Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. №3(32)

УДК 517.934

© **А.И. Благодатских**
aiblag@mail.ru

О ДВУХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССАХ СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ[1]

Ключевые слова: групповое преследование, поимка, убегание, пример Понтрягина, колебательный конфликтно управляемый процесс.

Abstract. Sufficient conditions of catching were derived in two problems of group pursuit.

Введение

Работа состоит из трех частей. Первая носит вспомогательный характер, здесь доказаны некоторые используемые в дальнейшем свойства почти периодических функций специального вида.

Во второй части данной работы рассматривается обобщенный пример Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков. В предположении, что корни характеристического уравнения являются простыми и чисто мнимыми, в терминах начальных позиций получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего.

В последней части рассматривается линейный конфликтно управляемый процесс со многими участниками. В предположении, что корни характеристического уравнения являются простыми и чисто мнимыми, в терминах начальных позиций получены достаточные условия поимки.

Работа примыкает к исследованиям [1;2].

[1]Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (грант А04–2.8–60) и программы «Университеты России» (грант 34126).

1. Об одном классе почти периодических функций

Напомним определение и два известных свойства почти периодических функций.

О п р е д е л е н и е 1.1. Непрерывная на R^1 функция g называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что любой отрезок $[a, a+T]$ содержит по меньшей мере одно число τ, для которого при всех t справедливо неравенство

$$\|g(t+\tau) - g(t)\| < \varepsilon.$$

1. Периодическая функция является почти периодической.

2. Линейная комбинация почти периодических функций есть функция почти периодическая.

Рассмотрим почти периодическую функцию f вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(c_k \cos b_k t + s_k \sin b_k t\bigr), \text{ где } c_k, s_k, b_k \in R^1, b_k > 0.$$

Л е м м а 1.1. *Пусть* $f(t) \not\equiv 0$. *Тогда найдутся положительные числа* t_1, t_2, τ *такие, что* $f(t_1) < 0$, $f(t_2) > 0$, $f(\tau) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование таких t_1, t_2 следует из леммы 1.1 [1, с. 151], поэтому, учитывая непрерывность функции $f(t)$, найдется хотя бы одно искомое τ. Лемма доказана.

Докажем некоторые свойства почти периодической функции ξ такой, что

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(C_k \cos b_k t + S_k \sin b_k t\bigr), \text{ где } C_k, S_k \in R^\nu, b_k \in R^1, b_k > 0$$

или в координатной форме

$$\xi^q(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(C_k^q \cos b_k t + S_k^q \sin b_k t\bigr), \; q = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Обозначим через H кривую

$$H = \{\xi(t), t \in [0, \infty)\}.$$

Л е м м а 1.2. *Пусть* $\xi(t) \neq 0$ *для всех* $t \in [0, \infty)$. *Тогда*

1) *если* $\nu \geqslant 3$, *то* $\mathrm{Intco}H = \emptyset$ *или* $0 \in \mathrm{Intco}H$;

2) *если* $\nu = 2$, *то* $0 \in \mathrm{Intco}H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Предположим противное:

$$\mathrm{Intco}H \neq \emptyset \text{ и } 0 \notin \mathrm{Intco}H.$$

В таком случае по теореме отделимости найдется ненулевой вектор $e \in R^\nu$ такой, что

$$\langle h, e\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } h \in \mathrm{co}H.$$

Из последнего следует, что функция

$$f(t) = \langle \xi(t), e\rangle = \sum_{q=1}^{\nu} \xi^q(t) e^q \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [0, \infty).$$

Если $f(t) = 0$ для всех $t \in [0, \infty)$, то $\mathrm{Intco}H = \emptyset$, что невозможно. Таким образом, функция $f(t) \not\equiv 0$, поэтому к ней можно применить лемму 1.1, откуда $f(t_2) > 0$ при некотором $t_2 > 0$. Получили противоречие. Утверждение 1 леммы доказано.

2. Предположим, что

$$\mathrm{Intco}H = \emptyset.$$

Тогда для некоторой прямой L выполнено $H \subset L$, откуда следует существование констант $a, b \in R^1$ таких, что для всех $t \in [0, \infty)$ имеет место одно из трех равенств:

$$1.\ \xi^1(t) - a\xi^2(t) = b,\ a \neq 0;\quad 2.\ \xi^1(t) = b;\quad 3.\ \xi^2(t) = b.$$

В первом случае положим $f(t) = \xi^1(t) - a\xi^2(t)$. Из леммы 1.1 следует, что $f(\tau_1) = 0$ для некоторого $\tau_1 > 0$, значит $b = 0$ и

$\xi^1(t) = a\xi^2(t)$. Снова применяя лемму 1.1, получим, что $\xi^2(\tau) = 0$ при некотором значении $\tau > 0$, поэтому $\xi^1(\tau) = 0$ и $\xi(\tau) = 0$.

Аналогично доказывается, что во втором случае $b = 0$. Применяя лемму 1.1, получаем $\xi^2(\tau) = 0$, $\tau > 0$, поэтому $\xi(\tau) = 0$. Третий случай рассматривается аналогично.

Итак, показано, что во всех случаях найдется значение $\tau > 0$ такое, что $\xi(\tau) = 0$. Получили противоречие условию леммы, следовательно,

$$\mathrm{Intco} H \neq \emptyset.$$

Далее проводим доказательство аналогично доказательству утверждения 1. Утверждение 2 доказано. Лемма доказана.

2. Групповое преследование в примере Понтрягина

В пространстве $R^\nu (\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + a_2 x_i^{(l-2)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{2.1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \cdots + a_l y = v, \quad \|v\| \leqslant 1, \tag{2.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, $a_1, a_2, \ldots, a_l \in R^1$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(0) = X_i^q, \ y^{(q)}(0) = Y^q, \text{ причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}, \ q = 0, 1, \ldots, l-1, \ Z_0 = (X_i^q, Y^q).$$

Вместо (2.1), (2.2) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + a_2 z_i^{(l-2)} + \cdots + a_l z_i = u_i - v \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$z_i^{(q)}(0) = Z_i^q = X_i^q - Y^q.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (2.1), (2.2), называются допустимыми.

О п р е д е л е н и е 2.2. В игре Γ возможна поимка, если существует момент $T_0 = T_0(Z_0)$, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_0,\ v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0]$, $\alpha \in I$ выполнено $z_\alpha(\tau) = 0$.

Через $\varphi_q(t)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1\omega^{(l-1)} + a_2\omega^{(l-2)} + \cdots + a_l\omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(0) = 0,\ \omega^{(q)}(0) = 1,$$

$$\omega^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Все корни характеристического уравнения

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + a_2\lambda^{l-2} + \cdots + a_l = 0 \tag{2.4}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Обозначим корни уравнения (2.4) через

$$\pm b_1\iota, \pm b_2\iota, \ldots, \pm b_p\iota \ \ (0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_p,\ 2p = l),$$

где ι – мнимая единица. Пусть, далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t)Z_i^0 + \varphi_1(t)Z_i^1 + \cdots + \varphi_{l-1}(t)Z_i^{l-1},$$

и так как каждая из функций $\varphi_q(t)$ имеет вид

$$\varphi_q(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(c_k \cos b_k t + s_k \sin b_k t\bigr), \text{ где } c_k, s_k \in R^1,$$

то все функции $\xi_i(t)$ представимы в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{p} \bigl(C_k \cos b_k t + S_k \sin b_k t\bigr), \text{ где } C_k, S_k \in R^\nu.$$

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t > 0,$ ибо если $\xi_\alpha(\tau) = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \tau > 0,$ то преследователь P_α ловит убегающего E к моменту $\tau,$ полагая $u_\alpha(t) = v(t),\ t \in [0, \tau].$

Обозначим через H_i кривые

$$H_i = \{\xi_i(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

У с л о в и е 2.1. Существуют $h_i^0 \in H_i$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}.$$

Через $\mathfrak{D}(c, \rho)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке c с радиусом $\rho.$

У с л о в и е 2.2. Для любых $h_i \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon)$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}.$$

Л е м м а 2.1. *Пусть выполнено условие* 2.1. *Тогда при некотором значении* $\varepsilon > 0$ *выполнено условие* 2.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\operatorname{co}\{h_i^0\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $h_k^0,$ где $k \in K \subset I.$ Из условия 2.1 следует, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_k^0\}.$$

Так как множество $\operatorname{Intco}\{h_k^0\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $h_k \in \mathfrak{D}(h_k^0, \varepsilon)$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_k\}.$$

Из последнего, учитывая, что

$$\operatorname{Intco}\{h_k\} \subset \operatorname{Intco}\{h_i\},$$

следует справедливость условия 2.2. Лемма доказана.

Так как функции ξ_i являются почти периодическими, то существует $T > 0$, для которого выполнено

У с л о в и е 2.3. Для всех $t \geqslant 0$ найдется $\tau_i \in [t, t+T)$, что

$$\xi_i(\tau_i) \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon).$$

Считаем, что $\varepsilon > 0$ и T выбраны исходя из условий 2.2 и 2.3.

Определим функции ψ, λ_i, J_i :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t) \geqslant 0 \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda_i(v, \psi, h_i) = \sup\left\{\lambda : \lambda \geqslant 0, \left\|v - \lambda\psi h_i\right\| \leqslant 1\right\},$$

$$J_i(t, h_i) = \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)| \lambda_i(v(s), \psi(t-s), h_i) ds.$$

Положим

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n),\ \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(h_1^0, \varepsilon) \times \mathfrak{D}(h_2^0, \varepsilon) \times \cdots \times \mathfrak{D}(h_n^0, \varepsilon).$$

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* 2.1. *Тогда существует момент* $\hat{T}$ *такой, что для всех допустимых управлений* $v(t)$ *и любых* $h \in \mathfrak{D}$ *найдется номер* $\alpha \in I$, *что* $J_\alpha(\hat{T}, h_\alpha) \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что выполнено условие 2.2, поэтому для произвольного $h \in \mathfrak{D}$ справедливо неравенство

$$\delta_{\pm 1}(h) = \min_{\|v\| \leqslant 1} \max_{i \in I} \lambda_i(v, \pm 1, h_i) > 0.$$

Так как функции λ_i непрерывны, то

$$\lim_{h^*\to h}\delta_{\pm1}(h^*)=\lim_{h^*\to h}\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,\pm1,h_i^*)=$$

$$=\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,\pm1,h_i)=\delta_{\pm1}(h),$$

следовательно, и функции $\delta_{\pm1}$ являются непрерывными, учитывая еще, что множество $\mathfrak{D}$ компакт, получим

$$\delta=\min_{h\in\mathfrak{D}}\min_{\psi\in\{1,-1\}}\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,\psi,h_i)=\min_{h\in\mathfrak{D}}\{\delta_{+1}(h),\delta_{-1}(h)\}>0.$$

Далее,

$$\max_{i\in I}J_i(t,h_i)\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_0^t|\varphi_{l-1}(t-s)|\sum_{i\in I}\lambda_i(v(s),\psi(t-s),h_i)ds\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\delta}{n}\int\limits_0^t|\varphi_{l-1}(t-s)|ds.$$

Таким образом, для момента $\hat{T}$, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\int\limits_0^{\hat{T}}|\varphi_{l-1}(\hat{T}-s)|ds\geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha\in I$ выполнено $J_\alpha(\hat{T},h_\alpha)\geqslant 1$. Лемма доказана.

Пусть

$$T_1=T_1(Z_0)=\min\{t\geqslant 0:\inf_{v(\cdot)}\min_{h\in\mathfrak{D}}\max_{i\in I}J_i(t,h_i)\geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.2 $T_1<\infty$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* 2.1. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant 0$

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_0^t \varphi_{l-1}(t-s)(u_i(s) - v(s))ds.$$

Пусть $v(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T_1 + T$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции F вида

$$F(t) = 1 - \max_{i \in I} \int_0^t |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)|\lambda_i(v(s), \psi(\tau_i - s), \xi_i(\tau_i))ds,$$

где $\tau_i \in [T_1, T_0)$ выбраны так, чтобы выполнялось условие 2.3. Отметим, что $t_1 \leqslant \tau_i,$ так как в силу леммы 2.2 $F(\tau_i) \leqslant 0.$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t), \psi(\tau_i - t), \xi_i(\tau_i))\psi(\tau_i - t)\xi_i(\tau_i),\ t \in [0, T_0],$$

где считаем, что $\lambda_i(v(t), \psi(\tau_i - t), \xi_i(\tau_i)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0].$ Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i)\Big(1 - \int_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)|\lambda_i(v(s), \psi(\tau_i - s), \xi_i(\tau_i))ds\Big).$$

В силу определения $t_1,$ для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(\tau_\alpha) = 0.$ Теорема доказана.

У с л о в и е 2.4. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}.$$

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* 2.4. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве h_i^0 в условии 2.1 возьмем $Z_i^0 = \xi_i(0) \in H_i$ и применим теорему 2.1. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1, $\nu = 2$ *и* $n = 3$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.2 следует, что можно выбрать h_i^0 так, чтобы условие 2.1 имело место. Теперь осталось воспользоваться теоремой 2.1. Следствие доказано.

Следствие 2.2, построив другое управление, можно усилить. Далее (вплоть до примеров) считаем $\nu = 2$, $n = 2$ и $k = 1, 2$.

Зафиксируем число $r > 0$ так, чтобы

$$H_i \in \mathrm{Int}\mathfrak{D}(0, r),$$

его существование следует из ограниченности функций ξ_i. Начало координат обозначим через O. Далее, по единичным векторам $e_i^k \in R^2$ определим: $D_i^k \in \partial\mathfrak{D}(0, r)$ – точки вида $e_i^k r$; $\mathfrak{D}_i$ – наименьший из двух секторов круга $\mathfrak{D}(0, r)$, образованных отрезками OD_i^1 и OD_i^2; ∂_i – окружность сектора $\mathfrak{D}_i$; наконец,

$$\theta_i(t) = \{\xi_i(s),\ s \in [t_*, t^*]\},$$

где $t^* > t_* \geqslant t$ – такие моменты, для которых впервые

$$\Big(\xi_i(t_*) \in OD_i^1,\ \xi_i(t^*) \in OD_i^2\Big) \text{ или } \Big(\xi_i(t_*) \in OD_i^2,\ \xi_i(t^*) \in OD_i^1\Big) \text{ и}$$

$$\xi_i(s) \in \mathfrak{D}_i,\ s \in [t_*, t^*],$$

то есть $\theta_i(t)$ – это кривая, лежащая в секторе $\mathfrak{D}_i$, обладающая следующим свойством: если двигаться из точки $\xi_i(t)$ в направлении роста t, то данный сектор впервые ґпересечешь целикомЄ именно по этой кривой. В силу второго утверждения леммы 1.2 существуют e_i^k такие, что

$$\langle e_i^1, e_i^2\rangle > 0,\ e_2^k = -e_1^k,\ \mathrm{Int}\mathfrak{D}_i \neq \emptyset \text{ и } \theta_i(t) \neq \emptyset \text{ для всех } t \geqslant 0.$$

Считаем, что такие вектора выбраны (см. рис.).

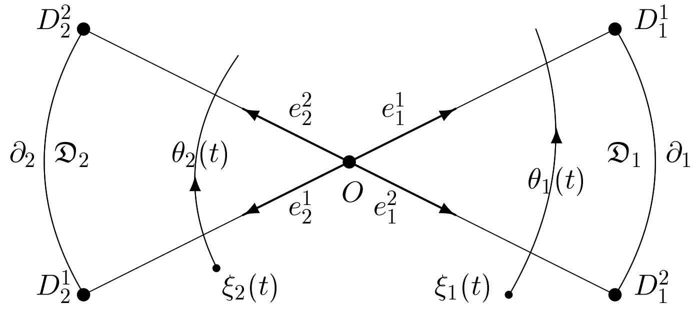

Рис. Выбор векторов e_i^j

Отметим, что
$$0 \in \mathrm{Intco}\{e_i^k\}. \tag{2.5}$$
Определим функции ρ_i^k, k_i, Q_i
$$\rho_i^k(v,\psi) = \sup\left\{\rho : \rho \geqslant 0, \left\|v - \rho\psi e_i^k r\right\| \leqslant 1\right\},$$
значение функции $k_i(t,s) \in I$ находится из условия
$$\rho_i^{k_i(t,s)}(v(s),\psi(t-s)) = \max_{k\in I} \rho_i^k(v(s),\psi(t-s)),$$
если же оно не определяется однозначно, то положим $k_i(t,s) = 1$,
$$Q_i(t) = \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)|\rho_i^{k_i(t+\Delta,s)}(v(s),\psi(t+\Delta-s))e_i^{k_i(t+\Delta,s)} r ds.$$

Л е м м а 2.3. *Пусть выполнено предположение* 2.1. *Тогда существует момент* $\bar{T}$ *такой, что для каждых допустимого управления* $v(t)$ *и* $\Delta \in R^1$ *найдется номер* $\alpha \in I$ *и момент* $\bar{T}_\alpha \leqslant \bar{T}$, *что* $Q_\alpha(t) \in \mathfrak{D}_\alpha$ *для всех* $t \in [0,\bar{T}_\alpha]$ *и* $Q_\alpha(\bar{T}_\alpha) \in \partial_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $Q_i(t)$ при каждом $t \geqslant 0$ представима в виде $Q_i(t) = q_i^1(t)e_i^1 + q_i^2(t)e_i^2$, где функции $q_i^k(t) \geqslant 0$, $q_i^k(0) = 0$ и непрерывны. Отсюда следует, что значение функции $Q_i(t)$ может выйти за пределы $\mathfrak{D}_i$ только через ∂_i (см. рис.).

Таким образом, достаточно доказать, что существует момент $\bar{T}$ такой, что для каждого допустимого $v(t)$ и всех $\Delta \in R^1$ выполнено $\max\limits_{i\in I}\|Q_i(\bar{T})\| \geqslant r$. Из (2.5) получаем, что величина

$$\sigma = \min_{\psi\in\{1,-1\}} \min_{\|v\|\leqslant 1} \max_{(i,k)\in I\times I} \rho_i^k(v,\psi) > 0.$$

Далее,

$$\max_{i\in I}\|Q_i(t)\| =$$

$$= \max_{i\in I}\Big\|\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)|\rho_i^{k_i(t+\Delta,s)}(v(s),\psi(t+\Delta-s))e_i^{k_i(t+\Delta,s)}r ds\Big\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r}{2}\max_{i\in I}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)|\rho_i^{k_i(t+\Delta,s)}(v(s),\psi(t+\Delta-s))ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r}{8}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)|\sum_{i,k\in I}\rho_i^k(v(s),\psi(t+\Delta-s))ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r\sigma}{8}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t+\Delta-s)|ds.$$

Таким образом, в момент $\bar{T}$, определяемый из условия

$$\frac{\sigma}{8}\inf_{\Delta\in R^1}\int\limits_0^{\bar{T}} |\varphi_{l-1}(\bar{T}+\Delta-s)|ds \geqslant 1,$$

получим $\max\limits_{i\in I}\|Q_i(\bar{T})\| \geqslant r$. Лемма доказана.

Пусть

$$T_2 = \min\{t \geqslant 0 : Q_i(s) \in \mathfrak{D}_i, s\in[0,t] \text{ и } \inf_{v(\cdot)}\inf_{\Delta\in R^1}\max_{i\in I}\|Q_i(t)\| \geqslant r\}.$$

В силу леммы 2.3 $T_2 < \infty$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1 , $\nu = 2$ *и* $n = 2$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем T_0 так, чтобы

$$\theta_i(T_2) \subset \{\xi_i(s),\ s \in [T_2, T_0]\}.$$

Пусть $v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant T_0$ – произвольное допустимое управление убегающего E. Выберем наименьшее положительное число t_1 так, чтобы для некоторых $\alpha \in I$ и $\tau \in [T_2, T_0]$

$$\int_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(T_0 - s)| \rho_i^{k_i(T_0,s)}(v(s), \psi(T_0 - s)) e_i^{k_i(T_0,s)} r ds = \xi_\alpha(\tau) \in \theta_\alpha(T_2).$$

Так как $T_0 = T_2 + \Delta$, где $\Delta = T_0 - T_2$, то в силу определения момента T_2 получим, что $t_1 \leqslant T_2$.

Согласно формуле Коши для всех $t \geqslant 0$ имеем

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_0^t \varphi_{l-1}(t - s)(u_i(s) - v(s)) ds.$$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \rho_i^{k_i(T_0,t)}(v(t), \psi(T_0 - t)) \psi(T_0 - t) e_i^{k_i(T_0,t)} r,\ t \in [0, T_0],$$

где считаем, что $\rho_i^{k_i(T_0,t)}(v(t), \psi(T_0 - t)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$.

Тогда, с учетом формулы Коши для $t \in [T_2, T_0]$, имеем

$$z_i(t) = \xi_i(t) - \int_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(T_0 - s)| \rho_i^{k_i(T_0,s)}(v(s), \psi(T_0 - s)) e_i^{k_i(T_0,s)} r ds$$

и по определению момента t_1 для некоторых $\alpha \in I$ и $\tau \in [T_2, T_0]$ $z_\alpha(\tau) = \xi_\alpha(\tau) - \xi_\alpha(\tau) = 0$. Теорема доказана.

П р и м е р 2.1. В пространстве R^3 рассмотрим дифференциальную игру Γ_1 6-ти лиц: 5 преследователей P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и убегающий E. Уравнение (2.3) и начальные условия имеют вид

$$\ddot{z}_i + z_i = u_i - v, \quad Z_1^0 = Z_2^0 = Z_3^0 = (1,0,0),\ Z_4^0 = Z_5^0 = (0,0,1),$$

$$Z_i^1 = (0,1,0),\ i = 1,2,3,4,5.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ равны $\pm\iota$ и предположение 2.1 выполнено. Здесь условие 2.4 не выполнено. Покажем, что имеет место условие 2.1, так как

$$\xi_i(t) = Z_i^0 \cos t + Z_i^1 \sin t,$$

то $H_1 = H_2 = H_3$ – это окружности с радиусом 1, с центром в начале координат, лежащие в плоскости первой и второй координаты, $H_4 = H_5$ – это окружности с радиусом 1, с центром в начале координат, лежащие в плоскости второй и третьей координаты. Выбирая

$$h_1^0 = (1,0,0),\ h_2^0 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\Big),\ h_3^0 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\Big),$$

$$h_4^0 = (0,0,1),\ h_5^0 = (0,0,-1),$$

получаем, что условие 2.1 выполнено. Из теоремы 2.1 следует

У т в е р ж д е н и е 2.1. *В игре Γ_1 возможна поимка.*

П р и м е р 2.2. В пространстве R^ν рассмотрим дифференциальную игру Γ_2 $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (2.3) имеет вид

$$z_i^{(6)} + 14 z_i^{(4)} + 49 \ddot{z}_i + 36 z_i = u_i - v.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^6 + 14\lambda^4 + 49\lambda^2 + 36 = 0$$

равны $\pm\iota$, $\pm 2\iota$, $\pm 3\iota$, и предположение 2.1 выполнено.

У т в е р ж д е н и е 2.2. *Пусть $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}$. Тогда в игре Γ_2 возможна поимка.*

У т в е р ж д е н и е 2.3. *Пусть $\nu = 2$ и $n = 2$. Тогда в игре Γ_2 возможна поимка из любых начальных позиций.*

3. Задача о конфликтном взаимодействии группы преследователей с одним убегающим

В пространстве $R^\nu (\nu \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$\dot{x}_i = Ax_i + u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1, \tag{3.1}$$

закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = Ay + v, \quad \|v\| \leqslant 1, \tag{3.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, A – постоянная квадратная порядка ν матрица. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = X_i^0, \ y(0) = Y^0, \text{ причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i.$$

Здесь и далее $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Z_0 = (X_i^0, Y^0)$.

Вместо (3.1), (3.2) рассмотрим уравнение

$$\dot{z}_i = Az_i + u_i - v \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$z_i(0) = Z_i^0 = X_i^0 - Y^0.$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям из (3.1), (3.2), называются допустимыми.

О п р е д е л е н и е 3.2. В игре Γ возможна поимка, если существует момент $T_0 = T_0(Z_0)$, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t, \ Z_0, \ v(t))$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0]$, $\alpha \in I$ выполнено $z_\alpha(\tau) = 0$.

Пусть Φ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A\omega$$

такая, что $\Phi(0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – единичная матрица. Считаем, что $\Phi(t)Z_i^0 \neq 0$ для всех $i, t > 0$, ибо если $\Phi(\tau)Z_\alpha^0 = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v(t)$, $t \in [0, \tau]$.

П р е д п о л о ж е н и е 3.1. Все корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0 \tag{3.4}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Обозначим корни уравнения (3.4) через

$$\pm b_1\iota, \pm b_2\iota, \ldots, \pm b_p\iota \quad (0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_p,\ 2p = \nu),$$

где ι – мнимая единица.

У с л о в и е 3.1. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}.$$

Через $\mathfrak{D}(c, \rho)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке c, с радиусом ρ.

У с л о в и е 3.2. Для любых $h_i \in \mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon)$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}.$$

Аналогично лемме 2.1 доказывается

Л е м м а 3.1. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Тогда при некотором значении* $\varepsilon > 0$ *выполнено условие* 3.2.

Считаем, что $\varepsilon > 0$ выбрано исходя из условия 3.2.

Определим функции λ_i, J_i

$$\lambda_i(v, h_i) = \sup\left\{\lambda : \lambda \geqslant 0, \left\|v - \lambda h_i\right\| \leqslant 1\right\},$$

$$J_i(t) = \int_0^t \lambda_i(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds.$$

Л е м м а 3.2. *Пусть выполнены предположение* 3.1 *и условие* 3.1. *Тогда существует момент* $\hat{T}$ *такой, что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдется номер* $\alpha \in I$, *что* $J_\alpha(\hat{T}) \geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположения 3.1 каждая из функций $\Phi(t)Z_i^0$ представима в виде

$$\sum_{k=1}^{p}\big(C_k \cos b_k t + S_k \sin b_k t\big), \text{ где } C_k, S_k \in R^\nu. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что функции $\Phi(t)Z_i^0$ являются почти периодическими. Из последнего с учетом того, что

$$\Phi(0)Z_i^0 = Z_i^0 \in \mathrm{Int}\mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon),$$

следует, что существует $T > 0$ такое, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ найдется момент $\tau_k \in [Tk, T(k+1))$, обладающий свойством

$$\Phi(\tau_k)Z_i^0 \in \mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I.$$

Введем обозначения

$$\Omega_k = \{t : \Phi(t)Z_i^0 \in \mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon),\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1})\},\ \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k,$$

$$\mu(G) \text{– мера Лебега } G \subset R^1,\ d(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1,\ d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

Из (3.5) следует, что функции $d(\Phi(t)Z_i^0)/dt$ также представимы в виде (3.5), откуда следует, что они ограничены, то есть найдется положительное число M такое, что

$$\left\|\frac{d}{dt}(\Phi(t)Z_i^0)\right\| \leqslant M \text{ для всех } i \in I,\ t \geqslant 0.$$

Так как $d(\partial\mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon), \partial\mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon)) = \varepsilon$, то для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mu(\Omega_k) \geqslant \mu\big(\{t : \Phi(t)Z_i^0 \in \mathfrak{D}(Z_i^0, 2\varepsilon) \backslash \mathfrak{D}(Z_i^0, \varepsilon),\ t \in [\tau_k, \tau_{k+1})\}\big) \geqslant \frac{\varepsilon}{2M},$$

следовательно, $\mu(\Omega)=\infty$.

Для любого

$$h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)\in\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(Z_1^0,2\varepsilon)\times\mathfrak{D}(Z_2^0,2\varepsilon)\times\cdots\times\mathfrak{D}(Z_n^0,2\varepsilon),$$

учитывая условие 3.2, получаем, что

$$\rho(h)=\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,h_i)>0.$$

Так как функции λ_i непрерывны, то

$$\lim_{h^*\to h}\rho(h^*)=\lim_{h^*\to h}\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,h_i^*)=\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,h_i)=\rho(h),$$

следовательно, и функция ρ является непрерывной, учитывая еще, что множество $\mathfrak{D}$ компакт, получим

$$r=\min_{h\in\mathfrak{D}}\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,h_i)=\min_{h\in\mathfrak{D}}\rho(h)>0.$$

Из последнего неравенства получаем, что величина

$$\delta=\min_{t\in\Omega}\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,\Phi(t)Z_i^0)\geqslant\min_{h\in\mathfrak{D}}\min_{\|v\|\leqslant 1}\max_{i\in I}\lambda_i(v,h_i)=r>0.$$

Имеет место следующая цепочка равенств–неравенств:

$$\max_{i\in I}J_i(t)\geqslant\max_{i\in I}\int\limits_{[0,t]\bigcap\Omega}\lambda_i(v(s),\Phi(s)Z_i^0)ds\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{[0,t]\bigcap\Omega}\sum_{i\in I}\lambda_i(v(s),\Phi(s)Z_i^0)ds\geqslant\frac{1}{n}\int\limits_{[0,t]\bigcap\Omega}\delta ds=\frac{\delta}{n}\mu([0,t]\cap\Omega).$$

Отметим, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([0,t]\cap\Omega)=\infty$, так как $\mu(\Omega)=\infty$. Таким образом, для момента $\hat{T}$, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n}\mu([0,\hat{T}]\cap\Omega)\geqslant 1,$$

и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $J_\alpha(\hat{T}) \geqslant 1$. Лемма доказана.

Пусть
$$T_0 = \min\{t \geqslant 0 : \inf_{v(\cdot)} \max_{i \in I} J_i(t) \geqslant 1\}.$$
В силу леммы 3.2 $T_0 < \infty$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнены предположение* 3.1 *и условие* 3.1. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant 0$
$$z_i(t) = \Phi(t)\Big(Z_i^0 + \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)(u_i(s) - v(s))ds\Big).$$

Пусть $v(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant T_0$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции F вида
$$F(t) = 1 - \max_{i \in I} \int\limits_0^t \lambda_i(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds.$$
Отметим, что в силу определения T_0 момент $t_1 \leqslant T_0$.

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:
$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t), \Phi(t)Z_i^0)\Phi(t)Z_i^0 \text{ для всех } t \in [0, T_0].$$
Тогда с учетом формулы Коши
$$z_i(t_1) = \Phi(t_1)Z_i^0\Big(1 - \int\limits_0^{t_1} \lambda_i(v(s), \Phi(s)Z_i^0)ds\Big).$$
В силу определения t_1 для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(t_1) = 0$. Теорема доказана.

П р и м е р 3.1. В пространстве $R^\nu (\nu = 2p, p \geqslant 1)$ рассмотрим дифференциальную игру Γ_3 $n+1$ лиц: n преследователей

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E. Пусть уравнение (3.3) имеет вид

$$\dot{z}_i = Az_i + u_i - v, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ – некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_p^2) = 0$$

равны $\pm a_1\iota$, $\pm a_2\iota, \ldots, \pm a_p\iota$, и предположение 3.1 выполнено.

Утверждение 3.1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0\}$. *Тогда в игре* Γ_3 *возможна поимка.*

* * *

1. Петров Н.Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удм.ун-та, 1997. 197 с.

2. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно управляемые процессы // Прикладная математика и механика. 1993. Т.57, вып.3. С. 3-14.