Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 1. С. 53–74.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 70H20; 70H06; 37K10

О квадратурах интегрируемых систем на сфере с интегралами движения старших степеней

В. А. Худобахшов, А. В. Цыганов

Данная работа посвящена построению квадратур для некоторых интегрируемых систем на двумерной единичной сфере с гамильтонианом натурального вида и вторым интегралом движения третьей или четвертой степени по импульсам.

Ключевые слова: интегрируемые системы, разделение переменных, уравнения Абеля

1. Введение

В ряде работ [19–23, 25] были построены новые переменные разделения для нескольких интегрируемых систем натурального вида на двумерной единичной сфере, обладающих интегралами движения третьей и четвертой степени по импульсам. Основной целью этих работ было развитие аппарата бигамильтоновой геометрии, позволяющего вычислять переменные разделения и разделенные уравнения, используя при этом только выражения для интегралов движения и определение кинематической скобки Пуассона, относительно которой они находятся в инволюции.

В данной работе мы сосредоточимся на построении отображений исходных физических переменных в переменные разделения и построении обратных отображений, на вычислении соответствующих квадратур Абеля–Якоби и на обсуждении возможных интегрируемых деформаций исходных систем, отвечающих алгебраическим кривым третьего рода.

После этого мы планируем провести численный и алгебро-геометрический анализ полученных квадратур, для того чтобы понять все возможности используемого математического аппарата для исследования механических систем.

Получено 14 марта 2011 года
После доработки 27 марта 2011 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для господдержки научных исследований под руководством ведущих ученых в российских ОУВПО (№ 11.G34.31.0039).

Худобахшов Виталий Алибахшович
vitaly.khudobakhshov@gmail.com
Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9

Так как рассматриваемые системы тесно связаны с динамикой твердого тела, то в качестве исходных физических координат мы будем использовать вектор углового момента $J=(J_1,J_2,J_3)$ и вектор Пуассона $x=(x_1,x_2,x_3)$ в подвижной системе координат, связанной с главными осями инерции [2]. Скобки Пуассона между этими переменными

$$\{J_i,J_j\}=\varepsilon_{ijk}J_k,\qquad \{J_i,x_j\}=\varepsilon_{ijk}x_k,\qquad \{x_i,x_j\}=0 \tag{1.1}$$

являются скобками Ли–Пуассона на алгебре Ли $e^*(3)$. Как обычно, используя функцию Гамильтона H и скобку Пуассона (1.1) на алгебре $e^*(3)$ группы движений трехмерного евклидова пространства, исходные уравнения Эйлера–Пуассона можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot J_i=\{J_i,H\},\qquad \dot x_i=\{x_i,H\}. \tag{1.2}$$

Напомним, что гамильтонова динамика на алгебре $e^*(3)$ в общем случае получается в результате редукции относительно симметрий евклидовой группы $E(3)$ на 12-мерном фазовом пространстве $T^*E(3)$ [2].

Геометрические интегралы уравнений Эйлера–Пуассона

$$C_1=|x|^2\equiv\sum_{k=1}^3 x_k^2,\qquad C_2=\langle x,J\rangle\equiv\sum_{k=1}^3 x_kJ_k, \tag{1.3}$$

где $\langle.,.\rangle$ обозначает скалярное произведение, являются элементами Казимира для данной скобки Пуассона. Используя каноническое преобразование $x\to\alpha x$, всегда можно положить $C_1=1$, так что всюду далее мы будем считать x вектором единичной длины.

Если интеграл площадей $C_2=\langle x,J\rangle$ равен нулю, то вместо динамики твердого тела можно рассматривать движение точки по поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^2$ [2]. Далее мы будем использовать стандартные сферические координаты на ее кокасательном расслоении $T^*\mathbb{S}^2$

$$\begin{array}{lll} x_1=\sin\phi\sin\theta, & x_2=\cos\phi\sin\theta, & x_3=\cos\theta,\\ J_1=\dfrac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}\,p_\phi-\cos\phi\,p_\theta, & J_2=\dfrac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}\,p_\phi+\sin\phi\,p_\theta, & J_3=-p_\phi, \end{array} \tag{1.4}$$

для описания канонических переменных разделения.

Как обычно, все интегралы движения представлены с точностью до линейных канонических преобразований, которые состоят из вращений

$$x\to\alpha U\,x,\qquad J\to U\,J, \tag{1.5}$$

где α — произвольный параметр, а U — ортогональная матрица с постоянными элементами, и сдвигов

$$x\to x,\qquad J\to J+S\,x, \tag{1.6}$$

где S — произвольная кососимметричная постоянная матрица размером 3×3 .

Кроме того, любые каноническое преобразования сферических переменных (1.4) также порождают автоморфизмы $e^*(3)$. Например, тривиальное каноническое преобразование

$$p_\theta\to p_\theta+f(\theta) \tag{1.7}$$

приводит к «обобщенному» сдвигу, зависящему от произвольной функции $f(x_3)$:

$$J_1\to J_1-\frac{x_2f(x_3)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\qquad J_2\to J_2+\frac{x_1f(x_3)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}. \tag{1.8}$$

Это и более сложные канонические преобразования алгебры $e^*(3)$ подробно обсуждаются в работах [2, 11].

2. Волчок Ковалевской и система Чаплыгина

Следуя [19–21, 23], определим новые вещественные координаты $q_{1,2}$ на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{S}^2$, в виде корней следующего полинома

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= (\lambda-q_1)(\lambda-q_2) = \lambda^2 - \frac{p_\theta^2\sin^2\theta + p_\phi^2\cos^2\theta}{\sin^\alpha\theta\cos^2\theta}\,\lambda - a^2 - b^2 - \\ &- \frac{(a\cos\alpha\phi - b\sin\alpha\phi)(p_\theta^2\sin^2\theta + p_\phi^2\cos^2\theta)}{\sin^\alpha\theta\cos^2\theta} - \frac{2\sin\theta(a\sin\alpha\phi + b\cos\alpha\phi)p_\phi\, p_\theta}{\sin^\alpha\theta\cos^2\theta}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Если ввести еще один вспомогательный полином

$$A(\lambda) = \frac{\sin\theta p_\theta}{\alpha\cos\theta}\,\lambda + \frac{a\sin\alpha\phi + b\cos\alpha\phi}{\alpha}\,p_\phi - \frac{\sin\theta(a\cos\alpha\phi - b\sin\alpha\phi)}{\alpha\cos\theta}\,p_\theta,$$

такой, что

$$\{B(\lambda), A(\mu)\} = \frac{1}{\lambda-\mu}\Big((\mu^2-a^2-b^2)B(\lambda) - (\lambda^2-a^2-b^2)B(\mu)\Big), \qquad \{A(\lambda), A(\mu)\} = 0,$$

то

$$p_j = -\frac{1}{u_j^2-a^2-b^2}\,A(\lambda=q_j), \qquad j=1,2, \tag{2.2}$$

являются канонически сопряженными импульсами к координатам $q_{1,2}$:

$$\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_1,q_2\} = \{p_1,p_2\} = 0.$$

Далее мы докажем, что в случае $\alpha = 1, 2$ эти вещественные переменные являются переменными разделения для волчка Ковалевской и системы Чаплыгина соответственно.

2.1. Волчок Ковалевской

Начнем с волчка Ковалевской, для которого интегралы движения имеют вид

$$\begin{aligned} H_1 &= J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2bx_1, \\ H_2 &= (J_1^2+J_2^2)^2 - 4b\Big(x_1(J_1^2-J_2^2) + 2x_2J_1J_2\Big) - 4b^2x_3^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В своей оригинальной работе Ковалевская сначала определяет комплексные переменные

$$\mathrm{z}_1 = J_1 + iJ_2, \qquad \mathrm{z}_2 = J_1 - iJ_2,$$

а затем сразу определяются переменные разделения

$$s_{1,2} = \frac{R(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2) \pm \sqrt{R(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_1)R(\mathrm{z}_2,\mathrm{z}_2)}}{2(\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_2)^2},$$

соответствующий полином четвертой степени $R(\mathrm{z}_i,\mathrm{z}_k)$ можно найти в [2, 13]. В этих новых переменных уравнения движения (1.2) имеют следующий вид:

$$(-1)^k\,(s_1-s_2)\dot{s}_k = \sqrt{P(s_k)}, \qquad k=1,2,$$

где

$$P(s)=4\left((s-H_1)^2-\frac{H_2+4b^2C_1}{4}\right)\left[s\left((s-H_1)^2+b^2C_1-\frac{H_2+4a^2C_1}{4}\right)+b^2C_2\right]. \qquad (2.4)$$

Таким образом, исходные уравнения движения приводятся к гиперэллиптическим квадратурам

$$\begin{aligned}\frac{\dot s_1}{\sqrt{P(s_1)}}+\frac{\dot s_2}{\sqrt{P(s_2)}} &= 0,\\ \frac{s_1\dot s_1}{\sqrt{P(s_1)}}+\frac{s_2\dot s_2}{\sqrt{P(s_2)}} &= \mathrm{i}.\end{aligned}$$

Подставляя сопряженные моменты p_{s_k} вместо $\sqrt{P(s_k)}$, мы получим квадратуры и разделенные уравнения в терминах канонических переменных разделения. Решая проблему Якоби об обращении отображения Абеля, мы проинтегрируем данные квадратуры в терминах гиперэллиптических функций второго рода от времени. После этого мы должны подставить полученные функции от времени $s_k(t)$ и $p_{s_k}(t)$ в начальные переменные x, J. Соответствующие выражения можно найти в работах [12, 13].

Обсуждение других переменных разделения для некоторых частных случаев в задаче Ковалевской можно найти в [2]. Как обычно, различные переменные разделения связаны с различными интегрируемыми деформациями исходных интегралов движения.

2.1.1. Новые вещественные переменные разделения для случая $C_2 = 0$

Согласно [23] , в случае $\alpha = 1$ координаты $q_{1,2}$ (2.1) являются переменными разделения для уравнения Гамильтона–Якоби при

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + +2ax_2 + 2bx_1.$$

Данная функция Гамильтона приводится к гамильтониану H_1 (2.3) поворотом (1.5) вокруг третьей оси координат [2, 11]. Поэтому мы положим $a = 0$ в определении координат (2.1).

В этом случае при $\alpha = 1$ и $a = 0$ новые координаты $q_{1,2}$ (2.1) являются корнями следующего полинома второй степени по λ:

$$B(\lambda)=(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)=\lambda^2+\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(J_1^2+J_2^2)}{x_3^2}-\frac{b\Big(x_1(J_1^2-J_2^2)+2x_2J_1J_2\Big)}{x_3^2}-b^2,$$

а сопряженные им моменты $p_{1,2}$ равны

$$p_k=-\frac{A(\lambda=q_k)}{q_k^2-b^2}, \qquad A(\lambda)=\frac{x_1J_2-x_2J_1}{x_3}\,\lambda+\frac{b\sqrt{x_1^2+x_2^2}J_2}{x_3}.$$

Исходные физические переменные выражаются через эти канонические переменные следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b^2-q_1q_2}{b(q_1-q_2)^2}\Big((b^2-q_1^2)p_1^2+(b^2-q_2^2)p_2^2\Big)-\frac{2(b^2-q_1^2)(b^2-q_2^2)}{b(q_1-q_2)^2}\,p_1p_2,\\
x_2 &= -\frac{\sqrt{(q_1^2-b^2)(b^2-q_2^2)}}{b(q_1-q_2)^2}\Big(b^2(p_1-p_2)^2-(p_1q_1-p_2q_2)^2\Big),\\
x_3 &= \sqrt{1-\frac{(b^2-q_1^2)^2p_1^4+(b^2-q_2^2)^2p_2^4}{(q_1-q_2)^2}+\frac{2(b^2-q_1^2)(b^2-q_2^2)p_1^2p_2^2}{(q_1-q_2)^2}},\\
J_1 &= \frac{\sqrt{(q_1^2-b^2)(b^2-q_2^2)}(p_1q_1-p_2q_2)}{(b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2}\,\frac{x_3}{b},\\
J_2 &= -\frac{q_2(b^2-q_1^2)p_1-q_1(b^2-q_2^2)p_2}{(b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2}\,\frac{x_3}{b},\\
J_3 &= -\sqrt{(q_1^2-b^2)(b^2-q_2^2)}\,\frac{p_1-p_2}{q_1-q_2}.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Областью определения координат $q_{1,2}$ является интервал

$$q_1>b>q_2,$$

аналогично стандартным эллиптическим координатам на сфере [2].

В этих переменных интегралы движения $H_{1,2}$ (2.3) выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
H_1 \;&=\; \frac{(b^2-q_1^2)^2p_1^4-(b^2-q_2^2)^2p_2^4-(q_1^2-q_2^2)}{(b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2},\\
H_2 \;&=\; \frac{\Big((b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2+q_1+q_2\Big)\Big((b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2-q_1-q_2\Big)}{(b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2}\times\\
&\times\;\Big((b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2+q_1-q_2\Big)\Big((b^2-q_1^2)p_1^2-(b^2-q_2^2)p_2^2-q_1+q_2\Big).
\end{aligned}
$$

Теперь нам легко доказать, что интегралы движения и новые вещественные переменные разделения удовлетворяют разделенным уравнениям

$$\Phi=\Big(2(q^2-b^2)p^2+H_1+\sqrt{H_2}\Big)\Big(2(q^2-b^2)p^2+H_1-\sqrt{H_2}\Big)-4q^2=0 \tag{2.6}$$

при $q=q_{1,2}$ и $p=p_{1,2}$. Уравнение $\Phi(q,p)=0$ с вещественными коэффициентами определяет гиперэллиптическую кривую третьего рода со стандартным базисом голоморфных дифференциалов

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 \;&=\; \frac{dq}{p(b^2-q^2)\Big(H_1-2(b^2-q^2)p^2\Big)},\qquad \Omega_2=\frac{qdq}{p(b^2-q^2)\Big(H_1-2(b^2-q^2)p^2\Big)},\\
\Omega_3 \;&=\; \frac{pdq}{H_1-2(b^2-q^2)p^2}.
\end{aligned}
$$

Заметим, что на самом деле уравнение (2.6) инвариантно относительно инволюции $(q,p)\to$ $\to(-q,p)$; факторизация с учетом этой инволюции приводит нас к эллиптической кривой вместо кривой третьего рода. Тем самым, мы можем предположить, что решение уравнений движения для волчка Ковалевской при нулевом значении интеграла площадей будет выражаться через эллиптические функции времени.

В переменных разделения уравнения движения (1.2) имеют вид

$$\frac{\dot q_1}{p_1(b^2-q_1^2)\Big(H_1-2(b^2-q_1^2)p_1^2\Big)}+\frac{\dot q_2}{p_2(b^2-q_2^2)\Big(H_1-2(b^2-q_2^2)p_2^2\Big)}=0,$$
$$\frac{\dot q_1}{H_1-2(b^2-q_1^2)p_1^2}+\frac{\dot q_2}{H_1-2(b^2-q_2^2)p_2^2}=-2.$$

Эти квадратуры в интегральной форме

$$\int_{q_0}^{q_1}\Omega_1+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_1=\beta_1,\qquad \int_{q_0}^{q_1}\Omega_3+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_3=-2t+\beta_2 \tag{2.7}$$

представляют собой отображение Абеля–Якоби на гиперэллиптической кривой, определяемой уравнением $\Phi(q,p)=0$. В частности, это означает, что вместо p в выражения для дифференциалов $\Omega_{1,3}$ (2.7) мы должны подставить функцию $p(q)$ от q и интегралов движения, полученную из уравнения (2.6).

Для того чтобы получить явное решение в тета-функциях, можно применить метод корневых функций [5, 8, 27]. Тем самым, обращая отображение (2.7) и подставляя симметрические функции от q_1,q_2,p_1,p_2 в (2.5), мы окончательно получим выражения для исходных физических переменных x,J как функций от переменной времени и констант Якоби $\beta_{1,2}$.

2.1.2. Деформации волчка Ковалевской

Согласно [20, 23], решая разделенные уравнения

$$\Phi_1=\Big(2(q^2-a^2)p^2+\widehat H_1+\sqrt{\widehat H_2}\Big)\Big(2(q^2-a^2)p^2+\widehat H_1-\sqrt{\widehat H_2}\Big)-4cu^2+4du+e(q^2-a^2)p=0, \tag{2.8}$$

при $q=q_{1,2}$ и $p=p_{1,2}$, относительно $\widehat H_{1,2}$, мы можем построить интегрируемую деформацию исходного гамильтониана

$$\widehat H_1=\left(1-\frac{c-1}{x_3^2}\right)(J_1^2+J_2^2)+2J_3^2+2bx_1+\frac{d}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}+\frac{e(x_2J_1-x_1J_2)}{4\sqrt{(x_1^2+x_2^2}x_3}. \tag{2.9}$$

Второй интеграл движения при этом равен

$$\begin{aligned}\widehat H_2=&\frac{(x_3^2+c-1)^2}{x_3^4}(J_1^2+J_2^2)^2-\left(\frac{4(x_1J_1^2-x_1J_2^2+2x_2J_1J_2)(x_3^2+c-1)}{x_3^2}+\frac{J_2\sqrt{x_1^2+x_2^2}e}{x_3}\right)a-\\&-4(x_3^2+c-1)a^2+\left(\frac{(2(J_1^2+J_2^2)(c-x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,x_3^2}+\frac{(x_2J_1-x_1J_2)e}{2(x_1^2+x_2^2)x_3}\right)d+\frac{d^2}{x_1^2+x_2^2}+\\&+\frac{(J_1^2+J_2^2)(x_2J_1-x_1J_2)(c-x_1^2-x_2^2)e}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}x_3^3}+\frac{(x_2J_1-x_1J_2)^2e^2}{16(x_1^2+x_2^2)x_3^2}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Согласно [11, 23], каноническое преобразование (1.8) приводит данную функцию Гамильтона (2.9) к натуральному виду

$$\widehat{H}_1 = \left(1 - \frac{c-1}{x_3^2}\right)(J_1^2 + J_2^2) + 2J_3^2 + 2ax_1 + \frac{d}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \frac{e^2}{64(x_3^2 + c - 1)}, \tag{2.11}$$

при

$$f(x_3) = \frac{ex_3}{8(x_3^2 + c - 1)}.$$

При $c = 1$ система совпадает с одной из деформаций волчка Ковалевской, рассматриваемых в [29].

Всюду далее, при рассмотрении подобных интегрируемых деформаций, мы будем выписывать только окончательную форму (2.11) получаемых функций Гамильтона, опуская для краткости промежуточную форму (2.9).

В переменных разделения уравнения движения имеют вид

$$\frac{\dot{q}_1}{(b^2 - q_1^2)\Big(8\widehat{H}_1 p_1 + e - 16p_1^3(b^2 - q_1^2)\Big)} + \frac{\dot{q}_2}{p_2(b^2 - q_2^2)\Big(8\widehat{H}_1 p_2 + e - 16p_2^3(b^2 - q_2^2)\Big)} = 0,$$

$$\frac{\dot{q}_1}{8\widehat{H}_1 p_1 + e - 16p_1^3(b^2 - q_1^2)} + \frac{\dot{q}_2}{8\widehat{H}_1 p_2 + e - 16p_2^3(b^2 - q_2^2)} = -\frac{1}{4},$$

а соответствующее отображение Абеля–Якоби на гиперэллиптической кривой третьего рода формально дается теми же выражениями, что и ранее (2.7):

$$\int_{q_0}^{q_1} \Omega_1 + \int_{q_0}^{q_2} \Omega_1 = \beta_1, \qquad \int_{q_0}^{q_1} \Omega_3 + \int_{q_0}^{q_2} \Omega_3 = -2t + \beta_2.$$

Здесь

$$\Omega_1 = \frac{dq}{(b^2 - q^2)(8\widehat{H}_1 p + e - 16p^3(b^2 - q^2))}, \qquad \Omega_3 = \frac{dq}{8\widehat{H}_1 p + e - 16p^3(b^2 - q^2)},$$

а p — это решение $p(q)$ нового разделенного уравнения (2.8).

2.2. Система Чаплыгина

Системой Чаплыгина будем называть интегрируемую систему с функцией Гамильтона

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 - 2a(x_1^2 - x_2^2) - 2bx_1x_2 - \frac{c}{x_3^2}, \tag{2.12}$$

так как при $c = 0$ эта система и переменные разделения для нее были построены Чаплыгиным в работе [6]. Сингулярное слагаемое к гамильтониану было добавлено Горячевым в работе [10].

Используя поворот (1.5) вокруг третьей оси [2, 11], мы можем всегда положить $b = 0$. В этом случае второй интеграл движения равен

$$H_2 = \left(J_1^2 + J_2^2 - \frac{c}{x_3^2}\right)^2 - 4ax_3^2(J_1^2 - J_2^2) + 4a^2x_3^4.$$

Согласно [19, 23], координаты $q_{1,2}$ (2.1) являются переменными разделения для данной интегрируемой системы при $\alpha = 2$ и $b = 0$.

В этом случае $q_{1,2}$ будут корнями полинома (2.1)

$$B(\lambda) = (\lambda - q_1)(\lambda - q_2) = \lambda^2 - \frac{J_1^2 + J_2^2}{x_3^2}\,\lambda - \frac{2aJ_2^2}{x_3^2} + \frac{a(J_1^2 + J_2^2)}{x_3^2} - a^2,$$

а сопряженные импульсы $p_{1,2}$ (2.2) определяются значениями вспомогательного полинома первого порядка по λ

$$A(\lambda) = -\frac{x_2J_1 - x_1J_2}{2x_3}\,\lambda - \frac{ax_1x_2J_3}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{a(x_1^2 - x_2^2)(x_2J_1 - x_1J_2)}{2(x_1^2 + x_2^2)x_3}$$

в точках $\lambda = q_{1,2}$.

Исходные физические переменные в терминах переменных разделения имеют вид

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\sqrt{2(q_1 - a)(a - q_2)}\,(p_1(q_1 + a) - p_2(q_2 + a))}{\sqrt{a}(q_1 - q_2)},\\
x_2 &= \frac{\sqrt{2(q_1 + a)(q_2 + a)}\,(p_1(q_1 - a) - p_2(q_2 - a))}{\sqrt{a}(q_1 - q_2)},\\
x_3 &= \sqrt{1 - 4\frac{(q_1^2 - a^2)p_1^2 - (q_2^2 - a^2)p_2^2}{q_1 - q_2}},\\
J_1 &= \sqrt{\frac{(a + q_1)(a + q_2)}{2a}}\,x_3, \qquad J_2 = -\sqrt{\frac{(q_1 - a)(a - q_2)}{2a}}\,x_3,\\
J_3 &= -2\sqrt{(q_1^2 - a^2)(a^2 - q_2^2)}\,\frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Областью определения новых координат является

$$q_1 > a > q_2.$$

В терминах переменных разделения интегралы движения равны

$$\begin{aligned}
H_1 &= 4(a^2 - q_1^2)p_1^2 + 4(a^2 - q_2^2)p_2^2 + q_1 + q_2 - \frac{c}{4(a^2 - q_1^2)p_1^2 - 4(a^2 - q_2^2)p_2^2 + q_1 - q_2},\\
H_2 &= \Big(4(a^2 - q_1^2)p_1^2 - 4(a^2 - q_2^2)p_2^2 + q_1 - q_2\Big)^2 + \frac{c^2(q_1 - q_2)^2}{\Big(4(a^2 - q_1^2)p_1^2 - 4(a^2 - q_2^2)p_2^2 + q_1 - q_2\Big)^2} -\\
&- 2c(q_1 + q_2).
\end{aligned}$$

Данные интегралы движения и вещественные переменные разделения удовлетворяют разделенным уравнениям

$$\Phi = \Big(8(q^2 - a^2)p^2 - 2q + H_1 - \sqrt{H_2}\Big)\Big(8(q^2 - a^2)p^2 - 2q + H_1 + \sqrt{H_2}\Big) - 4cq = 0, \tag{2.14}$$

при $q = q_{1,2}$ и $p = p_{1,2}$. Уравнение $\Phi(q, p) = 0$ с вещественными коэффициентами определяет алгебраическую кривую второго рода со следующим базисом голоморфных дифференциалов:

$$\Omega_1 = \frac{dq}{p(a^2 - q^2)\Big(H_1 - 8(a^2 - q^2)p^2 - 2q\Big)}, \qquad \Omega_2 = \frac{\Big(4(a^2 - q^2)p^2 + q\Big)dq}{p(a^2 - q^2)\Big(H_1 - 8(a^2 - q^2)p^2 - 2q\Big)}. \tag{2.15}$$

Соответствующие квадратуры равны

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot q_1}{p_1(a^2-q_1^2)\Big(H_1-8(a^2-q_1^2)p_1^2-2q_1\Big)}+\frac{\dot q_2}{p_2(a^2-q_2^2)\Big(H_1-8(a^2-q_2^2)p_2^2-2q_2\Big)} &= 0,\\
\frac{\Big(4(a^2-q_1^2)p_1^2+q_1\Big)\dot q_1}{p_1(a^2-q_1^2)\Big(H_1-8(a^2-q_1^2)p_1^2-2q_1\Big)}+\frac{\Big(4(a^2-q_2^2)p_2^2+q_2\Big)\dot q_2}{p_2(a^2-q_2^2)\Big(H_1-8(a^2-q_2^2)p_2^2-2q_2\Big)} &= 8.
\end{aligned}
$$

Отображение Абеля-Якоби на гиперэллиптической кривой рода второго имеет стандартную форму

$$
\int_{q_0}^{q_1}\Omega_1+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_1=\beta_1,\qquad \int_{q_0}^{q_1}\Omega_2+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_2=8t+\beta_2,
$$

где p в $\Omega_{1,2}$ является решением разделенного уравнения (2.14).

2.2.1. Деформации системы Чаплыгина

Согласно [19, 23], если мы подставим эти переменные разделения в следующие разделенные уравнения

$$
\Phi_1=\Big(8(q^2-a^2)p^2-2dq+\widehat H_1-\sqrt{\widehat H_2}\Big)\Big(8(q^2-a^2)p^2-2dq+\widehat H_1+\sqrt{\widehat H_2}\Big)-4cq+e(q^2-a^2)p=0, \tag{2.16}
$$

то получим функцию Гамильтона обобщенной системы Чаплыгина

$$
\widehat H_1=\left(1-\frac{1-d}{x_3^2}\right)(J_1^2+J_2^2)+2J_3^2-2a(x_1^2-x_2^2)-2bx_1x_2-\frac{c}{d-1+x_3^2}+\frac{(x_2J_1-x_1J_2)e}{8(d-x_1^2-x_2^2)x_3}. \tag{2.17}
$$

Как и для случая волчка Ковалевской, используя каноническое преобразование (1.8) с функцией

$$
f(x_3)=\frac{ex_3\sqrt{1-x_3^2}}{16(d-1+x_3^2)^2},
$$

мы можем преобразовать функцию Гамильтона (2.17) к натуральному виду

$$
\widehat H_1=\left(1-\frac{1-d}{x_3^2}\right)(J_1^2+J_2^2)+2J_3^2-2a(x_1^2-x_2^2)-2bx_1x_2-\frac{c}{d-1+x_3^2}+\frac{e(x_3^2-1)}{256(d-1+x_3^2)^3}.
$$

При $d=1$ дополнительный член равен $e(x_3^{-4}-x_3^{-6})$, и такая система совпадает с одной из деформаций, рассмотренных в [29].

Деформация (2.17) связана с гиперэллиптической кривой третьего рода с голоморфными дифференциалами

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \frac{dq}{(a^2-q^2)\Big(e+32p\big(\widehat H_1-8(a^2-q^2)p^2-2dq\big)\Big)},\\
\Omega_2 &= \frac{qdq}{(a^2-q^2)\Big(e+32p\big(\widehat H_1-8(a^2-q^2)p^2-2dq\big)\Big)},\\
\Omega_3 &= \frac{p^2dq}{e+32p\big(\widehat H_1-8(a^2-q^2)p^2-2dq\big)},
\end{aligned}
$$

которые все входят в соответствующие квадратуры

$$\int_{q_0}^{q_1}\Omega_1+\int_{q_0}^{q_2}\Omega_1=\beta_1,\qquad \int_{q_0}^{q_1}(4\Omega_2+d\Omega_3)+\int_{q_0}^{q_2}(4\Omega_2+d\Omega_3)=-\frac{t}{4}+\beta_2,$$

в отличие от других интегрируемых систем, связанных с алгебраическими кривыми третьего рода, рассмотренных в этой статье.

3. Интегрируемые системы, связанные с тригональными кривыми

Следуя работам [23, 25, 26], введем комплексные координаты $q_{1,2}$ на том же самом фазовом пространстве $T^*\mathbb{S}^2$ как корни другого полинома второго порядка по λ

$$B(\lambda)=(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)=\lambda^2-\mathrm{i}\sqrt{F}\lambda+\Lambda,\qquad \mathrm{i}=\sqrt{-1},\tag{3.1}$$

коэффициенты которого

$$F=\Big(g(\theta)p_\theta-\mathrm{i}h(\theta)p_\phi\Big)^2,\qquad \Lambda=\alpha\,\exp\left(\mathrm{i}\phi-\int\frac{h(\theta)}{g(\theta)}\,d\theta\right)\tag{3.2}$$

зависят от произвольных функций $g(\theta)$ и $h(\theta)$. Сопряженные импульсы $p_{1,2}$ при этом равны

$$p_k=A(\lambda=q_k),\qquad A(\lambda)=\mathrm{i}\int\frac{d\theta}{g(\theta)}-\frac{\mathrm{i}p_\phi}{\lambda}.\tag{3.3}$$

Легко доказать, что эти полиномы удовлетворяют соотношениям

$$\{B(\lambda),A(\mu)\}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left(\frac{B(\lambda)}{\lambda}-\frac{B(\mu)}{\mu}\right),\qquad \{A(\lambda),A(\mu)\}=\{B(\lambda),B(\mu)\}=0,\tag{3.4}$$

которые гарантируют, что исходные скобки Пуассона между новыми переменными являются каноническими:

$$\{q_i,p_j\}=\delta_{ij},\quad \{q_1,q_2\}=\{p_1,p_2\}=0.$$

Подставляя эти канонические переменные

$$x=a\,q_k^{-1},\qquad z=a_0p_k,\qquad k=1,2,\qquad a,a_0\in\mathbb{R},\tag{3.5}$$

в общее уравнение алгебраической кривой (3,4)-типа

$$\Phi(z,x)=z^3+(a_1x+a_2)z^2+(H_1x^2+b_1x+b_2)z+x^4+H_2x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0\tag{3.6}$$

и решая полученную систему разделенных уравнений относительно $H_{1,2}$, мы получим следующую функцию Гамильтона:

$$H_1=T+V+\left(\frac{c_2+\mathrm{i}a_0b_1w_2-a_0^2a_1w_2^2}{a_0aw_2}h+\frac{2a_0a_1w_2-\mathrm{i}b_1}{aw_2}\right)\mathrm{i}p_\phi-\frac{gw_2(c_2+\mathrm{i}a_0b_1w_2-a_0^2a_1w_2^2)}{aa_0}p_\theta,\tag{3.7}$$

где гамильтониан T, отвечающий движению по геодезическим, и потенциал V равны

$$T\;=\;\left(\frac{a_0^2(h^2w_2^2-3hw_2+3)}{a^2}-\frac{\mathrm{i}a_0a_2(hw_2-1)^2}{a^2w_2}-\frac{b_2h(hw_2-1)}{a^2w_2}+\frac{\mathrm{i}c_3h^2}{a_0a^2w_2}\right)p_\phi^2+$$

$$
\begin{aligned}
&+\ \frac{\mathrm{i}g}{a^2w_2}\left(\left(2a_0^2w_2^3-2\mathrm{i}a_0a_2w_2^2-2b_2w2+\frac{2\mathrm{i}c_3}{a_0}\right)h-3a_0^2w_2^2+2\mathrm{i}a_0a_2w_2+b_2\right)p_\phi p_\theta+\\
&+\ \frac{g^2(a_0b_2w_2+\mathrm{i}a_0^2a_2w_2^2-a_0^3w_2^3-\mathrm{i}c_3)}{a^2a_0w_2}p_\theta^2,\\
V\ &=\ -\frac{\mathrm{i}a^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{\alpha a_0w_1w_2}+\frac{(a_0b_2w_2+\mathrm{i}a_0^2a_2w_2^2-a_0^3w_2^3-\mathrm{i}c_3)\alpha w_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{a_0a^2w_2}+\frac{\mathrm{i}c_1}{a_0w_2}.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
w_1=\exp\left(-\int\frac{h(\theta)}{g(\theta)}\,d\theta\right),\qquad w_2=\int\frac{d\theta}{g(\theta)}.
$$

При этом второй интеграл движения H_2 является кубическим полиномом по импульсам p_ϕ и p_θ.

Полученный гамильтониан H_1 (3.7) является гамильтонианом натурального вида, если и только если

$$
2a_0a_1w_2-\mathrm{i}b_1=0,\quad c_2+\mathrm{i}a_0b_1w_2-a_0^2a_1w_2^2=0.
$$

Так как $w_2\neq 0$, то мы должны положить

$$
a_1=b_1=c_2=0.
$$

Если же мы хотим получить диагональную метрику, то нам необходимо дополнительно решить интегральное уравнение

$$
2h(a_0^3w_2^3-\mathrm{i}a_0^2a_2w_2^2-a_0b_2w_2+\mathrm{i}c_3)-3a_0^3w_2^2+2\mathrm{i}a_0^2a_2w_2+a_0b_2=0, \tag{3.8}
$$

относительно функций $h(\theta), w_2(\theta)$ и параметров a_0, a_2, b_2, c_3. Если при этом мы хотим получить также вещественный потенциал вида

$$
V=f_1(\theta)\cos(\phi)+f_2(\theta)
$$

в (3.7), то мы должны добавить еще одно уравнение к (3.8)

$$
\mathrm{i}\alpha^2(a_0^3w_2^3-\mathrm{i}a_0^2a_2w_2^2-a_0b_2w_2+\mathrm{i}c_3)w_1^2+a^4=0, \tag{3.9}
$$

зависящее дополнительно от функции w_1, параметров a (3.5) и α (3.2).

Некоторые частные решения этих уравнений были исследованы в работах [17, 23, 25], включая интегрируемые системы, полученные ранее Горячевым, Чаплыгиным и др. Для всех этих систем мы соберем значения a_0 и коэффициенты уравнения (3.8), равные нулю, в следующую таблицу:

Волчок Горячева–Чаплыгина	$a_0=2\mathrm{i}a$	$b_2=c_3=0$
Система Горячева	$a_0=2\mathrm{i}a/3$	$a_2=b_2=0$
Случай 3 из [17]	$a_0=\mathrm{i}a/3$	$a_2=b_2=0$
Система Дуллина–Матвеева	$a_0=\mathrm{i}a$	$c_3=0$
Случай 5 из [17]	$a_0=\mathrm{i}a/2$	$a_2=c_3=0$

Интегрируемые системы с совпадающими коэффициентами в разделенных уравнениях (3.6), но с отличными a_0 и a_0' в подстановках (3.5) связаны неканоническим преобразованием импульсов

$$z = a_0 p_k \to z = a_0' p_k, \qquad k = 1, 2. \tag{3.10}$$

Для всех этих систем разделенные уравнения задаются уравнением с вещественными коэффициентами, в которые мы подставляем комплексные переменные разделения.

3.1. Волчок Горячева–Чаплыгина

Волчок Горячева–Чаплыгина имеет следующие интегралы движения:

$$H_1 = J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + ax_1 + \frac{b}{x_3^2}, \qquad H_2 = 2J_3\left(J_1^2 + J_2^2 + \frac{b}{x_3^2}\right) + ax_3J_1. \tag{3.11}$$

В этом случае переменные разделения (3.1), (3.3) определяются соотношениями

$$q_1 + q_2 = -\frac{2J_3}{x_3^2} - \frac{J_1 + \mathrm{i}J_2}{x_3(x_1 + \mathrm{i}x_2)}, \qquad q_1q_2 = \frac{a}{2x_3^2(x_1 + \mathrm{i}x_2)}, \qquad p_{1,2} = \frac{\mathrm{i}x_3^2}{2} + \frac{\mathrm{i}J_3}{q_{1,2}}.$$

Выражения для исходных физических переменных через переменные разделения имеют вид

$$\begin{aligned}
x_1 + \mathrm{i}x_2 &= -\frac{\mathrm{i}a(q_1 - q_2)}{4q_1q_1(p_1q_1 - q_2p_2)}, \qquad x_3 = \sqrt{-\frac{2\mathrm{i}(p_1q_1 - q_2p_2)}{q_1 - q_2}},\\
J_1 + \mathrm{i}J_2 &= \frac{a(q_1^2p_1 - q_2^2p_2)}{2q_1q_2(p_1q_1 - q_2p_2)\sqrt{-\dfrac{2\mathrm{i}(p_1q_1 - q_2p_2)}{q_1 - q_2}}}, \qquad J_3 = \frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1 - p_2)}{q_1 - q_2},\\
x_1 - \mathrm{i}x_2 &= \frac{4q_1q_2}{a(q_1 - q_2)^2}, \Big((\mathrm{i} - 2p_1)q_1^2p_1 + (4p_1p_2 - \mathrm{i}p_1 - \mathrm{i}p_2)q_1q_2 + (\mathrm{i} - 2p_2)q_2^2p_2\Big),\\
J_1 - \mathrm{i}J_2 &= -\frac{8\mathrm{i}q_1q_2}{a(q_1 - q_2)^2\sqrt{-\dfrac{2\mathrm{i}(p_1q_1 - q_2p_2)}{q_1 - q_2}}}\Big(q_1p_1 - q_2p_2)(\mathrm{i} - 2p_1)p_1q_1^2 +\\
&+ (q_1p_1 + q_2p_2)(\mathrm{i} - 2p_2)p_2q_2^2\Big);
\end{aligned}$$

разделенные уравнения порождаются уравнением с вещественными коэффициентами

$$\Phi(q, \mu) = (\mu^2 - b)q^2 + (\mu^3 - H_1\mu + H_2)q + \frac{a^2}{4} = 0, \qquad q = q_{1,2}, \quad \mu = 2\mathrm{i}\, q_{1,2}p_{1,2}. \tag{3.12}$$

Уравнения движения в переменных разделения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{q_1}}{q_1(3\mu_1^2 + 2q_1\mu_1 - H_1)} + \frac{\dot{q_2}}{q_2(3\mu_2^2 + 2q_2\mu_2 - H_1)} &= 0,\\
\frac{\mu_1\dot{q_1}}{q_1(3\mu_1^2 + 2q_1\mu_1 - H_1)} + \frac{\mu_2\dot{q_2}}{q_2(3\mu_2^2 + 2q_2\mu_2 - H_1)} &= 2\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Замена переменных

$$q = \frac{a^2}{4x}, \qquad \mu = \frac{z}{x} \tag{3.13}$$

приводит кривую (3.12) к канонической форме (3.6) при

$$a_1 = b_1 = b_2 = c_2 = c_3 = 0,$$

тогда как остальные ненулевые параметры являются функциями от a, b и интегралов движения.

3.1.1. Деформация волчка Горячева–Чаплыгина

Подставляя $q = q_{1,2}$ и $\mu = 2\mathrm{i}\, q_{1,2} p_{1,2}$ в уравнение алгебраической кривой третьего рода

$$\Phi_1(q,\mu) = cq^3 + (\mu^2 + d\mu - b)q^2 + (\mu^3 + e\mu^2 - \widehat{H}_1\mu + \widehat{H}_2)q + \frac{a^2}{4} = 0 \tag{3.14}$$

и решая пару полученных уравнений относительно $\widehat{H}_{1,2}$, мы получим деформацию исходного гамильтониана

$$\widehat{H}_1 \;=\; J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + ax_1 + \frac{b}{x_3^2} - \left(e - \frac{c-d+e}{x_1^2+x_2^2} + \frac{c}{x_3^2} - \frac{2c}{x_3^4}\right) J_3 + \frac{(c - dx_3^2 + ex_3^4)^2}{4x_3^6(x_1^2+x_2^2)}.$$

Здесь мы приводим гамильтониан уже после дополнительного канонического преобразования (1.8) при

$$f = -\frac{\mathrm{i}(ex_3^4 - dx_3^2 + c)}{2\sqrt{1-x_3^2}\, x_3^3}.$$

Для данной деформации квадратуры имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2} \frac{\dot q_k}{q_k(3\mu_k^2 + 2\mu_k q_k + 2e\mu_k + dq_k - \widehat{H}_1)} = 0,\\ &\sum_{k=1}^{2} \frac{\mu_k \dot q_k}{q_k(3\mu_k^2 + 2\mu_k q_k + 2e\mu_k + dq_k - \widehat{H}_1)} = 2\mathrm{i}. \end{aligned} \qquad \mu_k = 2\mathrm{i}\, q_k p_k \tag{3.15}$$

В частном случае $c = 0$ и $d = e$ мы получаем обычный гиростат Горячева–Чаплыгина с гамильтонианом

$$\widehat{H}_1 = J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 - eJ_3 + ax_1 + \frac{b}{x_3^2},$$

но при этом уравнение (3.14) определяет гиперэллиптическую кривую второго рода вместо тригональной кривой третьего рода.

3.2. Система Горячева

Рассмотрим систему Горячева на сфере [9] с интегралами движения

$$\begin{aligned} H_1 &= J_1^2 + J_2^2 + \frac{4}{3}J_3^2 + \frac{ax_1}{x_3^{2/3}} + \frac{b}{x_3^{2/3}},\\ H_2 &= -\frac{2J_3}{3}\left(J_1^2 + J_2^2 + \frac{8}{9}J_3^2 + \frac{b}{x_3^{2/3}}\right) + \frac{a(3x_3J_1 - 2x_1J_3)}{3x_3^{2/3}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Переменные разделения $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ (3.1), (3.3) определены соотношениями

$$q_1+q_2=\frac{x_3^{4/3}J_3}{1-x_3^2}+\frac{\mathrm{i}(J_1x_2-x_1J_2)x_3^{1/3}}{1-x_3^2},\quad q_1q_2=\frac{a}{2(x_1+\mathrm{i}x_2)},\quad p_{1,2}=\frac{3\mathrm{i}x_3^{2/3}}{2}+\frac{\mathrm{i}J_3}{q_{1,2}},$$

а обратное преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
x_1+\mathrm{i}x_2 &= \frac{a}{2q_1q_2},\qquad J_3=\frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2},\\
x_1-\mathrm{i}x_2 &= 2\frac{q_1q_2(1-x_3^2)}{a},\qquad J_1+\mathrm{i}J_2=-\frac{a(q_1+q_2)}{2q_1q_2x_3^{1/3}},\\
J_1-\mathrm{i}J_2 &= -\frac{4\mathrm{i}q_1^2q_2^2(p_1-p_2)}{a(q_1-q_2)}\,x_3+\frac{2q_1q_2(1-x_3^2)(q_1+q_2)}{ax_3^{1/3}},
\end{aligned}\tag{3.17}$$

где

$$x_3=\left(-\frac{2\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{3(q_1-q_2)}\right)^{3/2}.$$

Разделенные уравнения задаются следующим уравнением с вещественными коэффициентами:

$$\Phi(q,\mu)=q^4-bq^2+(\mu^3-H_1\mu+H_2)q+\frac{a^2}{4}=0,\qquad q=q_{1,2},\quad \mu=\frac{2\mathrm{i}}{3}\,q_{1,2}p_{1,2}.\tag{3.18}$$

В этом случае квадратуры равны

$$\begin{aligned}
\int_{q_0}^{q_1}\frac{dq}{q(3\mu^2-H_1)}+\int_{q_0}^{q_2}\frac{dq}{q(3\mu^2-H_1)} &= \beta_1,\\
\int_{q_0}^{q_1}\frac{\mu dq}{q(3\mu^2-H_1)}+\int_{q_0}^{q_2}\frac{\mu dq}{q(3\mu^2-H_1)} &= \frac{2\mathrm{i}}{3}\,t+\beta_2.
\end{aligned}\tag{3.19}$$

Как обычно, здесь μ является функцией от q, полученной из разделенного уравнения (3.18).

3.2.1. Деформация системы Горячева

Используя для построения разделенных уравнений тригональную кривую третьего рода более общего вида

$$\Phi_1=q^4+cq^3-bq^2+(\mu^3+d\mu^2-\widehat{H}_1\mu+\widehat{H}_2)q+\frac{a^2}{4}=0,\tag{3.20}$$

вместо (3.18), мы получим следующую интегрируемую деформацию исходной функции Гамильтона (3.16):

$$\widehat{H}_1 = H_1-\left(\frac{d}{3}+\frac{d+cx_3^{2/3}}{x_1^2+x_2^2}\right)J_3+\frac{(c+dx_3^{4/3})^2}{4(x_1^2+x_2^2)x_3^{2/3}}\tag{3.21}$$

после канонического преобразования (1.8) при

$$f=-\frac{\mathrm{i}(c+dx_3^{4/3})}{2\sqrt{1-x_3^2}x_3^{1/3}}.$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\dot q_1}{q_1(3\mu_1^2+2d\mu_1-\widehat H_1)}+\frac{\dot q_2}{q_2(3\mu_2^2+2d\mu_2-\widehat H_1)}=0,\\ \frac{\mu_1\dot q_1}{q_1(3\mu_1^2+2d\mu_1-\widehat H_1)}+\frac{\mu_1\dot q_2}{q_2(3\mu_2^2+2d\mu_2-\widehat H_1)}=\frac{2\mathrm{i}}{3}.\end{gathered}\qquad \mu_k=\frac{2\mathrm{i}}{3}\,q_kp_k \tag{3.22}$$

Преобразование (3.13) приводит кривую (3.20) к канонической форме (3.6) при $a_2=b_1=$ $=b_2=0$.

3.3. Случай 3 из [17]

Рассмотрим еще одну систему из работы [17] с интегралами движения

$$\begin{aligned}&H_1=J_1^2+J_2^2+\left(\frac{1}{12}+\frac{(2x_3+1)}{2(x_3+1)}\right)J_3^2+\frac{ax_1}{(x_3+1)^{5/6}}+\frac{b}{(x_3+1)^{1/3}},\\ &H_2=\frac{1}{27}\,J_3^3-\frac13\,J_3H_1-a(x_3+1)^{1/6}\,J_1+\frac{ax_1J_3}{2(x_3+1)^{5/6}}.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Соответствующие переменные разделения $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ (3.1), (3.3) определяются соотношениями

$$q_1+q_2=-\frac{(1+x_3)^{2/3}J_3}{2(x_3-1)}-\frac{\mathrm{i}(x_2J_1-x_1J_2)}{(1+x_3)^{1/3}(x_3-1)},\quad q_1q_2=\frac{a\sqrt{1+x_3}}{2(x_1+\mathrm{i}x_2)},\quad p_{1,2}=3\mathrm{i}(1+x_3)^{1/3}+\frac{\mathrm{i}J_3}{q_{1,2}},$$

а обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}x_1+\mathrm{i}x_2&=\frac{a\sqrt{1+x_3}}{2q_1q_2},\qquad J_3=\frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2},\\ x_1-\mathrm{i}x_2&=-\frac{2q_1q_2(x_3^2-1)}{a\sqrt{1+x_3}},\qquad J_1+\mathrm{i}J_2=\frac{\mathrm{i}a(p_1-p_2)}{4(q_1-q_2)\sqrt{1+x_3}}-\frac{a(q_1+q_2)}{2q_1q_2(1+x_3)^{1/6}},\\ J_1-\mathrm{i}J_2&=-\frac{\mathrm{i}q_1^2q_2^2(3x_3+1)(p_1-p_2)}{a(q_1-q_2)\sqrt{1+x_3}}-\frac{2q_1q_2(q_1+q_2)(x_3-1)}{a(1+x_3)^{1/6}},\end{aligned}\tag{3.24}$$

где

$$x_3=\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)^3}{27(q_1-q_2)^3}-1.$$

Разделенные уравнения получаются из одного уравнения с вещественными коэффициентами

$$\Phi(q,\mu)=2q^4-bq^2+(\mu^3\,q-H_1\mu+H_2)q+\frac{a^2}{4}=0,\qquad q=q_{1,2},\quad \mu=\frac{\mathrm{i}\,q_{1,2}p_{1,2}}{3}.\tag{3.25}$$

Соответствующие квадратуры равны

$$\begin{aligned}&\int_{q_0}^{q_1}\frac{\dot q}{q(3\mu^2-H_1)}+\int_{q_0}^{q_2}\frac{\dot q}{q(3\mu^2-H_1)}=\beta_1,\\ &\int_{q_0}^{q_1}\frac{\mu\dot q}{q(3\mu^2-H_1)}+\int_{q_0}^{q_2}\frac{\mu\dot q}{q(3\mu^2-H_1)}=\frac{\mathrm{i}}{3}\,t+\beta_2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Как в случае системы Горячева, бирациональная замена (3.13) приводит уравнение (3.25) к канонической форме (3.6) при

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_2 = 0.$$

Это позволяет доказать, что интегралы движения системы (3.23) связаны с интегралами движения (3.16) для системы Горячева неканоническим преобразованием (3.10).

Может показаться, что квадратуры (3.19) и (3.26) тривиальными образом связаны друг с другом с заменой времени

$$t \to 2t,$$

но нужно помнить, что μ в (3.19) есть функция от q, полученная из (3.18), тогда как μ в (3.26) есть совершенно другая функция от q, полученная из (3.25).

3.3.1. Деформация системы (3.23)

Как и в случае системы Горячева, мы можем добавить два слагаемых к исходному уравнению тригональной кривой третьего рода (3.25):

$$\Phi_1 = 2q^4 + cq^3 - bq^2 + (\mu^3 + d\mu^2 - \widehat{H}_1\mu + \widehat{H}_2)q + \frac{a^2}{4} = 0. \tag{3.27}$$

Деформация исходного гамильтониана (3.23) имеет следующий вид:

$$\widehat{H}_1 \; = \; H_1 - \left(\frac{d}{6} - \frac{d}{x_3 - 1} - \frac{c(1+x_3)^{1/3}}{2(x_3-1)}\right) J_3 + \frac{\left(d\sqrt{1+x_3} + c(1+x_3)^{-1/6}\right)^2}{4(1-x_3)}, \tag{3.28}$$

после канонического преобразования (1.8) при

$$f = -\frac{\mathrm{i}\Big(d(1+x_3) + c(1+x_3)^{1/3}\Big)}{2\sqrt{1-x_3^2}}.$$

В этом случае уравнения движения приводятся к следующим квадратурам:

$$\begin{aligned} &\frac{\dot q_1}{q_1(3\mu_1^2 + 2d\mu_1 - \widehat{H}_1)} + \frac{\dot q_2}{q_2(3\mu_2^2 + 2d\mu_2 - \widehat{H}_1)} = 0,\\ &\frac{\mu_1\dot q_1}{q_1(3\mu_1^2 + 2d\mu_1 - \widehat{H}_1)} + \frac{\mu_2\dot q_2}{q_2(3\mu_2^2 + 2d\mu_2 - \widehat{H}_1)} = \frac{\mathrm{i}}{3}. \end{aligned} \qquad \mu_k = \frac{\mathrm{i}}{3}\, q_k p_k, \tag{3.29}$$

3.4. Систама Дуллина–Матвеева

Рассмотрим систему Дуллина–Матвеева [7] с интегралами движения

$$\begin{aligned} H_1 &= J_1^2 + J_2^2 + \left(1 + \frac{x_3}{x_3+c} - \frac{x_3^2 - |x|^2}{4(x_3+c)^2}\right) J_3^2 + \frac{ax_1}{(x_3+c)^{1/2}} + \frac{b}{x_3+c},\\ H_2 &= -\left(J_1^2 + J_2^2 - \frac{J_3^2}{4} + \frac{(4x_3^2 + 6x_3c + c^2 + |x|^2)J_3^2}{4(x_3+c)^2} + \frac{b}{x_3+c}\right) J_3 +\\ &\quad + a\sqrt{x_3+c}\,J_1 - \frac{ax_1J_3}{2\sqrt{x_3+c}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Переменные разделения $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ определяются с помощью соотношений (3.1), (3.3), которые в данном случае имеют вид

$$q_1+q_2=-\frac{J_3}{2(c+x_3)}-\frac{J_1+\mathrm{i}J_2}{x_1+\mathrm{i}x_2},\qquad q_1q_2=\frac{a}{2(x_1+\mathrm{i}x_2)\sqrt{c+x_3}},\qquad p_{1,2}=\mathrm{i}(c+x_3)+\frac{\mathrm{i}J_3}{q_{1,2}},$$

или с помощью обратного преобразования

$$x_1+\mathrm{i}x_2=\frac{a}{2\sqrt{-\dfrac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}q_1q_2}},\quad x_3=-\frac{\mathrm{i}(p_1q_1-q_2p_2)}{q_1-q_2}-c,\quad J_3=\frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2},$$

$$x_1-\mathrm{i}x_2=-\frac{2\sqrt{-\dfrac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}}\,q_1q_2}{a(q_1-q_2)^2}\Big((c+1+\mathrm{i}p_1)q_1-(c+1+\mathrm{i}p_2)q_2\Big)\times$$
$$\times\Big((c-1+\mathrm{i}p_1)q_1-(c-1+\mathrm{i}p_2)q_2\Big),$$

$$J_1+\mathrm{i}J_2=-\frac{a(q_1(2q_1+q_2)p_1-q_2(2q_2+q_1)p_2)}{4\sqrt{-\dfrac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2},q_1q_2(p_1q_1-p_2q_2)}},$$

$$J_1-\mathrm{i}J_2=\frac{\mathrm{i}q_1q_2}{a\sqrt{-\dfrac{\mathrm{i}(p_1q_1-p_2q_2)}{q_1-q_2}}(q_1-q_2)}\Big((c+1+\mathrm{i}p_1)(c-1+\mathrm{i}p_1)(2p_1q_1-3q_2p_1-p_2q_2)q_1^3\Big)+$$
$$+\big(2\mathrm{i}(p_1+p_2)c-4p_1p_2\big)(p_1-p_2)q_1^2q_2^2-$$
$$-(c+1+\mathrm{i}p_2)(c-1+\mathrm{i}p_2)(2p_2q_2-3q_1p_2-p_1q_1)q_2^3. \tag{3.31}$$

Разделенные уравнения определяются уравнением с вещественными коэффициентами

$$\Phi(q,\mu)=\mu(c^2-1)q^3+(2c\mu^2-b)q^2+(\mu^3-H_1\mu+H_2)\,q+\frac{a^2}{4}=0,\quad q=q_{1,2},\quad \mu=\mathrm{i}\,q_{1,2}p_{1,2}, \tag{3.32}$$

а квадратуры в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\dot q_1}{q_1\Big((c^2-1)q_1^2+4cq_1\mu_1+3\mu_1^2-H_1\Big)}+\frac{\dot q_2}{q_2\Big((c^2-1)q_2^2+4cq_2\mu_2+3\mu_2^2-H_1\Big)}\ &=\ 0,\\
\frac{\mu_1\dot q_1}{q_1\Big((c^2-1)q_1^2+4cq_1\mu_1+3\mu_1^2-H_1\Big)}+\frac{\mu_2\dot q_2}{q_2\Big((c^2-1)q_2^2+4cq_2\mu_2+3\mu_2^2-H_1\Big)}\ &=\ \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

3.4.1. Деформация системы Дуллина–Матвеева

Подставляя $q=q_{1,2}$ и $\mu=\mathrm{i}\,q_{1,2}p_{1,2}$ в следующее уравнение алгебраической кривой третьего рода

$$\Phi_1=\mu(c^2-1)q^3+(2c\mu^2+d\mu-b)q^2+(\mu^3+e\mu^2-\widehat{H}_1\mu+\widehat{H}_2)q+\frac{a^2}{4}=0 \tag{3.33}$$

и решая пару полученных уравнений относительно $\widehat{H}_{1,2}$, мы получим деформацию исходной функции Гамильтона (3.30)

$$\widehat{H}_1\ =\ H_1-\frac{1}{2}\left(e-\frac{d}{c+x_3}+\frac{(ce-d)x_3+e}{x_1^2+x_2^2}\right)J_3+-\frac{(ce-d+x_3e)^2}{4(x_1^2+x_2^2)}, \tag{3.34}$$

после канонического преобразования (1.8) при

$$f=-\frac{\mathrm{i}(ce-d+x_3e)}{2\sqrt{1-x_3^2}}.$$

Используя ту же бирациональную замену (3.13), кривую (3.20) можно привести к канонической форме (3.6) при $c_2=c_3=0$.

Уравнения движения для переменных разделения равны

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot q_k}{q_k(3\mu_k^2+4cq_k\mu_k+2e\mu_k+q_k^2(c^2-1)+dq_k-\widehat H_1)}=0,\\ &\sum_{k=1}^{2}\frac{\mu_k\dot q_k}{q_k(3\mu_k^2+4cq_k\mu_k+2e\mu_k+q_k^2(c^2-1)+dq_k-\widehat H_1)}=\mathrm{i}.\end{aligned}\qquad \mu_k=\mathrm{i}q_kp_k, \tag{3.35}$$

3.5. Случай 5 из [17]

Перейдем к рассмотрению последней системы из работы [17], обладающей интегралами движения

$$\begin{aligned}H_1&=J_1^2+J_2^2+\left(\frac{3}{16}+\frac{8x_3+5}{8(x_3+1)}\right)J_3^2+\frac{ax_1}{(x_3+1)^{3/4}}+\frac{b}{\sqrt{x_3+1}},\\ H_2&=\frac18 J_3^3-\frac12 H_1J_3+a(x_3+1)^{1/4}J_1--\frac{ax_1J_3}{4(x_3+1)^{3/4}}.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Переменные разделения $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$ (3.1), (3.3) находятся из соотношений

$$q_1+q_2=\frac{(3x_3+1)J_3}{4\sqrt{x_3+1}(1-x_3)}+\frac{\mathrm{i}(x_2J_1-x_1J_2)}{\sqrt{x_3+1}(1-x_3)},\quad q_1q_2=\frac{a(x_3+1)^{1/4}}{2(x_1+\mathrm{i}x_2)},\quad p_{1,2}=2\mathrm{i}\sqrt{x_3+1}+\frac{\mathrm{i}J_3}{q_{1,2}}.$$

Исходные физические переменные как функции от переменных разделения имеют вид

$$\begin{aligned}&x_1+\mathrm{i}x_2=\frac{a(x_3+1)^{1/4}}{2q_1q_2},\qquad J_3=\frac{\mathrm{i}q_1q_2(p_1-p_2)}{q_1-q_2},\\ &x_1-\mathrm{i}x_2=-\frac{2q_1q_2(x_3^2-1)}{a(x_3+1)^{1/4}},\qquad J_1+\mathrm{i}J_2=\frac{\mathrm{i}a(p_1-p_2)}{8(q_1-q_2)(x_3+1)^{3/4}}-\frac{a(q_1+q_2)}{2q_1q_2(x_3+1)^{1/4}},\\ &J_1-\mathrm{i}J_2=-\frac{\mathrm{i}q_1^2q_2^2(7x_3+1)(p_1-p_2)}{2a(q_1-q_2((x_3+1)^{1/4}}-\frac{2q_1q_2(q_1+q_2)(x_3-1)(x_3+1)^{1/4}}{a},\end{aligned}\tag{3.37}$$

где

$$x_3=-\frac{(p_1q_1-p_2q_2)^2}{4(q_1-q_2)^2}-1.$$

Разделенные уравнения могут быть получены из уравнения с вещественными коэффициентами

$$\Phi(q,\mu)=-2\mu q^3-bq^2+(\mu^3-H_1\mu+H_2)q+\frac{a^2}{4}=0,\qquad q=q_{1,2},\quad \mu=\frac{\mathrm{i}}{2}\,q_{1,2}p_{1,2},\tag{3.38}$$

а квадратуры в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\dot q_1}{q_1(3\mu_1^2-H_1-2q_1^2)}+\frac{\dot q_2}{q_2(3\mu_2^2-H_1-2q_2^2)}&=0,\\ \frac{\mu_1\dot q_1}{q_1(3\mu_1^2-H_1-2q_1^2)}+\frac{\mu_2\dot q_2}{q_2(3\mu_2^2-H_1-2q_2^2)}&=\frac{\mathrm{i}}{2}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

3.5.1. Деформация системы (3.36)

Добавим три члена в уравнение тригональной кривой (3.38):

$$\Phi_1 = (c-2\mu)q^3 - (d\mu + b)q^2 + (\mu^3 + e\mu^2 - \widehat{H}_1\mu + \widehat{H}_2)q + \frac{a^2}{4} = 0. \tag{3.40}$$

Соответствующая деформация исходного гамильтониана (3.36) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_1 \;&=\; H_1 - \left(\frac{e}{4} + \frac{c+2e}{2(1-x_3)} + \frac{c}{4(1+x_3)} + \frac{d(x_3^2+4x_3+3)}{4(1-x_3)(1+x_3)^{3/2}}\right) J_3 + \\ &+\; \frac{1}{4(1-x_3)}\left(e\sqrt{1+x_3} + d + \frac{c}{\sqrt{1+x_3}}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.41}$$

после канонического преобразования (1.8) при

$$f = -\frac{\mathrm{i}c + \mathrm{i}e(1+x_3)}{2\sqrt{1-x_3^2}} - \frac{\mathrm{i}d}{2\sqrt{1-x_3}}.$$

В этом случае квадратуры равны

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot q_k}{q_k(3\mu_k^2 + 2e\mu_k - 2q_k^2 - dq_k - \widehat{H}_1)} = 0, \qquad \mu_k = \frac{\mathrm{i}}{2}\,q_k p_k,\\ &\sum_{k=1}^{2}\frac{\mu_k\dot q_k}{q_k(3\mu_k^2 + 2e\mu_k - 2q_k^2 - dq_k - \widehat{H}_1)} = \frac{\mathrm{i}}{2}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Как и ранее, неканонические преобразования (3.10) разделенных импульсов связывают уравнения (3.42) с аналогичными уравнениями (3.35) для деформированной системы Дуллина–Матвеева.

4. Заключение

В работах [19, 20, 25] для различных интегрируемых систем на сфере с интегралами движения третьего и четвертого порядка методом грубой силы (т. е. методом подстановок, ограничений и выбором специальной стратегии решений) были решены переопределенные системы алгебро-дифференциальных уравнения, которые в бигамильтоновой геометрии используются для определения переменных разделения. В работах [22, 23] было введено понятие тензоров Пуассона натурального вида, что позволило понять геометрические истоки данного алгоритма и найти некоторые общие геометрические свойства переменных разделения для волчка Ковалевской, системы Чаплыгина, гиростата Горячева–Чаплыгина, систем Горячева и Дуллина–Матвеева и др.

В этой (в некоторой мере более технической) статье мы продолжаем наше исследование для того, чтобы явно описать канонические отображения исходных физических переменных в переменные разделения и обратно, чтобы найти соответствующие квадратуры и обсудить различные возможные интегрируемые деформации исходных систем, связанные с гиперэллиптическими и тригональными алгебраическими кривыми третьего рода.

В разделе 2 рассмотрены вещественные переменные разделения и разделенные уравнения с вещественными коэффициентами. В разделе 3 переменные разделения комплексные, но коэффициенты разделенных уравнений (равно как и уравнений Абеля–Якоби) все равно остаются вещественными. Видимо, их возможно использовать для исследований топологического и качественного характера, т. е. для описания реальных движений. Аналогичные комплексные переменные, лежащие на вещественных кривых, для волчка Ковалевской и гиростата Горячева–Чаплыгина были найдены в [14], для гиростата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина в [15], для системы Стеклова–Ляпунова в [24]. Вещественные переменные для случая Стеклова–Ляпунова были найдены в [16]. В отличие от вещественного варианта [16], комплексные переменные [24] могут быть обобщены на случай Рубановского [28]. Эти и другие комплексные переменные разделения обсуждаются в книге [3].

Отметим еще недавно вышедший сборник классических работ, посвященных системе Клебша и связанным с ней интегрируемым системам [4]. Этой задачей занимались многие выдающиеся математики (см. предисловие [4] и библиографию к нему)[1]. Однако, несмотря на ее сравнительную простоту (по сравнению с другими обсуждаемыми случаями) для этой системы не найдено пока ни комплексного, ни вещественного разделения переменных. Возможно, это связано с некоторыми препятствиями топологического либо аналитического характера.

Дальнейшее изучение этих комплексных переменных разделения и соответствующих вещественных алгебраических кривых связано с численным, алгебро-геометрическим и топологическим анализом полученных квадратур. Для динамических систем, связанных с (3,4)-типа тригональной кривой (3.6), также планируется обсудить возможность приложения критерия Ковалевской–Пенлеве к этим системам, так как в общем случае решение соответствующих квадратур, по-видимому, будет не мероморфной функцией от времени.

Авторы благодарят А. В. Борисова и Ю. Н. Федорова за интерес к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enolskii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-geometrical approach to nonlinear integrable equations. Berlin: Springer, 1994. 337 p.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 576 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 368 с.

[4] Система Клебша. Разделение переменных, явное интегрирование? / А. В. Борисов, А. В. Цыганов. М.–Ижевск: РХД, 2009. 288 с.

[5] Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V. Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications // Rev. Math. Math. Phys., 1997, vol. 10, no. 2, pp. 3—120.

[6] Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Тр. Отд-я физ. наук Об-ва любителей естествознания, 1903, т. 11, вып. 2, с. 7–10;
см. также: Собр. соч.: В 4-х тт.: Т. 1: Теоретическая механика. Математика. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 337–346.

[7] Dullin H. R., Matveev V. S. A new integrable system on the sphere // Math. Res. Lett., 2004, vol. 11, pp. 715–722.

[8] Fedorov Yu. Classical integrable systems and billiards related to generalized Jacobians // Acta Appl. Math., 1999, vol. 55, no. 3, pp. 251–301.

[1]Редакция «НД»: предисловие [4] воспроизводится в этом номере в разделе «Актуальная и классическая литература» (с. 177).

[9] Горячев Д. Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Варшавские Университетские Известия, 1915, кн. 3, с. 1–11.

[10] Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшавские Университетские Известия, 1916, кн. 3, с. 1–13.

[11] Komarov I. V., Sokolov V. V., Tsiganov A. V. Poisson maps and integrable deformations of Kowalevski top // J. Phys. A., 2003, vol. 36, pp. 8035–8048.

[12] Kötter F. Sur le cas traité par Mme Kowalevski de rotation d'un corps solide pesant autor d'un point fixe // Acta Math., 1893, vol. 17, no.1–2, pp. 209–263.

[13] Kowalevski S. Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math., 1889, vol. 12, pp. 177–232.

[14] Kuznetsov V. B. Simultaneous separation for the Kowalevski and Goryachev—Chaplygin gyrostats // J. Phys. A, 2002, vol. 35, pp. 6419–6430.

[15] Tsiganov A. V. On the Kowalevski–Goryachev–Chaplygin gyrostat // J. Phys. A, 2002, vol. 35, no. 26, L309–L318.

[16] Tsiganov A. V. On the Steklov–Lyapunov case of the rigid body motion // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 2, pp. 77–89.

[17] Tsiganov A. V. On a family of integrable systems on $\mathcal{S}^2$ with a cubic integral of motion // J. Phys. A, 2005, vol. 38, pp. 921–927.

[18] Tsiganov A. V. On the two different bi-Hamiltonian structures for the Toda lattice // J. Phys. A, 2007, vol. 40, pp. 6395–6406.

[19] Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // Записки научных семинаров ПОМИ РАН, 2010, т. 374, с. 250–267.

[20] Tsiganov A. V. New variables of separation for particular case of the Kowalevski top // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, no. 6, pp. 657–667.

[21] Цыганов А. В. О новом разделении переменных для частного случая волчка Ковалевской // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 3, с. 639–652.

[22] Tsiganov A. V. On bi-integrable natural Hamiltonian systems on the Riemannian manifolds. arXiv: 1006.3914, accepted to Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2010.

[23] Tsiganov A. V. On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A, 2011, vol. 44, 105203 (15 p.).

[24] Tsiganov A. V. New variables of separation for the Steklov–Lyapunov system. arXiv:1101.4345v1, preprint 2011.

[25] Vershilov A. V., Tsiganov A. V. On bi-Hamiltonian geometry of some integrable systems on the sphere with cubic integral of motion // J. Phys. A, 2009, vol. 42, 105203 (12 p.).

[26] Vershilov A. V., Tsiganov A. V. On one integrable system with a cubic first integral. arXiv:1103.1444v1, preprint 2011.

[27] Weierstrass K. Mathematische Werke: Vol. 1. Berlin: Mayer & Müller, 1894. 356 p.

[28] Рубановский В.Н. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости // Докл. АН СССР, 1968, т. 180, с. 556–559.

[29] Yehia H. M., Elmandouh A. A. New integrable systems with a quartic integral and new generalizations of Kovalevskaya's and Goriatchev's cases // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 1, pp. 56–69.

Integrable systems on the sphere associated with genus three algebraic curves

Vitaly A. Khudobakhshov[1], Andrey V. Tsiganov[2]

St. Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034 Russia
[1]vitaly.khudobakhshov@gmail.com, [2]andrey.tsiganov@gmail.com

New variables of separation for few integrable systems on the two-dimensional sphere with higher order integrals of motion are considered in detail. We explicitly describe canonical transformations of initial physical variables to the variables of separation and vice versa, calculate the corresponding quadratures and discuss some possible integrable deformations of initial systems.

MSC 2010: 70H20; 70H06; 37K10
Keywords: integrable systems, separation of variables, Abel equations

Received March 14, 2011, accepted March 27, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 53–74 (Russian)