не стремиться к бесконечности.

3°. Необходимо отметить, что собственное значение оператора T не обязано быть изолированной точкой конечной кратности. Рассмотрим ситуацию, когда множество удаляемых собственных значений группируется вокруг некоторой предельной точки k существенного спектра оператора T. В качестве примера возьмём $\lambda_{k_i} = k + \frac{1}{i^2}$ и оценим величину знаменателя $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} \left||\lambda_{k_i}| - |\lambda_{k_j}|\right|$, т.е. $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}|$. Запишем $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}|$ в виде произведения

$$\prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2}\right) \prod_{j=i+1}^{m} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right) = \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{i}\right) \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{i}\right) \prod_{j=i+1}^{m} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right) \times$$

$$\times \prod_{j=i+1}^{m} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right).$$

Вычислим каждый из сомножителей

$$\prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{i}\right) = \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\right) \left(\frac{1}{i-2} - \frac{1}{i}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \left(\frac{1}{i}\right)^{i-1},$$

$$\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{i}\right)=\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{i}\right)\dots\left(\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i}\right)=\frac{(2i-1)!}{i^i(i-1)!^2},$$

$$\prod_{j=i+1}^{m}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{j}\right)=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+2}\right)\dots\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{m}\right)=\frac{i!(m-i)!}{i^{m-i}m!},$$

$$\prod_{j=i+1}^{m}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}\right)\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+2}\right)\dots\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{m}\right)=\frac{(m+i)!}{i^{m-i}2^j(2i-1)!!m!},$$

следовательно

$$\prod_{j=1,i\neq j}^{m}\left|\frac{1}{i^2}-\frac{1}{j^2}\right|=\frac{(m-i)!(m+i)!}{2i^{2m-2}m!^2}. \tag{45}$$

Для функций из области определения $\mathcal{D}(T)$ в качестве нормы выберем

$$\|u\|_{\mathcal{D}}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}m!^2m^{4m-1}(k+1)^{2m}|\left\langle u,X_j\right\rangle|^2\right)^{1/2}. \tag{46}$$

Проведя новые выкладки согласно формулам (37)-(43), получим новую оценку нормы возмущения $\|K\|$

$$\|K\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{m}\left(k+\frac{1}{i^2}\right)^m}{\sqrt{m!^2m^{4m-1}(k+1)^{2m}}\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{m}\left|\frac{1}{i^2}-\frac{1}{j^2}\right|}=\sum_{i=1}^{m}\frac{2m!}{m(m-i)!(m+i)!}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{2}{m}=2.$$

4°. Имеется следующая теорема [13, с. 38], дающая оценку точности определения минимального по рангу возмущения, являющегося решением задачи

$$\operatorname{rang}K\to\min,\ \Omega\subset P(T-K), \tag{47}$$

где $P(V)$—резольвентное множество оператора V.

Т е о р е м а 1.7. *Пусть Ω—замкнутое подмножество комплексной плоскости и T—ограниченный оператор, определённый на всем пространстве*

X, либо Ω—компактное подмножество и T—замкнутый оператор. Пусть, далее, K—решение задачи (47). *Тогда всякий конечномерный оператор $\tilde{K}$, удовлетворяющий условиям $\operatorname{rang}\tilde{K} = \operatorname{rang} K$, $\|K-\tilde{K}\| < \min\limits_{\lambda\in\Omega} \|R(\lambda; T-K)\|^{-1}$, где $R(\lambda; A) = (A-\lambda I)^{-1}$, также будет решением задачи* (47).

Возникает задача определения численной оценки величины $\|K - \tilde{K}\|$, так как на практике численное решение задач на собственные значения сопровождается определённой погрешностью. Таким образом, с какой точностью необходимо вычислять собственные значения и функции, чтобы построенное с их использованием конечномерное возмущение приводило к заданному изменению точечного спектра возмущаемого оператора.

В качестве возмущаемого рассматривается самосопряженный оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий спектральное разложение $Tu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, X_k\rangle X_k$, $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1,\infty}$. Пусть имеется одноранговое возмущение вида $Ku = a\langle u, b\rangle$ для которого выполнено соотношение $\sigma_p(T-K) = \{0\} \cup (\sigma_p(T)\setminus\Omega)$, где $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$—заданное подмножество однократных собственных значений самосопряженного оператора T. Сформулируем и докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1.8. *Всякий одноранговый оператор $\tilde{K}$, удовлетворяющий условию*

$$||K-\tilde{K}|| < \min_{k=\overline{1,m}} \left(\frac{1}{\nu_{l_k}^2} \sum_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \left(\left|\frac{\nu_{l_k}}{\lambda_i - \lambda_{l_k}}\right|^2 + \left|\frac{\nu_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}}\right|^2 + \frac{2|\nu_{l_k}||\nu_i|}{|\lambda_i - \lambda_{l_k}|^2} \right) + \right.$$

$$+ \left(\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\right| + \left|\frac{1}{\beta_{l_k}} \sum_{i=1, i\notin\Lambda}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}}\right| + \left|\frac{1}{\beta_{l_k}} \sum_{i=1, l_i\in\Lambda, i\neq k}^{m} \frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}}\right| + \qquad (48)$$

$$+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|\Bigg)^2\Bigg)^{-1/2}$$

также будет вносить в точечный спектр возмущаемого оператора необходимые изменения, а именно $\sigma_p(T-\tilde{K})=\{0\}\cup(\sigma_p(T)\setminus\Omega)$.

Доказательство.

Для того чтобы воспользоваться теоремой 1.7, достаточно проверить, что $\min\limits_{\lambda\in\Omega}\|R(\lambda;T-K)\|^{-1}$ не меньше правой части неравенства (48). Резольвента $R(\lambda;T-K)$ даёт зависимость решения и уравнения

$$Tu-Ku-\lambda u=f \tag{49}$$

от правой части f. Воспользуемся разложениями по собственным функциям оператора T:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_kX_k,\ f=\sum_{k=1}^{\infty}f_kX_k,\ Tu=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\gamma_jX_j,$$

$$Ku=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\nu_jX_j\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\beta_k\right).$$

Запишем (49) в виде системы линейных алгебраических уравнений, используя разложения в виде рядов

$$\lambda_i\gamma_i-\nu_i\Delta-\lambda\gamma_i=f_i,\ i=1,2,\ldots,\ \Delta=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\beta_k. \tag{50}$$

Возьмём в качестве $\lambda\in\Omega$ некоторое λ_{l_k}, где $k=\overline{1,m}$, подставим его в систему и решим её относительно γ_i. Для всех индексов $i\neq l_k$ получим следующее решение системы линейных уравнений относительно γ_i

$$\gamma_i=\frac{f_i+\nu_i\Delta}{\lambda_i-\lambda_{l_k}},\ i=1,2,\ldots \tag{51}$$

Для определения γ_{l_k} используем следующее уравнение из системы (50), т.е. случай $i = l_k$

$$\Delta = -\frac{f_{l_k}}{\nu_{l_k}}. \tag{52}$$

Подставим (51) в выражение для Δ в (50) и, учитывая (52), имеем

$$-\frac{f_{l_k}}{\nu_{l_k}} = \sum_{i=1, i\notin\Lambda}^{\infty} \frac{f_i\beta_i + \nu_i\beta_i\Delta}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} + \gamma_{l_k}\beta_{l_k} + \sum_{i=1, l_i\in\Lambda, i\neq k}^{m} \frac{f_{l_i}\beta_{l_i} - \frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}f_{l_k}}{\nu_{l_k}}}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}}. \tag{53}$$

Используя свойство а) теоремы 1.1 выразим γ_{l_k}

$$\gamma_{l_k} = -\frac{f_{l_k}}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}} - \frac{1}{\beta_{l_k}} \sum_{i=1, i\notin\Lambda}^{\infty} \frac{f_i\beta_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} - \frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}} \sum_{i=1, l_i\in\Lambda, i\neq k}^{m} \frac{f_{l_i}\nu_{l_k}\beta_{l_i} - f_{l_k}\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}}.$$

Итак

$$u = \frac{1}{\nu_{l_k}} \sum_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \frac{f_i\nu_{l_k} - f_{l_k}\nu_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} X_i + \gamma_{l_k} X_{l_k},$$

тогда

$$\|R(\lambda_{l_k}; T-K)\| = \sup_{\|f\|_H\leqslant 1} \|R(\lambda_{l_k}; T-K)f\|_H = \sup_{\|f\|_H\leqslant 1} \|u\|_H.$$

Согласно свойствам нормы получим следующую оценку

$$\|f\|_H = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} f_j X_j, \sum_{j=1}^{\infty} f_j X_j \right\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2},$$

если $\|f\|_H \leqslant 1$, тогда $|f_i| \leqslant 1$, далее

$$\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\frac{1}{\nu_{l_k}^2} \sum_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \left| \frac{f_i\nu_{l_k} - f_{l_k}\nu_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} \right|^2 + |\gamma_{l_k}|^2}.$$

Получим оценку

$$\sup_{\|f\|_H\leqslant 1} \|u\|_H = \sup_{\|f\|_H\leqslant 1} \sqrt{\frac{1}{\nu_{l_k}^2} \sum_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \left| \frac{f_i\nu_{l_k} - f_{l_k}\nu_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} \right|^2 + |\gamma_{l_k}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{\nu_{l_k}^2}\sum_{i=1,i\neq l_k}^{\infty}\left(\left|\frac{f_i\nu_{l_k}}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\left|\frac{f_{l_k}\nu_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\frac{2|f_i\nu_{l_k}||f_{l_k}\nu_i|}{|\lambda_i-\lambda_{l_k}|^2}\right)+|\gamma_{l_k}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{\nu_{l_k}^2}\sum_{i=1,i\neq l_k}^{\infty}\left(\left|\frac{\nu_{l_k}}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\left|\frac{\nu_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\frac{2|\nu_{l_k}||\nu_i|}{|\lambda_i-\lambda_{l_k}|^2}\right)+|\gamma_{l_k}|^2}.$$

Отдельно получим оценку сверху для $|\gamma_{l_k}|$:

$$|\gamma_{l_k}| \leqslant \left|\frac{f_{l_k}}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\right| + \left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,i\notin\Lambda}^{\infty}\frac{f_i\beta_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right| + \left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{f_{l_i}\nu_{l_k}\beta_{l_i}-f_{l_k}\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|.$$

Третье слагаемое в этом неравенстве оценим сверху следующим образом

$$\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{f_{l_i}\nu_{l_k}\beta_{l_i}-f_{l_k}\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{f_{l_i}\nu_{l_k}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{f_{l_k}\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|.$$

Учитывая, что $\|f\|_H \leqslant 1$, тогда $|f_{l_i}| \leqslant 1$, следовательно

$$\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{f_{l_i}\nu_{l_k}\beta_{l_i}-f_{l_k}\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|.$$

Имеет место следующая оценка

$$|\gamma_{l_k}| \leqslant \left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\right| + \left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,i\notin\Lambda}^{\infty}\frac{\beta_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right| + \left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|.$$

Итак
$$\sup_{\|f\|_H\leqslant 1}\|u\|_H \leqslant \left(\frac{1}{\nu_{l_k}^2}\sum_{i=1,i\neq l_k}^{\infty}\left(\left|\frac{\nu_{l_k}}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\left|\frac{\nu_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\frac{2|\nu_{l_k}||\nu_i|}{|\lambda_i-\lambda_{l_k}|^2}\right)+\right.$$
$$+\left(\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\right|+\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,i\notin\Lambda}^{\infty}\frac{\beta_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|+\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|+\right.$$
$$\left.\left.+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|\right)^2\right)^{1/2}.$$
Таким образом,
$$\min_{\lambda\in\Omega}\|R(\lambda;T-K)\|\leqslant \tag{54}$$
$$\leqslant\min_{k=\overline{1,m}}\left(\frac{1}{\nu_{l_k}^2}\sum_{i=1,i\neq l_k}^{\infty}\left(\left|\frac{\nu_{l_k}}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\left|\frac{\nu_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|^2+\frac{2|\nu_{l_k}||\nu_i|}{|\lambda_i-\lambda_{l_k}|^2}\right)+\right.$$
$$+\left(\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\right|+\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,i\notin\Lambda}^{\infty}\frac{\beta_i}{\lambda_i-\lambda_{l_k}}\right|+\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|+\right.$$
$$\left.\left.+\left|\frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|\right)^2\right)^{1/2},$$
следовательно
$$\min_{\lambda\in\Omega}\|R(\lambda;T-K)\|^{-1}\geqslant \text{правая часть неравенства (48)},$$
и применение теоремы 1.7, доказывает утверждение.

С л е д с т в и е. Возьмем в качестве K возмущение типа (34), где возьмём $m=3$, $\nu_{k_i}=1$ для всех $i=\overline{1,3}$, тогда, согласно формулировке теоремы 1.1 имеем
$$\beta_{k_i}=\frac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{3}(\lambda_{k_i}-\lambda_{k_j})},$$

где $\lambda_i = i^2,\ \lambda_{k_1} = a^2,\ \lambda_{k_2} = (a+1)^2,\ \lambda_{k_3} = (a+2)^2,\ \Omega = \{a^2, (a+1)^2, (a+2)^2\}$, $P(\lambda) = \lambda^3$. Таким образом, получим

$$\beta_{k_1} = \frac{a^6}{(a^2-(a+1)^2)(a^2-(a+2)^2)},$$

$$\beta_{k_2} = \frac{(a+1)^6}{((a+1)^2-a^2)((a+1)^2-(a+2)^2)},$$

$$\beta_{k_3} = \frac{(a+2)^6}{((a+2)^2-a^2)((a+2)^2-(a+1)^2)}.$$

Определим значение правой части неравенства (54), учитывая равенство индексов, т.е. $l_1 = k_1, l_2 = k_2, l_3 = k_3$. Выполнив подстановки для $k = 1$, имеем

$$M_1 = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{a-1}\left(\frac{1}{a^2-i^2}\right)^2 + \sum\limits_{i=a+1}^{\infty}\left(\frac{1}{i^2-a^2}\right)^2 + 3\sum\limits_{i=a+1}^{a+2}\left(\frac{1}{i^2-a^2}\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{\beta_{l_1}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_1}}\left(\frac{\beta_{l_2}}{(a+1)^2-a^2} + \frac{\beta_{l_3}}{(a+2)^2-a^2}\right)\right|\right)^2\right)^{1/2}},$$

для $k = 2$

$$M_2 = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{a}\left(\frac{1}{(a+1)^2-i^2}\right)^2 + \sum\limits_{i=a+2}^{\infty}\left(\frac{1}{i^2-(a+1)^2}\right)^2 + 3\sum\limits_{i=a, i\neq a+1}^{a+2}\left(\frac{1}{i^2-(a+1)^2}\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{\beta_{l_2}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_2}}\left(\frac{\beta_{l_1}}{a^2-(a+1)^2} + \frac{\beta_{l_3}}{(a+2)^2-(a+1)^2}\right)\right|\right)^2\right)^{1/2}},$$

для $k = 3$

$$M_3 = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{a+1}\left(\frac{1}{(a+2)^2-i^2}\right)^2 + \sum\limits_{i=a+3}^{\infty}\left(\frac{1}{i^2-(a+2)^2}\right)^2 + 3\sum\limits_{i=a}^{a+1}\left(\frac{1}{i^2-(a+2)^2}\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{\beta_{l_3}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_3}}\left(\frac{\beta_{l_1}}{a^2-(a+2)^2} + \frac{\beta_{l_2}}{(a+1)^2-(a+2)^2}\right)\right|\right)^2\right)^{1/2}}.$$

Используя компьютерную программу Mathematica, вычислим приближённо суммы и получим следующие результаты для $a = 3$

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{65491}{1016064} + \frac{\pi^2}{108} + \left(\left|\frac{1}{\beta_{l_1}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_1}}\left(\frac{\beta_{l_2}}{7} + \frac{\beta_{l_3}}{16}\right)\right|\right)^2}} \approx 0.99546,$$

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{517927}{5419008} + \frac{\pi^2}{192} + \left(\left|\frac{1}{\beta_{l_2}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_2}}\left(-\frac{\beta_{l_1}}{7} + \frac{\beta_{l_3}}{9}\right)\right|\right)^2}} \approx 1.90729,$$

$$M_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{205873}{4320000} + \frac{\pi^2}{300} + \left(\left|\frac{1}{\beta_{l_3}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_3}}\left(-\frac{\beta_{l_1}}{16} - \frac{\beta_{l_2}}{9}\right)\right|\right)^2}} \approx 3.18232.$$

Определим более точно, как будет выглядеть оператор $\tilde{K}$. Допустим, решение спектральной задачи известно с некоторой точностью. Таким образом, построенное одноранговое возмущение $\tilde{K}$ будет несколько отличаться от идеального K.

Т е о р е м а 1.9. *Пусть выполняются все условия предыдущей теоремы, Ω содержит только m положительных однократных собственных значений. Пусть имеется пара одноранговых возмущений K и $\tilde{K}$, определяющихся следующим образом $Ku = a\langle u, b\rangle$, где $a = \sum\limits_{j=1}^{m} X_{l_j}$, $b = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\beta}_{l_j} X_{l_j}$, $\beta_{l_i} = \frac{P\left(\lambda_{l_i}\right)}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m}\left(\lambda_{l_i} - \lambda_{l_j}\right)}$, $i = \overline{1,m}$, $\tilde{K}u = \tilde{a}\langle u, \tilde{b}\rangle$, где $\tilde{a} = \sum\limits_{j=1}^{m} X_{l_j}$, $\tilde{b} = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\tilde{\beta}}_{l_j} X_{l_j}$, $\tilde{\beta}_{l_i} = \frac{P\left(\tilde{\lambda}_{l_i}\right)}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m}\left(\tilde{\lambda}_{l_i} - \tilde{\lambda}_{l_j}\right)}$, $i = \overline{1,m}$, где $P(\mu)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество $\sigma_p(T) \setminus \Omega$, дополненное нулём, $\tilde{\lambda}_{l_j} = \lambda_{l_j} + \varepsilon$.*
Если

$$M = \min_{k=\overline{1,m}} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda_i - \lambda_{l_k}}\right|^2 + 3\sum\limits_{i=1, l_i\neq l_k}^{m} \left|\frac{1}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}}\right|^2 + \right.}$$

$$\frac{1}{+\left(\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\right|+2\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\sum_{i=1,l_i\in\Lambda,i\neq k}^{m}\frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i}-\lambda_{l_k}}\right|\right)^2\Bigg)^{1/2}}$$

и $||K-\tilde{K}||<M$, *тогда*

$$\varepsilon\leqslant\frac{M}{m\sqrt{m}\left|\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\lambda_{l_j}^{m-1}}{\prod\limits_{i=1,j\neq i}^{m}\left|\lambda_{l_j}-\lambda_{l_i}\right|}\right|}.$$

Доказательство.

Согласно свойствам нормы

$$\big|||\tilde{K}||-||K||\big|\leqslant||K-\tilde{K}||,$$

известно также, что

$$||K||=\sup_{\|u\|_H\leqslant1}\|Ku\|_H=\|a\|_H\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,b\right\rangle|,$$

аналогично

$$||\tilde{K}||=\sup_{\|u\|_H\leqslant1}\|\tilde{K}u\|_H=\|\tilde{a}\|_H\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,\tilde{b}\right\rangle|,$$

$$\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,b\right\rangle|=\sum_{j=1}^{m}|\beta_{l_j}|\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,X_{l_j}\right\rangle|,$$

$$\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,\tilde{b}\right\rangle|=\sum_{j=1}^{m}|\tilde{\beta}_{l_j}|\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,X_{l_j}\right\rangle|,$$

$$\|a\|_H=\sqrt{\langle a,a\rangle}=\sqrt{m},\ \|\tilde{a}\|_H=\sqrt{\langle\tilde{a},\tilde{a}\rangle}=\sqrt{m}.$$

Таким образом,

$$||K-\tilde{K}||\geqslant\sqrt{m}\left|\sum_{j=1}^{m}\sup_{\|u\|_H\leqslant1}|\left\langle u,X_{l_j}\right\rangle|\left(|\tilde{\beta}_{l_j}|-|\beta_{l_j}|\right)\right|.$$

Далее, используя условия данной теоремы, имеем

$$|\tilde{\beta}_{l_j}| - |\beta_{l_j}| = \frac{|P\left(\tilde{\lambda}_{l_j}\right)|}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\tilde{\lambda}_{l_j} - \tilde{\lambda}_{l_i}\right|} - \frac{|P\left(\lambda_{l_j}\right)|}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|},$$

возьмём $P(\mu) = \mu^m$, $\tilde{\lambda}_{l_j} = \lambda_{l_j} + \varepsilon$, тогда

$$|\tilde{\beta}_{l_j}| - |\beta_{l_j}| = \frac{(\lambda_{l_j} + \varepsilon)^m}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|} - \frac{\lambda_{l_j}^m}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|} =$$

$$= \frac{(\lambda_{l_j} + \varepsilon - \lambda_{l_j})((\lambda_{l_j} + \varepsilon)^{m-1} + \lambda_{l_j}(\lambda_{l_j} + \varepsilon)^{m-2} + \dots + \lambda_{l_j}^{m-1})}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon m \lambda_{l_j}^{m-1}}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|},$$

таким образом

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \left(|\tilde{\beta}_{l_j}| - |\beta_{l_j}|\right)\right| \geqslant \left|\sum_{j=1}^{m} \frac{m\varepsilon \lambda_{l_j}^{m-1}}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|}\right|.$$

Итак

$$||K - \tilde{K}|| \geqslant m\varepsilon\sqrt{m} \left|\sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_{l_j}^{m-1} \sup_{\|u\|_H \leqslant 1} |\left\langle u, X_{l_j}\right\rangle|}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|}\right|.$$

Используя результат теоремы 1.8 для оценки $||K - \tilde{K}||$, получим

$$\varepsilon \leqslant \frac{||K - \tilde{K}||}{m\sqrt{m} \left|\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_{l_j}^{m-1} \sup_{\|u\|_H \leqslant 1} |\left\langle u, X_{l_j}\right\rangle|}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|}\right|} \leqslant \frac{M}{m\sqrt{m} \left|\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_{l_j}^{m-1} \sup_{\|u\|_H \leqslant 1} |\left\langle u, X_{l_j}\right\rangle|}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|}\right|}.$$

Так как функции X_j ортонормированны, следовательно $\sup_{\|u\|_H \leqslant 1} |\left\langle u, X_{l_j} \right\rangle| \leqslant 1$. Окончательно имеем

$$\varepsilon \leqslant \frac{M}{m\sqrt{m}\left|\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_{l_j}^{m-1}}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|}\right|}.$$

Теорема доказана.

Итак, мы доказали две теоремы, позволяющие оценить точность построения конечномерных возмущений для удаления из точечного спектра возмущаемых операторов заданного подмножества собственных значений. Эти результаты полезны для решения практических задач, т.к. обычно на практике собственные значения и функции вычисляются с некоторой погрешностью.

§6. Задача Трикоми.

1°. В работе [32] рассматривалась задача Трикоми для следующего уравнения с вырождением порядка и типа:

$$|y|^{m+1}u_{xx} + yu_{yy} + qu_y - \mu^2|y|^{m+1}u = 0 \text{ в } D_+ \cup D_-, \tag{55}$$

$$u|_{\gamma\cup\gamma_1} = \varphi, \tag{56}$$

$q < 1, m$—действительное число, причём $u \in C^0(\overline{D_+ \cup D_-}) \cap C^2(D_+) \cap C^2(D_-)$ и

$$\lim_{y\to+0} y^q u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^q u_y, \tag{57}$$

где D_+—область в верхней полуплоскости, ограниченная кривой γ и сегментом $[0,1]$ оси Ox, а D_- — область в нижней полуплоскости, ограниченная характеристикой $\gamma_1 = \left\{(x,y) : x = \frac{2(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, характеристикой $\gamma_2 = \left\{(x,y) : 1 - x = \frac{2(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}, \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$ и сегментом $[0,1]$ оси Ox.

Доказывается единственность решения указанной задачи при определённых значениях параметров q и μ, построено решение в виде биортогонального ряда, выписаны собственные значения и собственные функции задачи (55)-(57) и выписано решение некоторого аналога задачи Трикоми в трёхмерном случае с помощью рядов.

Спектр λ_{nk} определяется из уравнения $J_{\beta+n+1/2}(\sqrt{\lambda_{nk}}) = 0,\ n, k = 0, 1, 2, \ldots,$ где $J_n(z)$—функция Бесселя, $\beta = \frac{1-q}{2(m+2)}$. Собственные функции имеют вид:

$$U_{nk}(r,\theta) = \pi r^{2\beta-1/2} J_{\beta+n+1/2}(\sqrt{\lambda_{nk}}r) \frac{\Gamma(3\beta+n+1)}{\Gamma(n-\beta+1)} \frac{\exp(2i\beta\pi)}{2\sin\pi(\pi-\beta)} \times$$

$$\times P_{\beta+n}^{-2\beta}(-cos\theta). \tag{58}$$

Система (58) полна в $L^2(D_+)$. Получаем, что $\sqrt{\lambda_{nk}} = \mu_{nk}$—положительные нули функции Бесселя $J_{\beta+n+1/2}(\sqrt{\lambda_{nk}})$. Собственные значения имеют вид $\lambda_{nk} = \mu_{nk}^2$.

Воспользуемся следующим спектральным разложением для оператора

$$Tu = |y|^{-m}u_{yy} + |y|^{-m-1}qu_y \tag{59}$$

в виде ряда:

$$Tu = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{nk}^2 \langle u, U_{nk}\rangle U_{nk} \tag{60}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(T) = \left\{u|u \in L^2(D_+), \quad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{nk}^4 |\langle u, U_{nk}\rangle|^2\right\}. \tag{61}$$

Построим возмущение K, для которого выполнено соотношение

$$\sigma_p(T-K) = \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega), \tag{62}$$

где подмножество Ω состоит из удаляемых собственных значений. Так как собственные значения однократны, то для рассматриваемой задачи имеет место следующая

Т е о р е м а 1.10. *Пусть T—дифференциальный оператор вида* (59) *с областью определения* (61). *Для того чтобы перевести заданное подмножество собственных значений $\Omega = \{\mu^2_{n_{l_1}k_{l_1}}, \ldots, \mu^2_{n_{l_m}k_{l_m}}\}$ в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ с помощью однорангового возмущения вида* (3), *где*

$$a = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\nu_{rj}U_{rj}, b = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{\beta}_{rj}U_{rj},$$

здесь $\{\nu_{nk}\}_{n=0,k=0}^{\infty}$, $\{\beta_{nk}\}_{n=0,k=0}^{\infty}$*–две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, необходимо и достаточно, чтобы последовательности* (63) *удовлетворяли следующим условиям:* (63)

а) $\nu_{rj}\beta_{rj}=0$ *для индексов* rj*, не принадлежащих множеству*

$\Lambda=\{n_{l_1}k_{l_1},\ldots,n_{l_m}k_{l_m}\}$;

б) $\nu_{n_{l_i}k_{l_i}}\beta_{n_{l_i}k_{l_i}}=\dfrac{P\left(\mu^2_{n_{l_i}k_{l_i}}\right)}{\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{m}\left(\mu^2_{n_{l_i}k_{l_i}}-\mu^2_{n_{l_j}k_{l_j}}\right)}$, $i=\overline{1,m}$, *где* $P(\mu)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ*.*

2°. Исследуем асимптотическое поведение оценки нормы при удалении большого числа собственных значений из спектра оператора T. В качестве частного случая возьмём $q=0,\ m=-5/2,\ n=1$, следовательно $\beta=-1$. Нули функции Бесселя $J_{1/2}(\sqrt{\lambda_{1k}})$ определяются из следующей формулы

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x), \tag{64}$$

отсюда, имеем формулу для вычисления для корней x_k:

$$x_k=k\pi,\ k=0,1,\ldots. \tag{65}$$

В нашем случае из (65) следует, что

$$\mu_k^2=k^2\pi^2.$$

Для оценки нормы воспользуемся формулой (39). Возьмём $\mu^2_{n_{l_i}k_{l_i}}=i^2\pi^2$ и оценим величину знаменателя $\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{m}|\mu^2_{n_{l_i}k_{l_i}}-\mu^2_{n_{l_j}k_{l_j}}|$, т.е. $\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{m}|\pi^2i^2-\pi^2j^2|$. Запишем $\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{m}|\pi^2i^2-\pi^2j^2|$ в виде произведения

$$\pi^{2(m-1)}\prod_{j=1}^{i-1}\left(i^2-j^2\right)\prod_{j=i+1}^{m}\left(j^2-i^2\right)=$$

$$
= \pi^{2(m-1)} \prod_{j=1}^{i-1} (i-j) \prod_{j=1}^{i-1} (i+j) \prod_{j=i+1}^{m} (j-i) \prod_{j=i+1}^{m} (j+i).
$$

Значения каждого из сомножителей получены в пятом параграфе данной главы, так что

$$
\prod_{j=1, i\neq j}^{m} |\pi^2 i^2 - \pi^2 j^2| = \pi^{2(m-1)} \frac{(m-i)!(m+i)!}{2i^2}. \tag{66}
$$

В качестве нормы, по аналогии с (35), возьмём

$$
\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{2m} m^{2m+6} |\left\langle u, X_j \right\rangle|^2 \right)^{1/2}. \tag{67}
$$

Согласно формулам (35)-(43) получим новую оценку $\|K\|$

$$
\|K\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\pi^{2m} i^{2m}}{\pi^{2(m-1)} e^m m^{m+5/2} \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |i^2 - j^2|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{2\pi^2 i^{2m}}{e^m m^{m+1/2} (m-i)!(m+i)!} \leqslant
$$

$$
\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{2\pi^2 m^{m-1/2}}{e^m m!} = \frac{2\pi^2 m^{m+1/2}}{e^m m!}.
$$

Для замены факториала воспользуемся формулой Стирлинга $m! \approx \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

Таким образом, получили

$$
\lim_{m\to\infty} \frac{2\pi^2 m^{m+1/2}}{e^m m!} = \sqrt{2\pi^3}. \tag{68}
$$

§7. Уравнение Шрёдингера.

1°. Уравнение Шрёдингера для гармонического осциллятора принимает вид [40]

$$\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U)\psi = 0,$$

где $U = \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2$, ω_0—собственная частота (циклическая) осциллятора. Известно решение задачи отыскания стационарных состояний, т.е. спектра собственных значений энергии E и соответствующих собственных функций ψ из уравнения

$$\psi'' + \frac{2\mu}{h^2}\left(E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\right)\psi = 0 \qquad (69)$$

при дополнительном условии нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1.$$

Вводя обозначения

$$\lambda = \frac{2E}{h\omega_0},\ x_0 = \sqrt{\frac{h}{\mu\omega_0}},\ \xi = \frac{x}{x_0}, \qquad (70)$$

для функции $\psi = \psi(\xi)$ после очевидных преобразований получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi = 0 \qquad (71)$$

с дополнительным условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \frac{1}{x_0}. \qquad (72)$$

Решением этой задачи будут функции

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}}\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}},$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_n = 2n + 1,$$

где $H_n(x)$—полином Чебышева-Эрмита. Возвращаясь к исходным обозначениям, находим:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \tag{73}$$

$$E_n = h\omega_0(n + 1/2),\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{74}$$

Для уравнения (69) рассмотрим задачу модального управления путём формирования обратной связи в виде однорангового возмущения. Спектральную задачу для (69) запишем в следующем виде

$$T\psi - K\psi = E\psi, \tag{75}$$

где

$$T\psi = -\frac{h^2}{2\mu}\psi'' + \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\psi, \tag{76}$$

$$K\psi = a(x)\int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)b(s)ds, \tag{77}$$

Справедлива следующая теорема, как следствие теоремы 1.1

Теорема 1.11. *Пусть T—дифференциальный оператор вида* (76) *с дополнительным условием нормировки* (72), *действующий в пространстве* $L^2(-\infty, \infty)$. *Для того чтобы перевести заданное подмножество собственных значений* $\Omega = \left\{E_{l_1}, \ldots, E_{l_m}\right\}$, $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ *в произвольно заданное* *подмножество* $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью одноранговою возмущения вида* (77), *где*

$$a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j \psi_j(x), \quad b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\beta}_j \psi_j(x) \tag{78}$$

здесь $\{\nu_i\}_{i \geqslant 0}, \{\beta_i\}_{i \geqslant 0}$*–две квадратично суммируемые последователь-* (79)

ности комплексных чисел, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (79) *удовлетворяли следующим условиям:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$;

б) $\nu_{l_i} \beta_{l_i} = \frac{P(E_{l_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (E_{l_i} - E_{l_j})}$, $\quad i = \overline{1, m}$, *где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

2°. Допустим, необходимо удалить из спектра оператора T первые N собственных значений. Согласно с формулировкой теоремы 1.11 зададим $\nu_k = \frac{1}{(k+1)^2}$

$$a(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \psi_k(x), \quad b(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \psi_k(x),$$

так как $\nu_k = 0, \quad \beta_k = 0$ для $k > N-1$. Из условия б) теоремы получим

$$\frac{1}{(i+1)^2} \beta_i = \frac{P(E_i)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{N-1} (E_i - E_j)}, \quad i = \overline{0, N-1},$$

где $P(\mu)$ можно определить как $P(\mu) = \mu^N$. Одноранговое возмущение запишем в виде:

$$K\psi = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \psi_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \psi_k(x) ds. \tag{80}$$

С помощью пакета программ Mathematica v.4.1 были получены графики функций из образа оператора $V\psi = (T-K)\psi$, где $\psi = \psi_k(x)$, $x \in [-0.05, 0.05]$. На рис.12-17 виден характер изменения графиков собственных функций оператора T.

В соответствии с приведённым выше примером удалялось $N = 5$ первых частот. Возьмём следующие значения переменных

$$h = 1.05 * 10^{-34},\ \mu = 0.9 * 10^{-30},\ \omega_0 = 1,$$

тогда $x_0 = 0.011$.

Функции $a(x)$ и $b(x)$ в данном примере выглядят следующим образом

$$a(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{(k+1)^2} \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_k\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} =$$

$$= 1.73 * 10^7 E^{-4285.71x^2}(0.0006 + (-0.02 + x)x)(0.0007 + x(0.05 + x)),$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{4} \beta_k \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_k\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} =$$

$$= 5.21 * 10^{-26} E^{-4285.71x^2}(-0.025 + x)(-0.011 + x)(0.002 + x)(0.014 + x).$$

3°. Исследуем асимптотическое поведение оценки нормы при удалении большого числа собственных значений из спектра оператора T. Для оценки нормы воспользуемся формулой (39). Возьмём $E_{l_i} = h\omega_0(i + 1/2)$ и оценим величину $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |E_{l_i} - E_{l_j}|$, т.е. $\prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |h\omega_0(i+1/2) - h\omega_0(j+1/2)|$. Запишем её в виде произведения

$$(h\omega_0)^{(m-1)} \prod_{j=1}^{i-1} ((i+1/2) - (j+1/2)) \prod_{j=i+1}^{m} ((j+1/2) - (i+1/2)) =$$

$$= (h\omega_0)^{(m-1)} \prod_{j=1}^{i-1} (i-j) \prod_{j=i+1}^{m} (j-i).$$

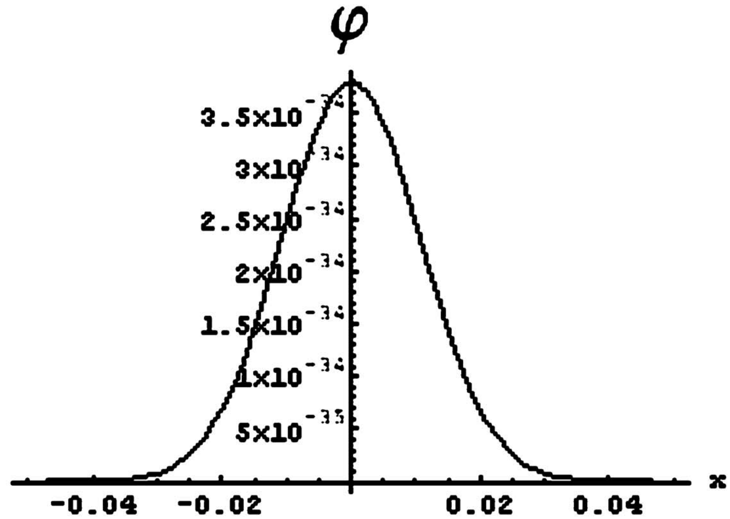

Рис. 12. $\varphi = (T - K)\psi_0$

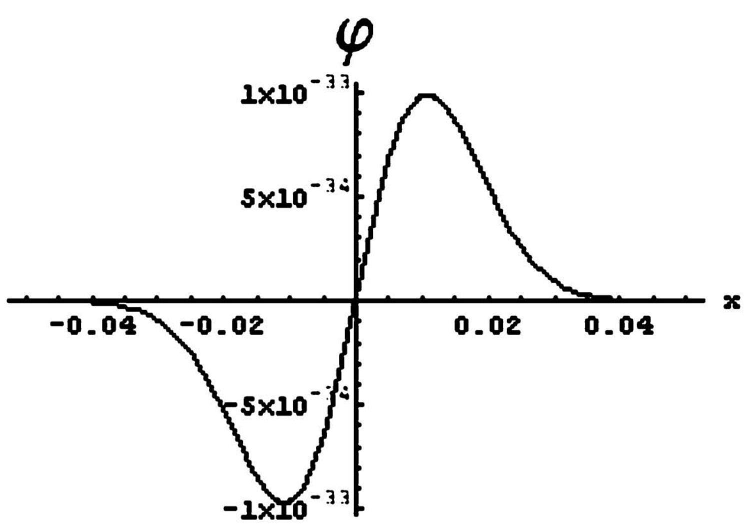

Рис. 13. $\varphi = (T - K)\psi_1$

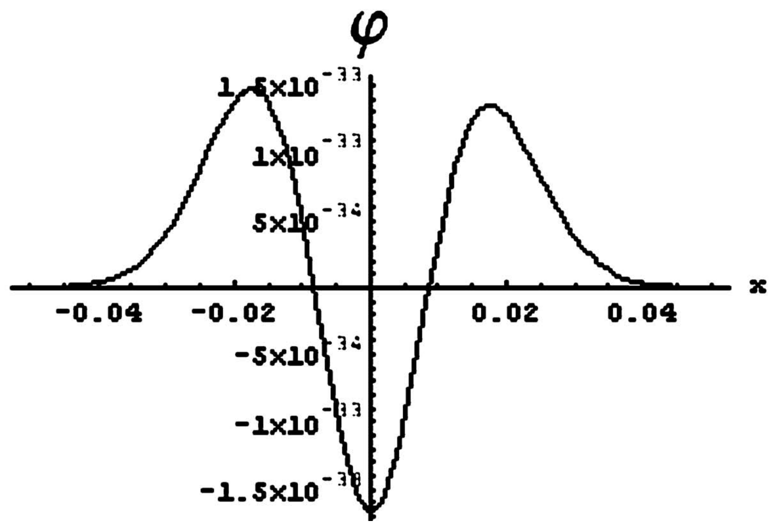

Рис. 14. $\varphi = (T - K)\psi_2$

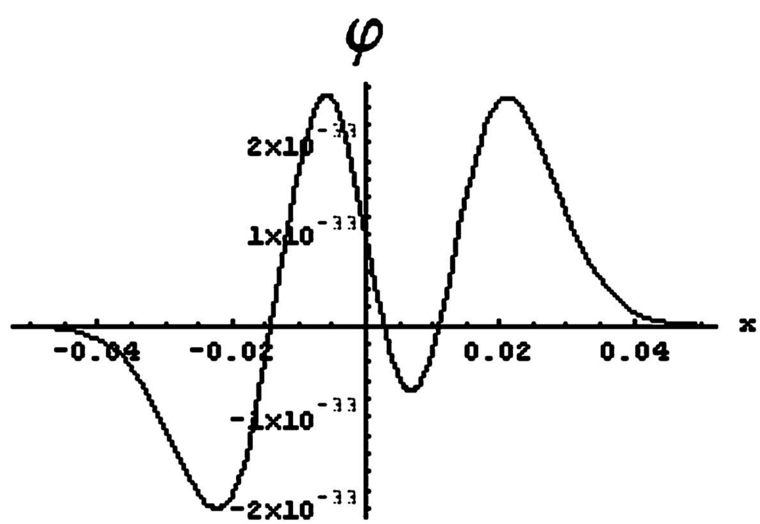

Рис. 15. $\varphi = (T - K)\psi_3$

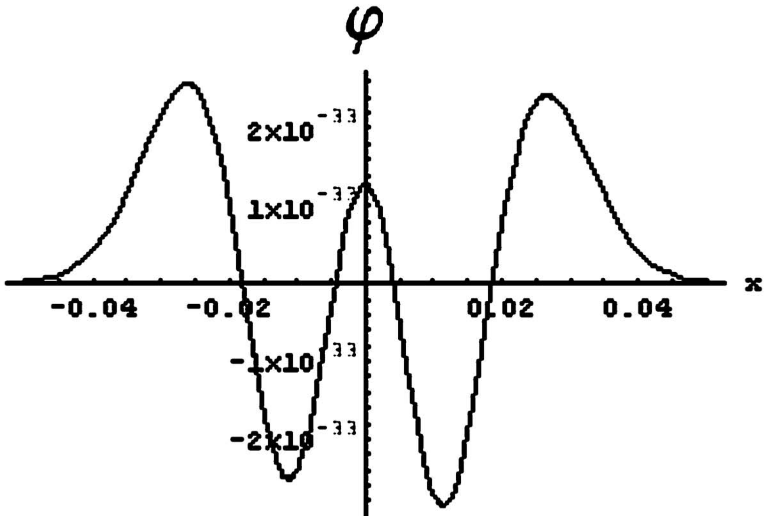

Рис. 16. $\varphi = (T - K)\psi_4$

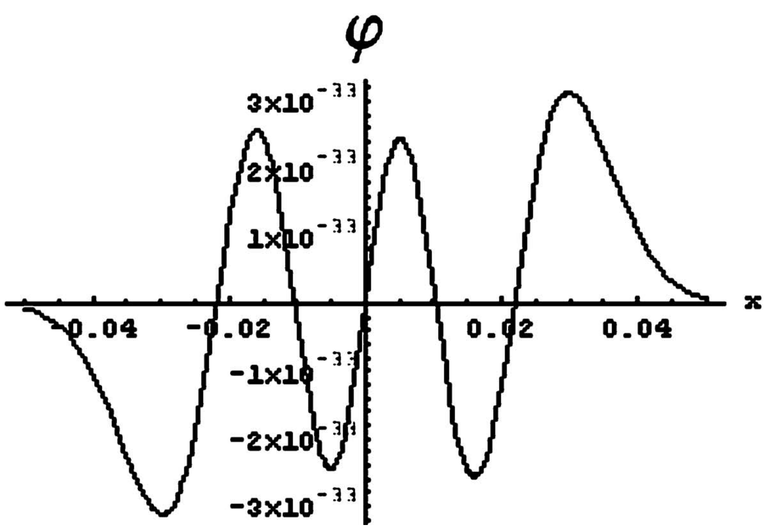

Рис. 17. $\varphi = (T - K)\psi_5$

Значение каждого из сомножителей уже известно

$$\prod_{j=1}^{i-1}(i-j)=(i-i+1)(i-i+2)\ldots(i-1)=(i-1)!,$$

$$\prod_{j=i+1}^{m}(j-i)=(i+1-i)(i+2-i)\ldots(m-i)=(m-i)!,$$

следовательно

$$\prod_{j=1,i\neq j}^{m}|h\omega_0(i+1/2)-h\omega_0(j+1/2)|=(h\omega_0)^{(m-1)}(i-1)!(m-i)!. \tag{81}$$

В качестве нормы, по аналогии с (35), возьмём

$$\|u\|_{\mathcal{D}}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}m^3\,(m+1/2)^{2m}\,|\,\langle u,X_j\rangle\,|^2\right)^{1/2}. \tag{82}$$

Согласно формулам (35)-(43) получим новую оценку $\|K\|$

$$\|K\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{(h\omega_0)^m\,(i+1/2)^m}{m(m+1/2)^m\prod\limits_{j=1,i\neq j}^{m}|h\omega_0(i+1/2)-h\omega_0(j+1/2)|}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{h\omega_0}{m(i-1)!(m-i)!}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{h\omega_0}{m}.$$

Таким образом, получили

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{h\omega_0}{m}=h\omega_0. \tag{83}$$

Глава II. КОНСТРУКЦИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ МИНИМАЛЬНОГО РАНГА

Математическое описание многих физических процессов приводит к решению дифференциальных и интегральных уравнений или даже интегро-дифференциальных уравнений. Широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями—уравнение колебаний, диффузии, Пуассона, Максвелла, Шредингера, уравнения газо-гидродинамики и т.д. Изучение свойств таких математических объектов является важной и интересной задачей, как с практической, так и с теоретической точки зрения.

Одним из таких свойств и связанной с ним задачей является управление дискретным спектром дифференциальных операторов возмущениями минимального ранга. Оператор $V = T - K$, полученный из дифференциального оператора T конечномерным возмущением K, может наследовать часть свойств оператора T. Так, например, операторы T и V имеют одинаковые индексы и существенные спектры. Однако, по таким характеристикам, как дискретный спектр и норма, операторы V и T могут сильно отличаться. Это очень важно для приложений, так как невозмущенный оператор T может иметь ряд нежелательных свойств (большую норму, собственные значения в заданной области и т.д.), тогда как оператор V будет обладать требуемыми свойствами (малой нормой, в заданной области не содержать точек спектра и т.д.)

В данной главе рассматривается задача управления кратным спектром линейных дифференциальных операторов возмущениями минимального ранга. В первом параграфе доказывается теорема построения возмущения минимального ранга. Во втором выводится оценка нормы возмущения.

В третьем параграфе в качестве конкретного примера рассматривается задача управления частотой собственных колебаний прямоугольной мембраны. Приводится вывод уравнения колебаний с учётом возмущения. Приводится пример удаления двух собственных значений из спектра. Построены графики колебаний. В четвёртом параграфе строится возмущение минимального ранга для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере.

§1. Случай дифференциального оператора с кратным спектром.

1°. Возьмём функцию u из области определения дифференциального оператора T. Потребуем выполнения условия самосопряжённости для T.

Пусть λ_l—собственные значения оператора T кратности m_l, запишем представление u в виде ряда: $u = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_l} \langle u, \varphi_{l,i}\rangle \varphi_{l,i}$. Пусть для оператора T имеет место следующее спектральное разложение в виде ряда:

$$Tu = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_l} \lambda_l \langle u, \varphi_{l,i}\rangle \varphi_{l,i}, \tag{1}$$

где $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots$. Оператор T действует из

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) = \left\{ h | h \in H, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_l} \lambda_l^2 |\langle h, \varphi_{l,i}\rangle|^2 < \infty \right\} \tag{2}$$

в H, H—сепарабельное гильбертово пространство. Задача заключается в построении многорангового возмущения представимого в виде

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si} \langle u, b_{si}\rangle, \quad m_{l_0} = 0, \quad a_{si} \in H, \quad b_{si} \in H, \tag{3}$$

где $m_{l_1} \leqslant m_{l_2} \leqslant \dots \leqslant m_{l_m}$,

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \nu_{sij} \varphi_{j,i+m_{s-1}}, \quad b_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \bar{\beta}_{sij} \varphi_{j,i+m_{s-1}}, \tag{4}$$

причём $\{\nu_{sij}\}, \{\beta_{sij}\}, s = \overline{1,m}, i = \overline{1, m_{l_s} - m_{l_{s-1}}}, j = \overline{s,\infty}$—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел. Приводимая ниже теорема даёт описание всех операторов вида (3), для которых выполнено соотношение

$$\sigma_p(T-K) = \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega). \tag{5}$$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, Ω—заданное непустое подмножество собственных значений оператора T, Θ—заданное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω.

Теорема 2.1. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_m}\}$ изолированных собственных значений оператора (1) в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_{l_1}, \dots, \kappa_{l_m}\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ с помощью многорангового возмущения вида (3) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

а) $\nu_{sij}\beta_{sij} = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{l_1, \dots, l_m\}$;

б) $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \nu_{sil_j}\beta_{sil_j} = \dfrac{P(\lambda_{l_j})}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} (\lambda_{l_j} - \lambda_{l_k})}, \quad j = \overline{1,m}$, где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место (5). Покажем, что выполняются условия а), б) теоремы. Рассмотрим спектральную задачу

$$\mu\varphi = (T-K)\varphi, \text{ где } \mu \in \sigma_p(T-K). \tag{6}$$

Систему собственных функций представим в следующем виде:

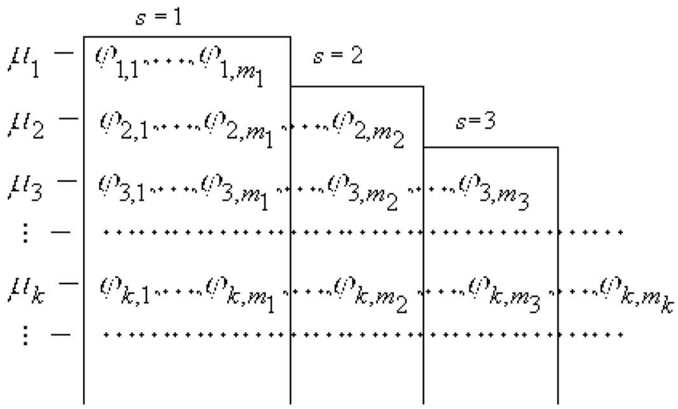

Рис. 18.

Представим решение $\varphi \neq 0$ спектральной задачи (6) в виде ряда по ортонормированной системе $\{\varphi_{l,i}\}$ собственных функций оператора (1)

$$\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_s - m_{s-1}} \sum_{j=s}^{\infty} \gamma_{j,i+m_{s-1}} \varphi_{j,i+m_{s-1}}. \tag{7}$$

Запишем представление оператора T, произведя перегруппировку слагаемых

$$T\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_s - m_{s-1}} \sum_{j=s}^{\infty} \lambda_j \left\langle \varphi, \varphi_{j,i+m_{s-1}} \right\rangle \varphi_{j,i+m_{s-1}}.$$

Имеем в силу (7)

$$T\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_s - m_{s-1}} \sum_{j=s}^{\infty} \lambda_j \left\langle \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{i'=1}^{m_{s'} - m_{s'-1}} \sum_{j'=s'}^{\infty} \gamma_{j',i'+m_{s'-1}} \varphi_{j',i'+m_{s'-1}}, \right.$$

$$\left. \varphi_{j,i+m_{s-1}} \right\rangle \varphi_{j,i+m_{s-1}} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_s - m_{s-1}} \sum_{j=s}^{\infty} \lambda_j \gamma_{j,i+m_{s-1}} \varphi_{j,i+m_{s-1}}.$$

Далее, из (3) и (4) найдём, что

$$K\varphi = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \sum_{j=s}^{\infty} \nu_{sij} \varphi_{j,i+m_{s-1}} \left\langle \sum_{s'=1}^{\infty} \sum_{i'=1}^{m_{s'} - m_{s'-1}} \sum_{j'=s'}^{\infty} \gamma_{j',i'+m_{s'-1}} \times \right.$$

$$\times\varphi_{j',i'+m_{s'-1}}, \sum_{j''=s}^{\infty}\bar{\beta}_{sij''}\varphi_{j'',i+m_{s-1}}\Big\rangle = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\sum_{j=s}^{\infty}\nu_{sij}\varphi_{j,i+m_{s-1}}\times$$

$$\times\sum_{s'=1}^{\infty}\sum_{i'=1}^{m_{s'}-m_{s'-1}}\sum_{j'=s'}^{\infty}\gamma_{j',i'+m_{s'-1}}\beta_{s'i'j'}.$$

Теперь задача (6) свелась к спектральной задаче для системы линейных алгебраических уравнений

$$\mu\gamma_{r,i+m_{s-1}} = \lambda_r\gamma_{r,i+m_{s-1}} - \nu_{sir}\Delta, \tag{8}$$

$$s = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, m_s - m_{s-1},\ r = s, s+1, \ldots,$$

где

$$\Delta = \sum_{s'=1}^{\infty}\sum_{i'=1}^{m_{s'}-m_{s'-1}}\sum_{j'=s'}^{\infty}\gamma_{j',i'+m_{s'-1}}\beta_{s'i'j'}. \tag{9}$$

Согласно условию (5) при $\mu = \lambda_j,\quad j \notin \{l_1, \ldots, l_m\}$ система (8) должна иметь нетривиальное решение. При $r = j$ из (8) получим $\nu_{sij}\Delta = 0$.
Если $\Delta \neq 0$, то $\nu_{sij} = 0$, и, значит выполнено условие а) теоремы.
Если же $\Delta = 0$, то согласно (8) $(\lambda_j - \lambda_r)\gamma_{r,i+m_{s-1}} = 0$. При $r \neq j$ имеем $\gamma_{r,i+m_{s-1}} = 0$. Отсюда в силу (9) $\Delta = \beta_{sij}\gamma_{j,i+m_{s-1}} = 0$. Учитывая, что $\gamma_{j,i+m_{s-1}}$ не может обратиться в нуль ($\varphi \neq 0$), заключаем, что $\beta_{sij} = 0$, и, значит, опять выполнение условия а) теоремы обеспечено.

Теперь проверим выполнение условия б) теоремы. Возьмём $\mu \notin \{\lambda_r\} = \sigma_p(T)$. Из (8) следует, что

$$\gamma_{r,i+m_{s-1}} = -\frac{\nu_{sir}\Delta}{\mu - \lambda_r}. \tag{10}$$

Подставляя $\gamma_{r,i+m_{s-1}}$ в (9), получим

$$\Delta = -\Delta\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_s-m_{s-1}}\sum_{j=s}^{\infty}\frac{\nu_{sij}\beta_{sij}}{\mu - \lambda_j}.$$

Отсюда с учётом свойства а) имеем

$$\Delta\left(1+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\sum_{j=s}^{m}\frac{\nu_{sil_j}\beta_{sil_j}}{\mu-\lambda_{l_j}}\right)=\frac{P(\mu)\Delta}{\prod\limits_{k=1}^{m}(\mu-\lambda_{l_k})}=0, \tag{11}$$

где

$$P(\mu)=\prod_{k=1}^{m}(\mu-\lambda_{l_k})+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\sum_{j=s}^{m}\nu_{sil_j}\beta_{sil_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\mu-\lambda_{l_k}).$$

Полагая в последнем равенстве $\mu=\lambda_{l_r}$, где $r=\overline{1,m}$, получим

$$P(\lambda_{l_r})=\prod_{k=1}^{m}(\lambda_{l_r}-\lambda_{l_k})+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\sum_{j=s}^{m}\nu_{sil_j}\beta_{sil_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\lambda_{l_r}-\lambda_{l_k}).$$

Отсюда приходим к условию б) теоремы в виде

$$P(\lambda_{l_j})=\sum_{s=1}^{j}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\nu_{sil_j}\beta_{sil_j}\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k}).$$

Осталось показать, что корни многочлена $P(\lambda)$ образуют подмножество $\Theta\cup(\sigma_p(T)\setminus\Omega)$. Если ξ—корень $P(\lambda)$, не принадлежащий $\sigma_p(T)$, то равенство (11) выполнено при $\Delta\neq 0$. В таком случае по формуле (10), где $\mu=\xi$ можно построить нетривиальное решение системы (8) и, следовательно, уравнения $\xi\varphi=(T-K)\varphi$. Из предположения (5) следует, что $\xi\in\Theta$. Следовательно, все не принадлежащие множеству Θ корни $P(\lambda)$ обязательно принадлежат $\sigma_p(T)$. Покажем, что они в действительности принадлежат $\sigma_p(T)\setminus\Omega$.

Из доказанного выше утверждения б) вытекает, что если λ_{l_j} будет нулём многочлена $P(\lambda)$, то $\sum\limits_{s=1}^{j}\sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\nu_{sil_j}\beta_{sil_j}=0$, так как $\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k})\neq 0$, но $\nu_{sil_j}=\left\langle a_{si},\varphi_{l_j,i+m_{s-1}}\right\rangle$, $\beta_{sil_j}=\left\langle\varphi_{l_j,i+m_{s-1}},b_{si}\right\rangle$, тогда $\varphi_{l_j,i+m_{s-1}}$ при $\mu=\lambda_{l_j}$ удовлетворяет одному из уравнений

$$\mu\varphi=T\varphi-\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}a_{si}\left\langle\varphi,b_{si}\right\rangle=(T-K)\varphi,$$

$$\overline{\mu}\psi = T^*\psi - \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} b_{si} \langle \psi, a_{si} \rangle = (T^* - K^*)\psi, \tag{12}$$

что противоречит условию (5), согласно которому $\lambda_{l_j} \notin \sigma_p(T-K)$.
Итак, корни $P(\lambda)$, отличные от точек множества Θ, принадлежат $\sigma_p(T) \setminus \Omega$. Если допустить, что $P(\kappa_{l_i}) \neq 0$, $i = \overline{1,m}$, то из (10) и (11) при $\mu = \kappa_{l_i}$ получаем, что все $\gamma_{r,i+m_{s-1}} = 0$, что противоречит условию $\Theta \subset \sigma_p(T-K)$.

Достаточность. Для доказательства отметим, что из условия а) следует, что если $\mu = \lambda_j, j \notin \Lambda$, то функция $\varphi_{j,i+m_{s-1}}$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений (12).

Поэтому $\sigma_p(T) \setminus \Omega \subset \sigma_p(T-K)$. Далее из условия б) имеем, что ν_{sil_j}, β_{sil_j}, $s = \overline{1,m}$, $i = \overline{1, m_{l_s} - m_{l_{s-1}}}$, отличны от нуля. Полагая, что в системе (8) $\mu = \lambda_{l_j}$, найдём, что $\nu_{sil_j}\Delta = 0$, следовательно $\Delta = 0$, но тогда $\gamma_{j,i+m_{s-1}} = 0$ при $j \neq l_j$.
Так как $\Delta = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{m_s-m_{s-1}} \sum\limits_{j=s}^{\infty} \gamma_{j,i+m_{s-1}}\beta_{sij}$, тогда $\beta_{sil_j}\gamma_{l_j,i+m_{s-1}} = 0$. Отсюда следует, что $\gamma_{l_j,i+m_{s-1}} = 0$.
Итак, при $\mu = \lambda_{l_j}$ система (8) имеет только тривиальное решение. Это означает, что $\Omega \cap \sigma_p(T-K) = \emptyset$.

Пусть теперь $\mu \notin \{\lambda_j\} = \sigma_p(T)$ и $\mu \notin \Theta$, тогда $P(\lambda) \neq 0$. Из (11) находим, что $\Delta = 0$, но тогда из (10) следует, что (8) имеет только тривиальное решение. Таким образом, $\sigma_p(T-K) \subset \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega)$. Осталось проверить, что $\Theta \in \sigma_p(T-K)$. По условию теоремы $P(\kappa_{l_i}) = 0$, $i = \overline{1,m}$. Из (11) находим, что можно взять $\Delta \neq 0$. Из (10) следует, что (8) имеет нетривиальное решение.

2°. Построим детерминант Вайнштейна-Ароншайна для оператора T

вида (1) и возмущения K вида (3). Согласно формуле (1.12) $W-A$-детерминант запишем в виде

$$\omega(\mu)=\det\left(I+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}a_{si}\left\langle u,R^*(\mu)b_{si}\right\rangle\right), \tag{13}$$

где I—тождественный оператор в H, $R(\mu)=(T-\mu I)^{-1}$—резольвента, так как T самосопряжённый оператор, то $R=R^*$. Вычислим $R(\mu)$. Резольвента $R(\mu)$ даёт зависимость решения и уравнения

$$Tu-\mu u=b_{si} \tag{14}$$

от правой части b_{si}, таким образом $u=(T-\mu)^{-1}b_{si}$. Воспользуемся разложениями по собственным функциям оператора T и условиями теоремы 2.1, тогда

$$u=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_s-m_{s-1}}\sum_{j=s}^{\infty}\gamma_{j,i+m_{s-1}}\varphi_{j,i+m_{s-1}}.$$

Запишем (14) в виде системы линейных алгебраических уравнений, используя разложения в виде рядов

$$\lambda_r\gamma_{r,i+m_{s-1}}-\mu\gamma_{r,i+m_{s-1}}=\bar{\beta}_{sir} \tag{15}$$

отсюда

$$\gamma_{r,i+m_{s-1}}=\frac{\bar{\beta}_{sir}}{\lambda_r-\mu},$$

следовательно

$$R(\mu)b_{si}=\sum_{j=s}^{\infty}\frac{\bar{\beta}_{sij}}{\lambda_j-\mu}\varphi_{j,i+m_{s-1}}.$$

Из (13)

$$\omega(\mu)=\begin{vmatrix}
c_{1,1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & c_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & 0 & c_{1,m_{l_1}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & c_{2,1} & 0 & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & c_{2,m_{l_2}-m_{l_1}} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{m,m_{l_m}-m_{l_{m-1}}}
\end{vmatrix}, \qquad (16)$$

где $c_{i,j}=1+\langle a_{ij},R^*b_{ij}\rangle$, так как система собственных функций $\{\varphi_{j,i+m_{s-1}}\}$ ортонормированна, то $\left\langle a_{ij},R^*b_{i^{'}j^{'}}\right\rangle=0$ при $i\neq i^{'}$ и $j\neq j^{'}$. Итак

$$\omega(\mu)=\left(1+\sum_{j=1}^{m}\frac{\nu_{11l_j}\beta_{11l_j}}{\lambda_{l_j}-\mu}\right)\dots\left(1+\sum_{j=1}^{m}\frac{\nu_{1m_{l_1}l_j}\beta_{1m_{l_1}l_j}}{\lambda_{l_j}-\mu}\right)\times \qquad (17)$$

$$\times\left(1+\sum_{j=2}^{m}\frac{\nu_{21l_j}\beta_{21l_j}}{\lambda_{l_j}-\mu}\right)\dots\left(1+\frac{\nu_{mm_{l_m}-m_{l_{m-1}}l_m}\beta_{mm_{l_m}-m_{l_{m-1}}l_m}}{\lambda_{l_m}-\mu}\right).$$

§2. Оценка нормы многорангового возмущения.

1°. Согласно теореме 2.1 рассмотрим одноранговое возмущение K для оператора T в следующем виде

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si} \left\langle u, b_{si} \right\rangle, \quad m_{l_0} = 0, \tag{18}$$

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{m} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}}, \quad b_{si} = \sum_{j=s}^{m} \bar{\beta}_{sil_j} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}},$$

где $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \beta_{sil_j} = \frac{P\left(\lambda_{l_j}\right)}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k}\right)}$, $\quad j = \overline{1,m}$. Оценим норму оператора K, действующего из $\mathcal{D}$ в H. Возьмём следующую норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_l} |\lambda_l|^2 |\left\langle u, \varphi_{l,i} \right\rangle|^2 \right)^{1/2}, \ \lambda_l \neq 0, \ l = \overline{1,\infty}. \tag{19}$$

Имеем следующее выражение для нормы

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} = \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} \|Ku\|_H = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \|a_{si}\|_H \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\left\langle u, b_{si} \right\rangle|, \tag{20}$$

$$\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\left\langle u, b_{si} \right\rangle| = \sum_{j=s}^{m} |\beta_{sil_j}| \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\left\langle u, \varphi_{l_j, i+m_{s-1}} \right\rangle|.$$

Так как sup берётся по $\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant 1$, следовательно $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{m_l} |\lambda_l|^2 |\left\langle u, \varphi_{l,i} \right\rangle|^2 \leqslant 1$, тогда $|\lambda_l| |\left\langle u, \varphi_{l,i} \right\rangle| \leqslant 1$, получим

$$|\left\langle u, \varphi_{l,i} \right\rangle| \leqslant \frac{1}{|\lambda_l|}. \tag{21}$$

Следовательно $\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\left\langle u, \varphi_{l_j, i+m_{s-1}} \right\rangle| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{l_j}|}$, тогда $\sup_{\|u\|_{\mathcal{D}}\leqslant 1} |\left\langle u, b_{si} \right\rangle| \leqslant$

$\sum\limits_{j=s}^{m} |\beta_{sil_j}| \frac{1}{|\lambda_{l_j}|}$. Используя свойства нормы, получим следующую оценку

$$\|a_{si}\|_H = \sqrt{(a_{si}, a_{si})} = \sqrt{\left(\sum_{j=s}^{m} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}}, \sum_{j=s}^{m} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}} \right)} = \sqrt{m-s+1}, \quad (22)$$

где $s = \overline{1, m}$. Из (20) следует

$$\|K\|_{\mathcal{D} \to H} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \|a_{si}\|_H \sum_{j=s}^{m} |\beta_{sil_j}| \frac{1}{|\lambda_{l_j}|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \sum_{j=s}^{m} |\beta_{sil_j}| \frac{1}{|\lambda_{l_j}|} \sqrt{m-s+1},$$

следовательно

$$||K||_{\mathcal{D} \to H} \leqslant \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \sum_{j=s}^{m} \frac{\sqrt{m-s+1} |\beta_{sil_j}|}{|\lambda_{l_j}|}. \quad (23)$$

В силу перемены порядка суммирования коэффициентов верно тождество двух конечных сумм

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \sum_{j=s}^{m} \beta_{sil_j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{j} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \beta_{sil_j}. \quad (24)$$

Подставив тождество (24) в неравенство (23) и, учитывая условие б) теоремы 2.1 получим

$$\|K\|_{\mathcal{D} \to H} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{m-j+1} |P(\lambda_{l_j})|}{|\lambda_{l_j}| \prod\limits_{i=1, i \neq j}^{m} |\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}|}. \quad (25)$$

Обозначим $\theta_m = \inf \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{m-j+1} |P(\lambda_{l_j})|}{|\lambda_{l_j}| \prod\limits_{i=1, i \neq j}^{m} |\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}|}$, где inf берётся по всем многочленам $P(\mu)$ степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которых совпадают со значениями из Θ. Взяв $P(\lambda) = \lambda^m$ и учитывая неравенство $|a-b| \geqslant ||a|-|b||$, получим оценку сверху [21]

$$\theta_m \leqslant \tau_m = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{m-j+1}|\lambda_{l_j}|^{m-1}}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{m} ||\lambda_{l_j}| - |\lambda_{l_i}||}. \tag{26}$$

§3. Управление частотой собственных колебаний прямоугольной мембраны с помощью обратной связи.

1°. В этом параграфе иллюстрируется применение теоремы 2.1 при изучении задачи управления частотой собственных колебаний прямоугольной мембраны. Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний закреплённой по краям мембраны размеров (c, d):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = F(x,y,t),\ 0 \leqslant x \leqslant c,\ 0 \leqslant y \leqslant d,\ t \geqslant 0, \tag{27}$$

$$u|_C = 0,$$

где C—контур прямоугольной мембраны, неизвестная функция $u(x,y,t)$ описывает величину отклонения мембраны от положения равновесия, h—константа, c, d—размеры мембраны по горизонтали и вертикали, свободный член $F(x,y,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения, которое предлагается формировать по закону обратной связи

$$F(x,y,t) \equiv Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si}(x,y) \int_0^c \int_0^d u(\tau,r,t) b_{si}(\tau,r)\,dr\,d\tau, \tag{28}$$

$m_{l_0} = 0$. Собственные колебания с частотой ω закреплённой прямоугольной мембраны с обратной связью (28) формируются по закону

$$u(x,y,t) = e^{\mathbf{i}\omega t} X(x) Y(y), \tag{29}$$

где $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, $X(x), Y(y)$—описывают прогиб мембраны в начальный момент $t = 0$. Подстановка (29) в (27) даёт следующую спектральную задачу

$$-h^2(X'' + Y'') - \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si}(x,y) \int_0^c \int_0^d X(\tau) Y(r) b_{si}(\tau,r)\,dr\,d\tau = \lambda XY,$$

$$\lambda = \omega^2,\ X(0) = X(c) = 0,\ Y(0) = Y(d) = 0.$$

Известно решение невозмущённой спектральной задачи [5, с. 30]:

$$-h^2(X'' + Y'') = \lambda XY,\ X(0) = X(c) = 0,\ Y(0) = Y(d) = 0,$$

$$\lambda_{kj} = h^2\pi^2\left(\frac{k^2}{c^2} + \frac{j^2}{d^2}\right),\ k, j = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

$$\varphi_{kj}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{cd}}\sin\frac{k\pi x}{c}\sin\frac{j\pi y}{d}. \tag{31}$$

Отметим, что собственные значения λ_{kj} могут повторяться, т.е.λ_{kj}=$\lambda_{k_0 j_0}$ при некотором наборе номеров (k, j). Количество таких повторений, равное числу решений в целых числах уравнения

$$\frac{k^2}{c^2} + \frac{j^2}{d^2} = \frac{{k_0}^2}{c^2} + \frac{{j_0}^2}{d^2}$$

дает кратность собственного значения $\lambda_{k_0 j_0}$. Например, $c = d = 1$ кратность $\lambda_{47} = \lambda_{74} = \lambda_{18} = \lambda_{81}$ равна 4. Таким образом, спектр уравнения колебаний прямоугольной мембраны кратен.

Система функций $\{\varphi_{kj}\}_{k,j\geqslant 1}$ является полной, ортонормированной в $L^2((0, c) \times (0, d))$ и образует полную систему собственных функций дифференциального оператора $T = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)$ с краевыми условиями $X(0) = X(c) = 0$, $Y(0) = Y(d) = 0$. Дискретный характер спектра этого оператора позволяет записать спектральное разложение. Получим представление оператора T в виде ряда. Нужно ввести операцию переиндексации, т.е. сечение

$$\lambda_{l_i} = \lambda_{kj},\ \text{где}\ \lambda_{kj} = l_i$$

$$|\lambda_{l_1}| < \lambda_{l_2}| < \ldots$$

Переиндексацию получаем за счет фиксирования правых частей уравнений:

$$\pi^2\left(\frac{k^2}{c^2}+\frac{j^2}{d^2}\right)=l_i,$$

$$\pi^2\left(\frac{k^2}{l^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)=\lambda_{kj},$$

$$\lambda_{kj}=l_i.$$

Таким образом, переиндексировав собственные числа, запишем для них соответствующие собственные функции следующим образом: $\varphi_{l_i}^{(l)}$, где l— номер собственной функции, соответствующий кратному собственному числу λ_{l_i}. Запишем представление оператора T в виде ряда:

$$Tu=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{l_i}\sum_{l=1}^{m_{l_i}}\left\langle u,\varphi_{l_i}^{(l)}\right\rangle\varphi_{l_i}^{(l)}. \tag{32}$$

Область определения этого оператора допускает эквивалентное описание

$$\mathcal{D}(T)=\left\{h|h\in H,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{l_i}^2\sum_{l=1}^{m_{l_i}}|\left\langle h,\varphi_{l_i}^{(l)}\right\rangle|^2<\infty\right\}, \tag{33}$$

H—сепарабельное гильбертово пространство, $1\leqslant m_{l_1}\leqslant m_{l_2}\ldots.$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, $\Omega=\left\{\lambda_{p_1},\ldots,\lambda_{p_m}\right\}$— заданное непустое подмножество собственных значений оператора T, где $p_1<p_2<\cdots<p_m$, $m_{p_1}\leqslant m_{p_2}\leqslant\cdots\leqslant m_{p_m}$. Необходимые и достаточные условия построения возмущений (28) с учетом

$$\sigma_p(T-K)=\{0\}\cup\left(\sigma_p(T)\setminus\Omega\right), \tag{34}$$

как следствие 2.1, даёт следующая теорема.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть T—дифференциальный оператор вида* (32) *с областью определения* (33). *Для того, чтобы перевести заданное подмножество собственных значений Ω в точку ноль с помощью возмущения вида*

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{p_s}-m_{p_{s-1}}} a_{si}(x,y) \int_0^c \int_0^d u(t,\tau,r) b_{si}(\tau,r)\,dr\,d\tau, \text{ где}$$

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \nu_{sij} \varphi_j^{(i+m_{l_{s-1}})}, \quad b_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \bar{\beta}_{sij} \varphi_j^{(i+m_{l_{s-1}})}, \tag{35}$$

здесь $\{\nu_{sij}\}, \{\beta_{sij}\}$ *—две квадратично суммируемые последовательно-* (36)

сти комплексных чисел, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (36) *удовлетворяли следующим условиям:*

а) $a_{si} = \sum\limits_{j=s}^{\infty} \nu_{sij} \varphi_j^{(i+m_{l_{s-1}})}, \quad b_{si} = \sum\limits_{j=s}^{\infty} \bar{\beta}_{sij} \varphi_j^{(i+m_{l_{s-1}})};$

б) $\nu_{sij}\beta_{sij} = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{p_1, \ldots, p_m\}$;

в) $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{p_s}-m_{p_{s-1}}} \nu_{sip_j}\beta_{sip_j} = \dfrac{P(\lambda_{p_j})}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} (\lambda_{p_j} - \lambda_{p_k})}, \quad j = \overline{1,m},$ *где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество* $\sigma_p(T) \setminus \Omega$, *дополненное нулём.*

2°. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. Возьмём мембрану с размерами $(0,1)\times(0,1)$ и нулевыми граничными условиями. Краевая задача на собственные значения имеет следующее решение:

$$\lambda_{kj} = \pi^2 \left(k^2 + j^2\right), \ k,j = 1,2,\ldots, \tag{37}$$

$$\varphi_{kj}(x,y) = 2\sin(k\pi x)\sin(j\pi y). \tag{38}$$

Согласно формулировке теоремы 2.2 зададим подмножество $\Omega = \{5\pi^2, 10\pi^2\}$.

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = \lambda_{p_1} = 5\pi^2, \ \lambda_{3,1} = \lambda_{3,1} = \lambda_{p_2} = 10\pi^2,$$

таким образом, собственные числа λ_{p_1}, λ_{p_2} имеют кратность равную двум $m_{p_1} = m_{p_2} = 2$. Введём следующие чисто символические обозначения

$$\varphi_{12} \equiv \varphi_{p_1}^{(1)}, \ \varphi_{21} \equiv \varphi_{p_1}^{(2)}, \ \varphi_{13} \equiv \varphi_{p_2}^{(1)}, \ \varphi_{31} \equiv \varphi_{p_2}^{(2)}.$$

Все элементы последовательности $\{\nu_{sij}\}$ возьмём единичными. Функции a, b

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{2} \varphi_{p_j}^{(i)}, \;\; b_{si} = \sum_{j=s}^{2} \beta_{sij} \varphi_{p_j}^{(i)}.$$

Значения элементов последовательности $\{\beta_{sij}\}$ найдём по следующим формулам:

$$\sum_{s=1}^{1} \sum_{i=1}^{2} \beta_{sip_1} = \frac{P\left(\lambda_{p_1}\right)}{\left(\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2}\right)},$$

$$\sum_{s=1}^{1} \sum_{i=1}^{2} \beta_{sip_2} = \frac{P\left(\lambda_{p_2}\right)}{\left(\lambda_{p_2} - \lambda_{p_1}\right)},$$

в последней формуле суммирование по s должно идти до 2, но $m_{p_2} - m_{p_1} = 0$. В качестве $P(\mu)$

$$P(\mu) = \mu(\mu - 17\pi^2).$$

Следовательно,

$$\beta_{11p_1} + \beta_{12p_1} = \frac{1}{5\pi^2 - 10\pi^2}(5\pi^2(5\pi^2 - 17\pi^2)) = 12\pi^2,$$

$$\beta_{11p_2} + \beta_{12p_2} = \frac{1}{10\pi^2 - 5\pi^2}(10\pi^2(10\pi^2 - 17\pi^2)) = -14\pi^2,$$

так как никаких других условий на элементы последовательности $\{\beta_{sij}\}$ не существует, возьмём следующие значения

$$\beta_{11p_1} = \beta_{12p_1} = 6\pi^2, \;\; \beta_{11p_2} + \beta_{12p_2} = -7\pi^2.$$

Возмущение выглядит следующим образом

$$Ku = \sum_{i=1}^{m_{p_1} - m_{p_0}} \left(a_{1i}(x,y) \int_0^1 \int_0^1 u(t,\tau,r) b_{1i}(\tau,r) dr d\tau \right), \;\; m_{p_0} = 0,$$

подставляя, далее получим

$$Ku = (2\sin(\pi x)\sin(2\pi y) + 2\sin(\pi x)\sin(3\pi y)) \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u(t,\tau,r)(2*6\pi^2\sin(\pi\tau)\sin(2\pi r) - 2*7\pi^2\sin(\pi\tau)\sin(3\pi r))drd\tau +$$

$$+(2\sin(2\pi x)*\sin(\pi y) + 2\sin(3\pi x)*\sin(\pi y))\times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u(t,\tau,r)(2*6\pi^2\sin(2\pi\tau)\sin(\pi r) - 2*7\pi^2\sin(3\pi\tau)\sin(\pi r))drd\tau.$$

3°. С помощью пакета программ Mathematica v.4.1 были получены графики функций из образа оператора $Vu = (T-K)u$, где $u = \varphi_{kj}(x,y)$, $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$. В соответствии с приведённым выше примером удалялось два собственных значения кратности два. На (рис. 19) изображён

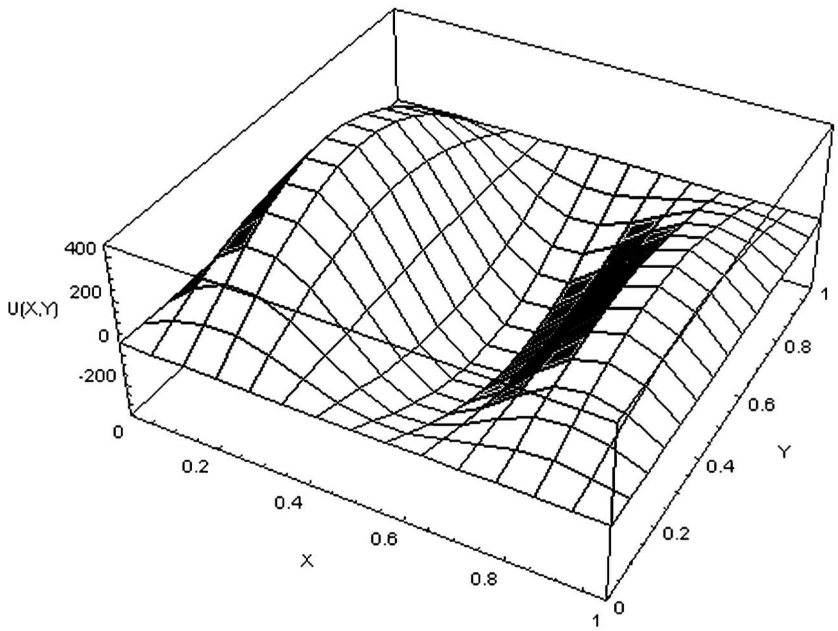

Рис. 19. Возмущение колебаний мембраны

образ оператора

$$U(x,y) = V\varphi_{31} = 20\pi^2\sin(3\pi x)\sin(\pi y) + 7\pi^2\times$$

$$\times(2\sin(2\pi x)*\sin(\pi y) + 2\sin(3\pi x)*\sin(\pi y)),$$

на (рис. 20)

$$U(x,y) = V\varphi_{13} = 20\pi^2\sin(\pi x)\sin(3\pi y) + 7\pi^2\times$$

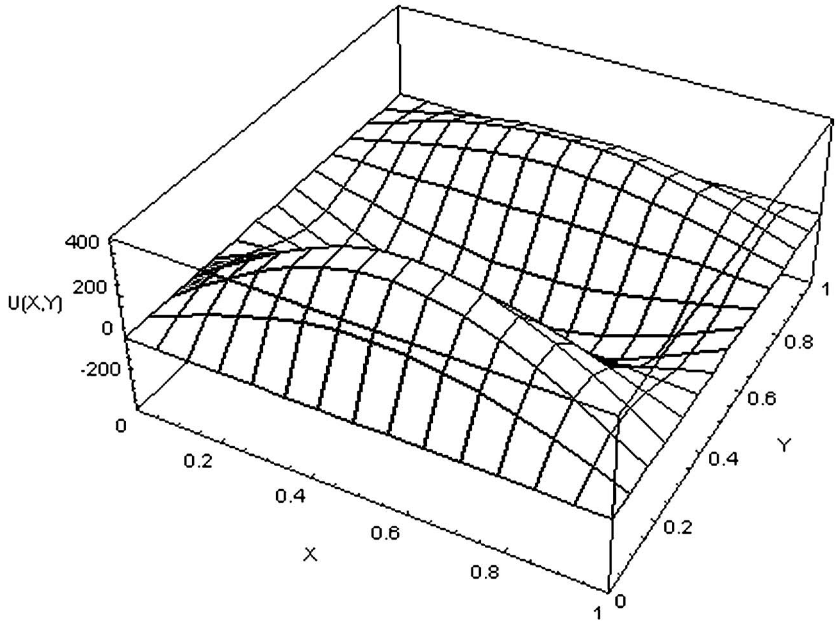

Рис. 20. Возмущение колебаний мембраны

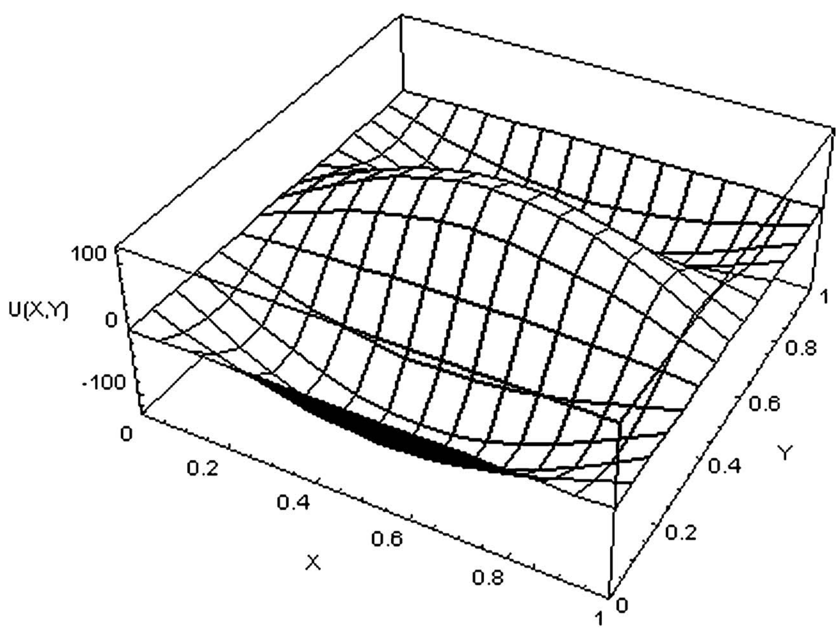

Рис. 21. Возмущение колебаний мембраны

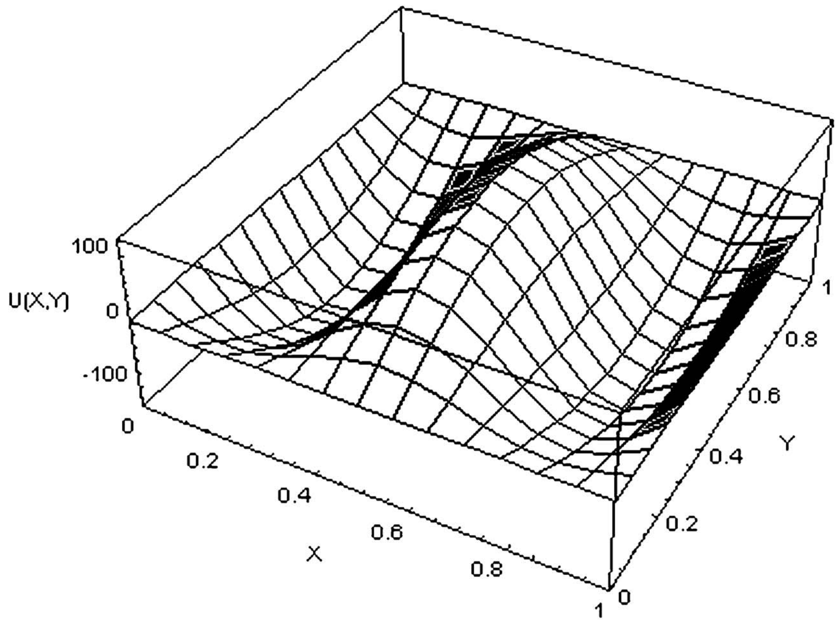

Рис. 22. Возмущение колебаний мембраны

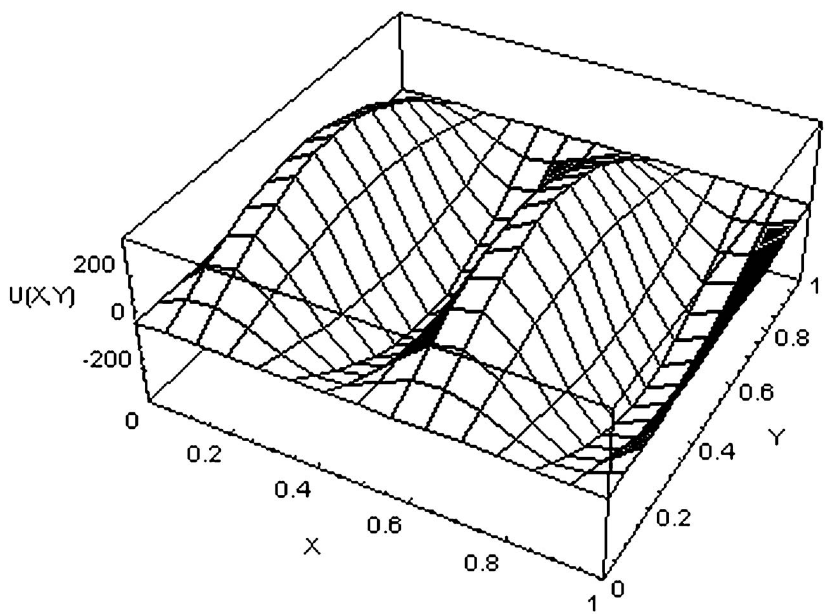

Рис. 23. Возмущение колебаний мембраны

$$\times(2\sin(\pi x) * \sin(2\pi y) + 2\sin(\pi x) * \sin(3\pi y)),$$

на (рис. 21)

$$U(x,y) = V\varphi_{12} = 10\pi^2 \sin(\pi x)\sin(2\pi y) - 6\pi^2 \times$$

$$\times(2\sin(\pi x)\sin(2\pi y) + 2\sin(\pi x)\sin(3\pi y)),$$

на (рис. 22)

$$U(x,y) = V\varphi_{21} = 10\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(\pi y) - 6\pi^2 \times$$

$$\times(2\sin(2\pi x) * \sin(\pi y) + 2\sin(3\pi x) * \sin(\pi y)).$$

Тогда как, например, для $\varphi_{41}(x,y) = 2\sin(4\pi x)\sin(\pi y)$ оператор V выглядит следующим образом. На (рис. 23) построен график функции

$$V\varphi_{41} = 34\pi^2 \sin(4\pi x)\sin(\pi y).$$

Построим детерминант и функцию Вайнштейна-Ароншайна для данного примера. Согласно (17) имеем

$$\omega(\mu) = \left(1 + \frac{\beta_{11p_1}}{\lambda_{p_1} - \mu} + \frac{\beta_{11p_2}}{\lambda_{p_2} - \mu}\right)\left(1 + \frac{\beta_{12p_1}}{\lambda_{p_1} - \mu} + \frac{\beta_{12p_2}}{\lambda_{p_2} - \mu}\right). \tag{39}$$

Подставив конкретные значения в (39), получим

$$\omega(\mu) = \frac{(75\pi^4 - 14\pi^2\mu + \mu^2)^2}{(5\pi^2 - \mu)^2(10\pi^2 - \mu)^2}. \tag{40}$$

Построим график $\omega(\mu)$ Удаляемые собственные значения $\Omega = \{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}\}$ оператора T являются полюсами порядка 2 для функции (40), следовательно $\nu(\lambda_{p_i}; T) = -2,\ i = \overline{1,2}$, $\tilde{\nu}(\lambda_{p_i}; T) = 2,\ i = \overline{1,2}$. Из (1.14) заключаем, что $\tilde{\nu}(\lambda_{p_i}; T - K) = 0,\ i = \overline{1,2}$. Таким образом, мы доказали, что в спектре оператора $T - K$ отсутствуют заданные собственные значения.

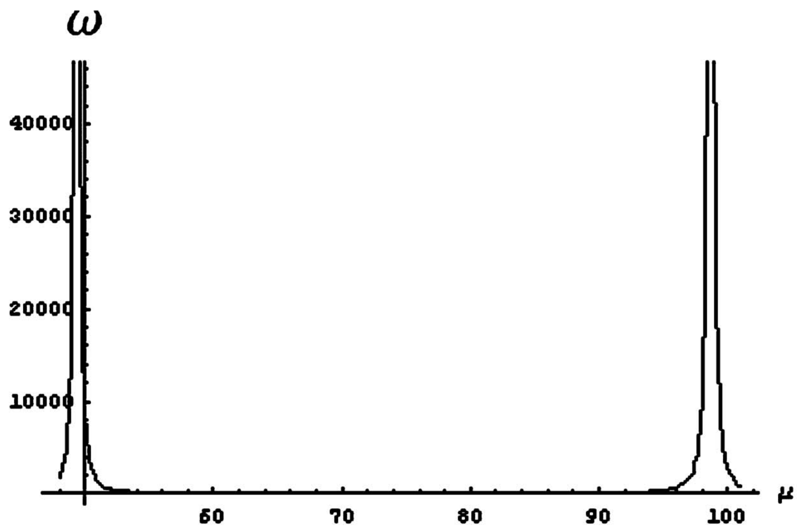

Рис. 24. $\omega = \omega(\mu)$.

§4. Оператор Лапласа-Бельтрами на сфере.

1°. Запишем представление оператора Бельтрами в сферических координатах

$$TY = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}, \quad Y \in C^\infty(S_1). \tag{41}$$

Утверждение [9, с. 391]. Сферические функции $Y_l^i, i = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$, являются собственными функциями оператора Бельтрами, соответствующими собственному значению $\lambda_l = l(l+1)$ кратности $2l+1$.

Запишем представление оператора T в виде ряда:

$$Tu = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=-l}^{l}\lambda_l \left\langle u, Y_l^i\right\rangle Y_l^i, \tag{42}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(T) = \left\{h | h \in H, \quad \sum_{l=0}^{\infty}\lambda_l^2\sum_{i=-l}^{l}|\left\langle h, Y_l^i\right\rangle|^2 < \infty\right\}, \tag{43}$$

H—сепарабельное гильбертово пространство.

Задача заключается в построении возмущений

$$Ku = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si} \langle u, b_{si} \rangle, \quad m_{l_{-1}} = 0, \quad a_{si} \in L_2, \quad b_{si} \in L_2, \tag{44}$$

для которого выполнено соотношение

$$\sigma_p(T-K) = \{0\} \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega). \tag{45}$$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, $\Omega = \left\{\lambda_{l_0}, \ldots, \lambda_{l_{m-1}}\right\}$—заданное непустое подмножество собственных значений оператора T. Необходимые и достаточные условия построения возмущений (44) с учетом (45), как следствие 2.1, даёт следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть T—дифференциальный оператор вида* (42) *с областью определения* (43). *Для того, чтобы перевести заданное подмножество собственных значений Ω в точку ноль с помощью возмущения вида* (44), *где*

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \nu_{sij} Y_j^p, b_{si} = \sum_{j=s}^{\infty} \bar{\beta}_{sij} Y_j^p, \text{ где } p = i - 1 - \frac{m_s - 1}{2} + m_{s-1} - j + s, \tag{46}$$

здесь $\{\nu_{sij}\}, \{\beta_{sij}\}$*—две квадратично суммируемые последовательно-* (47)

сти комплексных чисел, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (47) *удовлетворяли следующим условиям:*

а) $\nu_{sij}\beta_{sij} = 0$ *для индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_0, \ldots, l_{m-1}\}$;

б) $\sum\limits_{s=0}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \nu_{sil_j}\beta_{sil_j} = \dfrac{P(\lambda_{l_j})}{\prod\limits_{k=0,k\neq j}^{m-1}(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k})}, j = \overline{0, m-1},$ *где* $P(\lambda)$*—некоторый* *многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество $\sigma_p(T) \setminus \Omega$, дополненное нулём.*

2°. Рассмотрим в качестве примера построения возмущения (44) для оператора Бельтрами следующую задачу. Согласно формулировке теоремы 2.3 зададим подмножество $\Omega = \{2, 6\}$.

$$\lambda_{l_0} = 2,\ m_{l_0} = 3,\ \lambda_{l_1} = 6,\ m_{l_1} = 5,\ m = 2.$$

Собственные функции для λ_{l_0}:

$$Y_1^{-1} = \frac{1}{2} E^{-I\varphi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta,\ Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta,\ Y_1^1 = -\frac{1}{2} E^{I\varphi} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta.$$

Собственные функции для λ_{l_1}:

$$Y_2^{-2} = \frac{1}{4} E^{-2I\varphi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta,\ Y_2^{-1} = \frac{1}{2} E^{-I\varphi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos\theta \sin\theta,\ Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(-1+3\cos^2\theta),$$

$$Y_2^1 = -\frac{1}{2} E^{I\varphi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos\theta \sin\theta,\ Y_2^2 = \frac{1}{4} E^{2I\varphi} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta.$$

Все элементы последовательности $\{\nu_{sij}\}$ возьмём единичными. Функции a, b

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{1} Y_{l_j}^{i-1-\frac{m_{l_s}-1}{2}+m_{l_{s-1}}-j+s},\ b_{si} = \sum_{j=s}^{2} \beta_{sij} \varphi_{l_j}^{i-1-\frac{m_{l_s}-1}{2}+m_{l_{s-1}}-j+s}.$$

Значения элементов последовательности $\{\beta_{sij}\}$ найдём по следующим формулам:

$$\sum_{s=0}^{0} \sum_{i=1}^{3} \beta_{sil_0} = \frac{P\left(\lambda_{l_0}\right)}{\left(\lambda_{l_0} - \lambda_{l_1}\right)},$$

$$\sum_{s=0}^{0} \sum_{i=1}^{3} \beta_{sil_1} = \frac{P\left(\lambda_{l_1}\right)}{\left(\lambda_{l_1} - \lambda_{l_0}\right)}.$$

В качестве $P(\mu)$

$$P(\mu) = \mu(\mu - 12).$$

Следовательно,

$$\beta_{01l_0}+\beta_{02l_0}+\beta_{03l_0}=\frac{1}{2-6}(2(2-12))=5,$$

$$\beta_{01l_1}+\beta_{02l_1}+\beta_{03l_1}+\beta_{11l_1}+\beta_{12l_1}=\frac{1}{6-2}(6(6-12))=-9,$$

так как никаких других условий на элементы последовательности $\{\beta_{sij}\}$ не существует, возьмём следующие значения

$$\beta_{01l_0}=\beta_{02l_0}=\beta_{03l_0}=5/3,\ \beta_{01l_1}=\beta_{02l_1}=\beta_{03l_1}=\beta_{11l_1}=\beta_{12l_1}=-9/5.$$

Возмущение выглядит следующим образом

$$Ku=\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}a_{si}(\theta,\varphi)\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y(\theta,\varphi)b_{si}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi,\ m_{l_{-1}}=0,$$

подставляя, далее получим

$$Ku=\left(\frac{5}{3}(Y_1^{-1}(\theta,\varphi)+Y_1^{0}(\theta,\varphi)+Y_1^{1}(\theta,\varphi))-\right.$$

$$\left.-\frac{9}{5}(Y_2^{-2}(\theta,\varphi)+Y_2^{-1}(\theta,\varphi)+Y_2^{0}(\theta,\varphi)+Y_2^{1}(\theta,\varphi)+Y_2^{2}(\theta,\varphi))\right)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}Y(\theta,\varphi)\left(\frac{5}{3}(Y_1^{-1}(\theta,\varphi)+Y_1^{0}(\theta,\varphi)+Y_1^{1}(\theta,\varphi))-\right.$$

$$\left.-\frac{9}{5}(Y_2^{-2}(\theta,\varphi)+Y_2^{-1}(\theta,\varphi)+Y_2^{0}(\theta,\varphi)+Y_2^{1}(\theta,\varphi)+Y_2^{2}(\theta,\varphi))\right)\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Покажем результат действия оператора $T-K$ на некоторые сферические функции. Для Y_1^0 получаем:

$$(T-K)Y_1^0=\frac{1}{72}\left(-28\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(27\sqrt{5}+81\sqrt{5}\cos 2\theta+\sqrt{6}E^{-2I\phi}\sin\theta\times\right.\right.$$

$$\times\left(50E^{I\phi}(-1+E^{2I\phi})+27\sqrt{5}\sin\theta+27\sqrt{5}E^{I\phi}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(2\cos\theta-2E^{2I\phi}\cos\theta+E^{3I\phi}\sin\theta)\right)\right)\right),$$

для Y_2^0 получаем:

$$(T-K)Y_2^0 = \frac{3}{200}\left(100\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(23\sqrt{5} + 69\sqrt{5}\cos 2\theta + \sqrt{6}E^{-2I\phi}\sin\theta\times\right.\right.$$

$$\times\left(50E^{I\phi}(-1+E^{2I\phi}) + 27\sqrt{5}\sin\theta + 27\sqrt{5}E^{I\phi}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(2\cos\theta - 2E^{2I\phi}\cos\theta + E^{3I\phi}\sin\theta)\right)\right)\right),$$

для Y_3^0

$$(T-K)Y_3^0 = \frac{3}{4}\sqrt{7}\pi(3\cos\theta + 5\cos 3\theta).$$

Используя программу Maple 6, построим образ $(T-K)Y_3^0$.

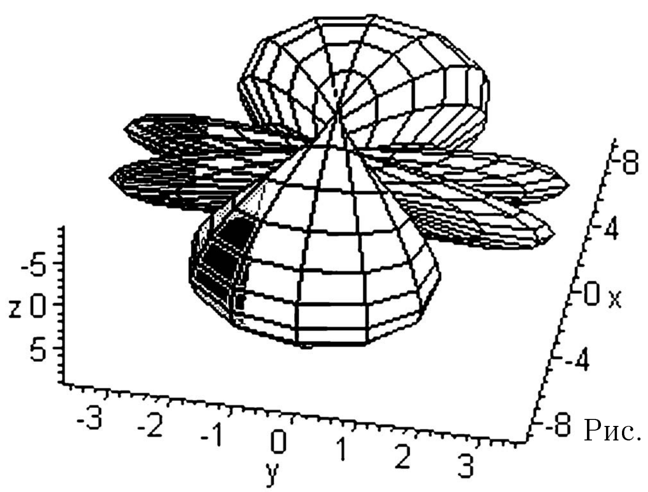

Рис. 25.

Список литературы

[1] Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1967.

[2] Андреев Ю.Н. // Автоматика и телемеханика. 1977, № 3, 5-50.

[3] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[4] Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[5] Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Задачи по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та,, 1998.

[6] Бутковский А. Г. Структурная теория распределённых систем. М.: Наука, 1977.

[7] Бутковский А. Г., Самойленко Р. И. Управление квантовомеханическими процессами. М.: Наука, 1984.

[8] Веремей Е.И., Еремеев В.В. Синтез оптимальных систем с заданными модальными свойствами // Оптим. упр. мех. системами. Л. 1983, 3-12.

[9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

[10] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 3. М.: Мир, 1974.

[11] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

[12] Исламов Г.Г. Об управлении спектром динамической системы // Дифференциальные уравнения. 1987, том 23, №8. 1299-1302.

[13] Исламов Г.Г. Экстремальные возмущения замкнутых операторов // Известия вузов. Иатематика. 1989, №1. 35-41.

[14] Исламов Г.Г. Свойства одноранговых возмущений // Известия вузов. Математика. 1989, №4. 29-35.

[15] Исламов Г.Г. Об одном свойстве мультипликаторов линейных периодических систем // Известия вузов. Математика. 1999, №2. 57-59.

[16] Калман Р.Е., Арбиб М., Фалб П. Очерки по математической теории систем М.: Мир, 1971.

[17] Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. М.: Мир, 1982.

[18] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

[19] Клочков М.А. Одноранговые возмущения одного класса дифференциальных операторов // Тезисы докладов 4-й Российской университетско-академической научно-практической конференции. Часть 6. Ижевск: Изд-во Удм. Ун-та, 1999. С. 23.

[20] Клочков М.А. Возмущения минимального ранга для оператора Бельтрами // "Понтрягинские чтения-XI." Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2000. С.82.

[21] Клочков М.А. Оценка нормы возмущений минимального ранга// Вестник Тамбовского университета. Т.5, вып.4, 2000. С.459.

[22] Клочков М.А. Возмущения минимального ранга для обыкновенных дифференциальных уравнений // Удм. гос. ун-т.-Ижевск, 2001.- 18с. Деп. в ВИНИТИ. 23.01.01, №196-В01.

[23] Клочков М.А. Конструкции конечномерных возмущений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2001, №3. С.59-64.

[24] Клочков М.А. Управление колебаниями прямоугольной мембраны // Пятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция. Ижевск, 2001. Т.10. С.11-13.

[25] Клочков М.А. Управление колебаниями струны // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2001. С.136-137.

[26] Клочков М.А. Управление колебаниями струны // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2002, №1. С.33-42.

[27] Клочков М.А. Оценка точности вычисления конечномерных возмущений// Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции.—Воронеж, ВГУ, 2003. С.125-126.

[28] Клочков М.А. Описание класса всех одноранговых возмущений дискретного спектра // Современные методы теории краевых задач. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2004. С.111-112.

[29] Коротков В.Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.

[30] Лакс и Филлипс. Теория рассеяния, М.: Мир, 1971.

[31] Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1988.

[32] Моисеев Е.И. О представлении решения задачи Трикоми в виде биортогонального ряда // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 7. 1229-1237.

[33] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[34] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.

[35] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

[36] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1, М.: Мир, 1982.

[37] Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[38] Сигалов М.Г. Интегральные возмущения, Сибирский мат. ж., 7 (1966), № 2, 375-408.

[39] Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.

[40] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

[41] Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. М.: ЛБЗ, 2001.

[42] Фок В.А. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.

[43] Якубович В.А., Якубович Е.Д. Эквивалентные обратные связи в линейных стационарных системах управления // Автоматика и телемеханика, 1984, №2. 54-65.

[44] A. A. Abramov, A. Aslanyan, E. B. Davies. Bounds on complex eigenvalues and resonances // http://front.math.ucdavis.edu/math.SP/9911238

[45] Balas M.J. Математическая структура задачи управления линейными распределёнными системами с помощью конечномерной обратной связи // Lect. Notes and Contr. Inf. Sci. 1983, 54, 1-34.

[46] Benzinger H.E. A canonical form for a class of ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 63 Number 2 (1977), 281-286.

[47] Clarke B.M.N. Размещение собственных значений расширенных гиперболических систем с помощью обратной связи // J. Math. Anal. and Appl. 1983, 97, №2, 417-440.

[48] Joyce R. McLaughlin and Arturo Portnoy. Perturbation expansions for eigenvalues and eigenvectors for a rectangular membrane subject to a restorative force // Electronic research announcements of the AMS. Volume 3, p. 72-77(August 19,1997)

[49] Moroz A.I. Оптимальная обратная связь для линейных нестационарных систем // Int. J. Contr. 1984, 39, №5, 929-938.

[50] Poltoratski A. G. Canonical systems and finite rank perturbations of spectra // http://front.math.ucdavis.edu/math.SP/9606214

[51] Rakosevich V. Extremal perturbations of bounded operators // IX Conference on Applied Mathematics D. Herceg, Lj. Cvetkovich, eds. Institute of mathematics Novi Sad, 1995, 209-212

[52] Rafael del Rio, B. Simon. Point spectrum and mixed spectral types for rank one perturbations // Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 3593-3599.

[53] Reid Russel M. Управление с обратной связью собственными значениями осциллятора в гильбертовом пространстве // Int. J. Contr. 1983, 38, №1, 237-244.

[54] Sakawa Y. Стабилизация линейных диффузионных систем с помощью обратной связи // SIAM J. Contr. and Optim. 1983, 21, №5, 667-676.

[55] B. Simon. Spectral analysis of rank one perturbations and applications, in CRM Proc. and Lecture Notes, Vol. 8, pp. 109-149, Amer. Math. Society, Providence, RI, 1995.