УДК 517.958 : 530.145.6

© **Л.Е. Морозова**
chuburin@otf.pti.udm.ru

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, убывающий потенциал, задача рассеяния.

Abstract. We consider the one-dimensional discrete Schrödinger operator $H_0 + V$ acting on the space $l^2(\mathbb{Z})$, where V is a decreasing potential. The theorem of existence and uniqueness of the corresponding Lippmann–Schwinger equation is proved. We study the asymptotics behaviour of solutions of this equation.

Введение

Рассматривается одномерный дискретный оператор Шредингера $H = H_0 + V$, действующий в пространстве $l^2(\mathbb{Z})$. Здесь(см. [1])

$$H_0\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{\psi(n+1) + \psi(n-1)\}_{n\in\mathbb{Z}} .$$

Оператор (потенциал) $V = \sqrt{|V|}\sqrt{V}$, где $\sqrt{V} = \sqrt{|V|}\ \mathrm{sgn}V$, отождествляемый с последовательностью $\{V(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$, действует в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле $V\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{V(n)\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Предполагаем, что $\{V(n)\}$ — ненулевая последовательность, удовлетворяющая неравенству

$$|V(n)| \leqslant Ce^{-a|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{0.1}$$

где C, $a > 0$ — некоторые константы. Последовательности, удовлетворяющие оценкам такого вида, будем называть экспоненциально убывающими. Согласно [2] спектр оператора H_0 совпадает с отрезком $[-2, 2]$. Обозначим через $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$

резольвенту оператора H_0. Ядро $G_0(n,m,E)$ этой резольвенты, возможно продолженное по параметру E на интервал $(-2,2)$, будем называть функцией Грина. При всех $n,m\in\mathbb{Z}$ имеет место формула (см. [3; 4])

$$G_0(n,m,E)=G_0(n-m,E)=-\frac{1}{\sqrt{E^2-4}}\Big(\frac{E-\sqrt{E^2-4}}{2}\Big)^{|n-m|}.$$

Операторы такого вида встречаются, например, в теории спиновых волн [3], в задаче рассеяния в модели сильной связи [5]. (В последней работе исследовано поведение матрицы рассеяния вблизи резонанса.) Рассеяние на потенциале как и в ґнепрерывномЄ случае [6] описывается уравнениями Липпмана–Швингера

$$\psi^{\pm}(n,E)=\psi_0(n,E)-\sum_{m\in\mathbb{Z}}G_0(n-m,E\pm i0)\,V\psi^{\pm}(m,E),$$

где $E\in(-2,2)$, $\psi_0(n,E)$ — некоторая последовательность (см. ниже), удовлетворяющая уравнению $H_0\psi_0=E\psi_0$.

В первой части работы доказано существование и единственность решения уравнения Липпмана–Швингера. Во второй получена ассимптотика решений этого уравнения при $n\to\pm\infty$. Исследованы амплитуды прохождения и отражения.

1. Существование и единственность решения уравнения Липпмана–Швингера

Положим $q=\frac{E-\sqrt{E^2-4}}{2}$. Так как $E\in(-2,2)$, то $|\,q\,|=1$. Перейдем к новой переменной $\theta=\arg q$. Считаем, что $\theta\in(0,2\pi)$, $\theta\neq\pi$, тогда соответствие между $E\in(-2,2)$ и θ будет взаимно однозначным. Используем обозначения вида $G_0(n-m,\theta)$ вместо $G_0(n-m,E)$. В новых переменных $G(n-m,\theta)=\frac{1}{2\sin\theta}\,e^{i\theta|n-m|}$, $n,m\in\mathbb{Z}$, а уравнение Липпмана–Швингера принимает вид

$$\psi(n,\theta)=\psi_0(n,\theta)-\sum_{m\in\mathbb{Z}}G_0(n-m,\theta)V(m)\,\psi(m,\theta). \tag{1.1}$$

При этом, очевидно, $\psi_0(n,\theta)=e^{i\theta n}$.

Следует заметить, что в силу свойств аналитической функции $w = z - \sqrt{z^2-1}$, обратной к функции Жуковского, изменению θ в промежутке $(\pi, 2\pi)$ соответствует предел $E + i0$, а изменению $\theta \in (0,\pi)$ — предел $E - i0$. Для определенности будем считать, что $\theta \in (0,\pi)$. В уравнении (1.1) сделаем замену, полагая $\varphi = \sqrt{|V|}\,\psi$, тогда в операторном виде имеем

$$\varphi = \varphi_0 - \sqrt{|V|}\, G_0(\theta)\, \sqrt{V}\, \varphi. \tag{1.2}$$

Если $K(\theta)] \doteq -\sqrt{|V|}\, G_0(\theta) \sqrt{V}$, то уравнение (1.2) принимает вид

$$\varphi = \varphi_0 + K(\theta)\, \varphi. \tag{1.3}$$

Будучи оператором Гильберта–Шмидта [7], оператор $K(\theta)$ является компактным в $l^2(\mathbb{Z})$.

Будем называть дискретным множеством в $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ множество, не имеющее предельных точек в Ω. Понятно, что дискретность по отношению к переменной $\theta \in (0,\pi)$ означает дискретность по отношению к $E \in (-2,2)$.

Т е о р е м а 1.1. *Для любого* $\theta \in (0,\pi)$, *за исключением, возможно, дискретного множества точек, существует единственное решение уравнения* (1.3) *в классе* $l^2(\mathbb{Z})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $D = (0,\pi) \times (-\delta, \infty) \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, где $\delta > 0$ — достаточно мало. Уравнение (1.3) можно рассматривать для $\theta \in D$, причем оператор $K(\theta)$ остается в D компактным оператором, аналитически зависящим от θ. Последнее вытекает из теоремы Вейерштрасса об аналитичности ряда, составленного из аналитических функций, применительно к векторозначным последовательностям. В силу аналитической теоремы Фредгольма [2] достаточно доказать, что $\|K(\theta)\| < 1$ для некоторых θ.

Пусть $\theta = \alpha + i\beta$, где $\alpha \in (0,\pi)$, $\beta > 0$. В силу (0.1)

$$\|K(\theta)\|^2_{l^2(\mathbb{Z})} \leqslant \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} |V(n)|\, |G_0(n-m,\theta)|^2\, |V(m)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|^2} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} e^{-a|n|}e^{-\beta|n-m|}e^{-a|m|} \leqslant \frac{C}{|e^{i\theta}-e^{-i\theta}|^2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-a|n|}\Big)^2.$$

Так как $|e^{i\theta}-e^{-i\theta}| \geqslant |e^{\beta}|-|e^{-\beta}| \to \infty$ при $\beta \to \infty$, то $\|K(\theta)\| < 1$ для достаточно больших β и любых $\alpha \in (0,\pi)$.

С л е д с т в и е 1.1. *Для всех $\theta \in (0,\pi)$, за исключением, возможно, дискретного множества точек, существует единственное решение уравнения* (1.3) *в классе $l^\infty(\mathbb{Z})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\psi \doteq \frac{\varphi}{\sqrt{|V|}}$. Покажем, что $\psi \in l^\infty(\mathbb{Z})$. (Если $V(n)=0$, то ψ определяется правой частью уравнения (1.1), в котором $V\psi$ заменено на $\sqrt{|V|}\,\varphi$.) Перепишем уравнение (1.2) в виде $\psi = \psi_0 - G_0(\theta)\sqrt{|V|}\,\varphi$. Тогда

$$|\psi(n,\theta)| \leqslant |\psi_0(n,\theta)| +$$

$$+ \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |G_0(n-m,\theta)|^2\,|V(m)|\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\varphi(m,\theta)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

2. Асимптотика решений уравнения Липпмана–Швингера

Т е о р е м а 2.1. *Решение уравнения* (1.2) *имеет вид*

$$\psi(n,\theta) = A_+(\theta)e^{i\theta n} + \eta_+(n), \qquad n > 0,$$

$$\psi(n,\theta) = e^{i\theta n} + A_-(\theta)e^{-i\theta n} + \eta_-(n), \qquad n < 0,$$

где $A_+(\theta)$ и $A_-(\theta)$ — амплитуды прохождения и отражения:

$$A_+(\theta) = 1 + \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-i\theta m}\varphi_0(m), \qquad A_-(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\theta m}\varphi_0(m),$$

а функции $\eta_+(n)$ и $\eta_-(n)$ экспоненциально убывают соответственно при $n \to +\infty$ и при $n \to -\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1.1) при $n > 0$ имеет вид

$$\psi(n,\theta) = e^{i\theta n} + \tfrac{1}{2\sin\theta}\, e^{i\theta n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-i\theta m}\, V(m)\, \psi(m) +$$

$$+\tfrac{1}{2\sin\theta} \sum_{m>n} (e^{-i\theta(n-m)} - e^{i\theta(n-m)})\, V(m)\, \psi(m).$$

Если последнее слагаемое обозначить через $\eta_+(\theta)$, то в силу (0.1)

$$|\eta_+(n)| \leqslant |\tfrac{1}{2\sin\theta}| \sum_{m>n} |\sin(\theta|n-m|)|\, |V(m)|\, |\psi(m)| \leqslant \tfrac{C_1}{1-e^{-a}}\, e^{-a|n|},$$

где C_1 — некоторая константа.Таким образом, η_+ экспоненциально убывает при $n\to\infty$. Случай $n<0$ симметричен.

Т е о р е м а 2.2. *Справедливо равенство* $|A_-|^2+|A_+|^2=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно,

$$\sum_{n=-N}^{N} (H\psi)(n)\cdot \overline{\psi}(n) - \sum_{n=-N}^{N} \psi(n)\cdot (H\overline{\psi})(n) =$$

$$= E \sum_{n=-N}^{N} |\psi(n)|^2 - E \sum_{n=-N}^{N} |\psi(n)|^2 = 0,$$

а с другой стороны,

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=-N}^{N} (H\psi)(n)\cdot \overline{\psi}(n) - \sum_{n=-N}^{N} \psi(n)\cdot (H\overline{\psi})(n) \Big) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \big(\psi(-N+1)\, \overline{\psi(-N)} +$$

$$+\psi(-N)\, \overline{\psi(-N-1)} + \psi(N+1)\, \overline{\psi(N)} - \psi(N)\, \overline{\psi(N+1)} \,\big) =$$

$$= |A_-|^2 \big(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big) - \big(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big) + |A_+|^2 \big(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big) =$$

$$= \big(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big)\big(|A_-|^2 + |A_+|^2 - 1\big).$$

Ссылка на условие $\theta \neq \pi$ завершает доказательство.

Список литературы

1. Цикон Х., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990. 408 с.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М: Мир, 1977. 360 с.
3. Wolfram T., Callaway J. Spin-wave impurity states in ferromagnets // Physical Review. 1963. V. 130. Ѓ 6. P. 2207–2217.
4. Морозова Л. Е., Чубурин Ю. П. Об уровнях одномерного дискретного оператора Шредингера с убывающим потенциалом // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 85–94.
5. Арсеньев А. А. Резонансы и туннелирование при рассеянии на квантовом бильярде в приближении сильной связи // Теор. и матем. физика. 2004. Т. 141, Ѓ 1. С. 100–112.
6. Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шредингера. М: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 392 с.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 488 с.