УДК 519.833.2

© **В. И. Жуковский, К. С. Сорокин**
molostv@isa.ru, kostya@zilantkon.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ В ОДНОЙ БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ[1]

Ключевые слова: игра, стратегия, равновесие, максимум по Парето, сильная выпуклость, функция выигрыша.

Abstract. The conditions that guarantee the existence of threat and counter threat equilibrium in non cooperative game of three persons are derived. The main feature of the game is absence of constraints on strategies sets of players.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бескоалиционную игру трех лиц

$$\big\langle \{1,2,3\}, \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i=1,2,3}, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \big\rangle. \tag{1.1}$$

Здесь $1,2,3$ — порядковые номера игроков, i-й $(i = 1,\ 2,\ 3)$ игрок формирует свою **стратегию** $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($\mathbb{R}^{n_i}$ — n_i-мерное пространство с евклидовой нормой $\|x_i\| = [\Sigma_{l=1}^{n_i}(x_i^{(l)})^2]^{1/2}$), в результате образуется **ситуация** $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$; $(n = n_1+n_2+n_3)$; на $\mathbb{R}^n$ определена **функция выигрыша** i**-го игрока** $f_i(x)$ $(i = 1,2,3)$, значение которой в конкретной ситуации $x \in \mathbb{R}^n$ называется **выигрышем** i**-го игрока**. На ґсодержательном уровнеЄ цель каждого игрока состоит в самостоятельном

[1]Работа поддержана грантом РФФИ.

выборе такой своей стратегии, при которой его выигрыш принимает возможно **большее** значение. Общепринятое решение бескоалиционной игры — ситуация равновесия по Нэшу [1]. Однако такому понятию присущ ряд негативных свойств. Среди них — ґулучшаемостьЄ ситуации равновесия по Нэшу: именно, может существовать другая ситуация, выигрыши всех игроков в которой больше соответствующих выигрышей в равновесной по Нэшу ситуации (классическим примером здесь является игра ґдилемма заключенныхЄ). В связи с этим в [2] было введено другое понятие решения бескоалиционной игры (равновесие угроз и контругроз); это равновесие ґнеулучшаемоЄ. Данная работа посвящена выявлению ограничений на элементы упорядоченной тройки (1.1), при которых существует равновесие угроз и контругроз.

2. Вспомогательные утверждения

Скалярная функция $F(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n$, называется [3, с. 176] **сильно выпуклой (сильно вогнутой)** на $\mathbb{R}^n$, если $\exists æ = \text{const} > \ > 0$, для которой

$$F\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) - æ\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$$

(соответственно

$$F\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \geqslant \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) + æ\alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2)$$

при любых $x, y \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in [0,1]$.

У т в е р ж д е н и е 2.1. [3, с. 178]. *Для непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}^n$ функции $F(x)$ необходимым и достаточным условием сильной выпуклости (сильной вогнутости) является существование $æ = \text{const} > 0$ такой, что*

$$F(x) - F(y) \geqslant \left[\frac{dF(z)}{dz}\right]^T_{z=y} (x-y) + æ\|x-y\|^2 \qquad (2.1)$$

(соответственно

$$F(x) - F(y) \leqslant \left[\frac{dF(z)}{dz}\right]^T_{z=y} (x-y) - æ\|x-y\|^2)$$

при всех $x,\, y \in \mathbb{R}^n$*; здесь* $\frac{dF(z)}{dz}$ *— градиент функции* $F(z)$*, а индекс* T *сверху означает операцию транспонирования.*

У т в е р ж д е н и е 2.2. [3, *с*.50]. *Пусть функция* F *непрерывна на* $\mathbb{R}^n$ *и для любой последовательности* $\{x^{(k)}\}_1^\infty$ *такой, что* $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)}\| = +\infty$*, имеет место*

$$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}) = -\infty.$$

Тогда существеут точка максимума x^p *функции* $F(x)$ *на* $\mathbb{R}^n$*, то есть*

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} F(x) = F(x^p).$$

В следующих утверждениях использована скалярная функция $f(x_1,\, x_2,\, x_3)$, определенная на множестве ситуаций $(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^n$ (указанных в § 1), и k-вектор e_k со всеми компонентами равными единице.

Л е м м а 2.1. *Если скалярная функция* $f(x_1,\, x_2,\, x_3)$ *непрерывно дифференцируема на* $\mathbb{R}^n$ *и сильно выпукла по* $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ *при всех* $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^{n_1+n_3}$*, то для каждой ситуации* $\overline{x} = (x_1^*, x_2^*, x_3^p) \in \mathbb{R}^n$ *и стратегии* $x_1^l \in \mathbb{R}^{n_1}$ *существует ѓсвояЄ стратегия*

$$x_2(\overline{x}, x_1^l) = x_2^a = x_2^* + \beta e_{n_2}$$

и число $\beta^* > 0$ *такие, что при любых* $\beta \geqslant \beta^*$

$$f(x_1^l, x_2^a, x_3^p) > f(x_1^*, x_2^*, x_3^p).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$r = f(x_1^l, x_2^*, x_3^p) - f(x_1^*, x_2^*, x_3^p), c = \frac{\partial f(x_1^l, x_2, x_3^p)}{\partial x_2}|_{x_2=x_2^*}. \qquad (2.2)$$

С учетом утверждения 2.1 и 2.2

$$
\begin{aligned}
&f(x_1^l, x_2^a, x_3^p) - f(x_1^*, x_2^*, x_3^p) = \\
&\quad = f(x_1^l, x_2^a, x_3^p) - f(x_1^l, x_2^*, x_3^p) + f(x_1^l, x_2^*, x_3^p) - f(x_1^*, x_2^*, x_3^p) \geqslant \\
&\qquad\qquad \geqslant \Big[\frac{\partial f(x_1^l, x_2, x_3^p)}{\partial x_2}\Big]_{x_2 = x_2^*}(x_2^a - x_2^*) + æ\|x_2^a - x_2^*\|^2 + r. \quad (2.3)
\end{aligned}
$$

Возьмем в качестве $x_2^a = x_2^* + \beta e_{n_2}$, где постоянную $\beta > 0$ определим ниже, а e_{n_2} — n_2-вектор, все компоненты которого равны единице. Тогда из (2.3)

$$f(x_1^l, x_2^a, x_3^p) - f(x_1^*, x_2^*, x_3^p) \geqslant \beta c^T e_{n_2} + æ\beta^2 n_2 + r.$$

Так как $æ n_2 > 0$, то при любых

$$\beta \geqslant \beta^* = \frac{|c^T e_{n_2}|}{2æ n_2} + \sqrt{\frac{|r|}{æ n_2} + (\frac{c^T e_{n_2}}{2æ n_2})^2}$$

будет

$$æ n_2 \beta^2 + c^T e_{n_2}\beta + r > 0,$$

и поэтому

$$f(x_1^l, x_2^a, x_3^p) > f(x_1^*, x_2^*, x_3^p)$$

при $x_2^a = x_2^* + \beta e_{n_2}$ и любых $\beta \geqslant \beta^*$.

Аналогично доказывается

Л е м м а 2.2. *Если скалярная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и сильно вогнута по $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ при всех $(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^{n_1+n_3}$, то для каждой ситуации $\overline{x} = (x_1^*, x_2^*, x_3^p) \in \mathbb{R}^n$ и стратегии $x_1^l \in \mathbb{R}^{n_1}$ существует ʻсвояЄ стратегия $x_2(\overline{x}, x_1^l) = x_2^a = x_2^* + \beta e_{n_2}$ и число $\beta^* > 0$ такие, что при любых $\beta \geqslant \beta^*$*

$$f(x_1^l, x_2^a, x_3^p) < f(x_1^*, x_2^*, x_3^p).$$

3. Формализация равновесия

Пусть $x^p = (x_1^p, x_2^p, x_3^p) \in \mathbb{R}^n$ — некоторая фиксированная ситуация в игре (1.1).

Будем считать, что первый игрок обладает **угрозой на ситуацию** x^p, если у него существует стратегия $x_1^t \in \mathbb{R}^{n_1}$, при которой

$$f_1(x_1^t, x_2^p, x_3^p) > f_1(x^p).$$

В ответ на угрозу первого второй игрок обладает **контругрозой**, если существует стратегия $x_2^c \in \mathbb{R}^{n_2}$, при которой

$$f_2(x_1^t, x_2^c, x_3^p) > f_2(x_1^t, x_2^p, x_3^p), \tag{3.1}$$

$$f_1(x_1^t, x_2^c, x_3^p) < f_1(x_1^p, x_2^p, x_3^p). \tag{3.2}$$

Аналогично определяется угроза на ситуацию x^p любого из игроков и ответная контругроза одного из оставшихся. Итак, угроза игрока на x^p сводится к наличию у него стратегии, при применении которой его выигрыш увеличивается по сравнению с ситуацией x^p, а ответная контругроза преследует следующие цели:

во-первых, ґнаказанияЄ в виде (3.2) угрожавшего игрока.

во-вторых, осуществление контругрозы в силу неравенства (3.1).

Очевидно, что если в ответ на любую угрозу любого игрока у одного из оставшихся имеется контругроза, то осуществление угрозы теряет какой-либо смысл.

Наконец, ситуацию $x^p \in X$ называют **максимальной по Парето** (эффективной) в трехкритериальной задаче

$$\langle \mathbb{R}^n, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle, \tag{3.3}$$

если при любых $x \in \mathbb{R}$ несовместна система неравенств

$$f_i(x) \geqslant f_i(x^p) \quad (i = 1, 2, 3),$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

О п р е д е л е н и е 3.1. **Ситуация** $x^p \in X$ называется **равновесием угроз и контругроз** в игре (1.1), если
1) x^p **максимальна по Парето** в трехкритериальной задаче

$$\langle \mathbb{R}^n, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle;$$

2) в ответ на любую **угрозу** на x^p любого игрока у хотя бы одного из оставшихся имеется **контругроза**.

З а м е ч а н и е 3.1. **Множество** ситуаций равновесия угроз и контругроз **внутренне устойчиво**, ибо, согласно максимальности по Парето, не существует такого $x \in \mathbb{R}^n$, чтобы

$$f_i(x) > f_i(x^p); \; (i = 1, 2, 3).$$

З а м е ч а н и е 3.2. Равновесие угроз и контругроз x^p устойчиво **к отклонению от него отдельного игрока**, ибо такое отклонение либо не приведет к ґулучшениюЄ его выигрыша (по сравнению с x^p), либо будет ґнаказаноЄ контругрозой одного из оставшихся игроков (в результате чего его выигрыш уменьшится).

4. Существование

Т е о р е м а 4.1. *Пусть в игре* (1.1)

1) *функции выигрыша* $f_i(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}^n$*;*

2) *существуют постоянные* $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ *такие, что для любой последовательности ситуаций* $\{x^{(k)}\}_1^\infty$,

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{(k)}\| = +\infty,$$

имеет место

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i(x^{(k)}) = -\infty;$$

3) *а) функция* $f_1(x_1, x_2, x_3)$ *сильно выпукла по* x_1 *и сильно вогнута по* x_2,

функция $f_2(x_1, x_2, x_3)$ *сильно выпукла по* x_2 *и сильно вогнута по* x_3,
функция $f_3(x_1, x_2, x_3)$ *сильно выпукла по* x_3 *и сильно вогнута по* x_1 *или*

b) *функция* $f_1(x_1, x_2, x_3)$ *сильно выпукла по* x_1 *и сильно вогнута по* x_3,
функция $f_2(x_1, x_2, x_3)$ *сильно выпукла по* x_2 *и сильно вогнута по* x_1,
функция $f_3(x_1, x_2, x_3)$ *сильно выпукла по* x_3 *и сильно вогнута по* x_2.

Тогда в игре (1.1) *существует равновесие угроз и контругроз.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем его на два этапа. На первом установим существование максимальной по Парето ситуации $x^p \in \mathbb{R}^n$ в задаче (3.3), на втором докажем, что в ответ на любую угрозу на любого игрока у одного из оставшихся имеется контругроза.

1-й этап. Воспользуемся утверждением, установленным в работе [4, с. 73].

Если для задачи (3.3) существуют $\alpha_i > 0$; $(i = 1, 2, 3)$ и ситуация $x^p \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i(x^p),$$

то ситуация x^p будет максимальной по Парето. Существование такого $x^p \in \mathbb{R}^n$ следует тогда из требования 2 теоремы 4.1 и утверждения 2.2.

2-й этап. Здесь покажем, что из сильной вогнутости $f_1(x_1, x_2, x_3)$ и сильной выпуклости $f_2(x_1, x_2, x_3)$ по $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ при каждых $(x_1, x_3) \in \; \in \mathbb{R}^{n_1+n_3}$ следует: в ответ на любую угрозу x_1^t первого игрока на ситуацию x^p (из первого этапа) у второго имеется контругроза, то есть существует стратегия $x_2^c \in \mathbb{R}^{n_2}$, для которой выполняются строгие неравенства (3.1) и (3.2).

В самом деле, из сильной вогнутости $f_1(x_1, x_2, x_3)$ по x_2 и леммы 2.2 получаем: существуют стратегия $x_2^{(1)} = x_2^p + \beta e_{n_2}$ и число $\beta_1 > 0$ такие, что

$$f_1(x_1^t, x_2^{(1)}, x_3^p) < f_1(x^p) \tag{4.1}$$

при всех $\beta \geqslant \beta_1$.

Из сильной выпуклости $f_2(x_1, x_2, x_3)$ по x_2 и леммы 2.1 существует стратегия $x_2^{(2)} = x_2^p + \beta e_{n_2}$ и число $\beta_2 > 0$ такие, что

$$f_2(x_1^t, x_2^p, x_3^p) < f_2(x_1^t, x_2^{(2)}, x_3^p) \quad \forall \beta \geqslant \beta_2. \tag{4.2}$$

Возьмем число $\beta^* = \max_{j=1,2} \beta_j$. Тогда из (4.1), (4.2) получаем, что для стратегии $x_2^c = x_2^p + \beta e_{n_2}$ при всех $\beta \geqslant \beta^*$ имеют место неравенства (3.1) и (3.2). Аналогично доказывается, что из сильной вогнутости $f_2(x_1, x_2, x_3)$ и сильной выпуклости $f_3(x_1, x_2, x_3)$ по $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$ при каждых $(x_1, x_2) \in \ \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ следует: на любую угрозу второго игрока x_2^t на ситуацию x^p у третьего имеется контругроза x_3^c, то есть выполняются неравенства

$$f_3(x_1^p, x_2^t, x_3^c) > f_3(x_1^p, x_2^t, x_3^p),$$
$$f_2(x_1^p, x_2^t, x_3^c) < f_2(x_1^p, x_2^p, x_3^p).$$

Наконец, из сильной вогнутости $f_3(x_1, x_2, x_3)$ и сильной выпуклости $f_1(x_1, x_2, x_3)$ по $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ при каждых $(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$ следует: на любую угрозу третьего игрока x_3^t на ситуацию x^p у первого имеется контругроза x_1^c.

Аналогичным образом получены ограничения b в формулировке теоремы. Здесь лишь в ответ на угрозу первого игрока ґконтругрожаетЄ третий, в ответ на угрозу третьего ґконтругрожаетЄ второй и в ответ на угрозу второго ґконтругрожаетЄ первый.

З а м е ч а н и е 4.1. Теорема очевидным образом распространяется на бескоалиционные игры четырех и более лиц.

З а м е ч а н и е 4.2. Требование 2 теоремы выполнено, если существуют такие $\alpha_i > 0$; $(i = 1, 2, 3)$, что функция $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i f_i(x^{(k)})$ будет сильно вогнута.

З а м е ч а н и е 4.3. Теорема распространяется на бескоалиционную игру трех лиц при неопределенности

$$\left\langle \{1, 2, 3\}, \{\mathbb{R}^{n_i}\}_{i=1,2,3}, \mathbb{R}^m, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2,3} \right\rangle, \tag{4.3}$$

где, в отличие от (1.1), учитывается действие неопределенностей $y \in \mathbb{R}^m$. При формализации гарантированного равновесия угроз и контругроз здесь можно следовать ґаналогу векторной седловой точкиЄ, предложенному в работе [5].

5. Линейно-квадратичный вариант игры

Здесь будем рассматривать игру (1.1), где функции выигрыша f_i $(i = 1, 2, 3)$ линейно-квадратичны по компонентам вектора x, а именно имеют вид

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j,k=1}^{3} x_j^T A_{jk}^{(i)} x_k + 2 \sum_{j=1}^{3} [a_j^{(i)}]^T x_j + b_i, \tag{5.1}$$

$(i = 1, 2, 3)$, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, априори заданы постоянные $n_j \times n_k$-матрицы $A_{jk}^{(i)}$, постоянные n_j-векторы $a_j^{(i)}$ и числа b_i; будем также считать, что матрицы $A_{kk}^{(i)}$ **симметричны** при всех $i, k \in \{1, 2, 3\}$.

Далее, $A > 0$ $(<)$ означает, что квадратичная форма $z^T A z$ определенно положительна (отрицательна); напомним, что индекс T сверху означает операцию транспонирования.

Л е м м а 5.1. [3, с. 179]. *Для того чтобы дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f(x_1, x_2, x_3)$ *была сильно выпуклой (сильно вогнутой) по* x_i *на* $\mathbb{R}^{n_i}$, *необходимо и достаточно, чтобы гессиан*

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i^2} > 0$$

(соответственно < 0 *) при всех* $x \in \mathbb{R}^n$.

Л е м м а 5.2. [6, с. 15]. *Для функции* $f_i(x_1, x_2, x_3)$ *из* (5.1) *справедливо равенство*

$$\frac{\partial^2 f_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j^2} = 2A_{jj}^{(i)} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Л е м м а 5.3. [6, с. 15]. *Если* $\lambda_{jj}^{(i)}$ *— наибольший корень характеристического уравнения* $det[A_{jj}^{(i)} - \lambda E_{n_j}] = 0$, *то для любых* $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$

$$x_j^T A_{jj}^{(i)} x_j \leqslant \lambda_{jj}^{(i)} x_j^T x_j = \lambda_{jj}^{(i)} \|x_j\|^2 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

здесь E_{n_j} *единичная* $n_j \times n_j$*-матрица.*

Из теоремы 4.1 с учетом лемм 5.1–5.3 получаем следующие коээфициентные условия существования равновесия угроз и контругроз игры (1.1), (5.1).

У т в е р ж д е н и е 5.1. *Пусть в игре* (1.1), (5.1)

1) *существуют положительные постоянные* α_i; $(i = 1, 2, 3)$ *такие, что*

$$\alpha_1 \lambda_{jj}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_{jj}^{(2)} + \alpha_3 \lambda_{jj}^{(3)} < 0 \quad (i = 1, 2, 3); \qquad (5.2)$$

2) *a*)

$$\begin{array}{ll} A_{11}^{(1)} > 0, & A_{22}^{(1)} < 0, \\ A_{22}^{(2)} > 0, & A_{33}^{(2)} < 0, \\ A_{11}^{(3)} < 0, & A_{33}^{(3)} > 0 \end{array} \qquad (5.3)$$

или

b)

$$\begin{array}{ll} A_{11}^{(1)} > 0, & A_{33}^{(1)} < 0, \\ A_{11}^{(2)} < 0, & A_{22}^{(2)} > 0, \\ A_{22}^{(3)} < 0, & A_{33}^{(3)} > 0. \end{array} \qquad (5.4)$$

Тогда в игре $(1.1), (5.1)$ *существует равновесие угроз и контругроз.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5.3 и ограничения (5.2), справедлива цепочка неравенств

$$x_j^T(\sum_{i=1}^{3} A_{jj}^{(i)})x_j \leqslant \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_{jj}^{(i)} x_j^T x_j < 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

при любых $x_j \neq 0_{n_j}$ (0_k — нулевой k-вектор). Тогда линейная свертка функций $f_i(x)$ из (5.1) с положительными весами α_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i(x_1, x_2, x_3)$$

будет сильно вогнутой по x (лемма 5.1). Отсюда следует выполнение требования 2 теоремы 4.1. Наконец, из лемм 5.1 и 5.2 получаем, что согласно (5.3) и (5.4) имеют место соответственно условия a и b из теоремы 4.1.

Список литературы

1. Nash J. F. Non-cooperative games// Ann. Math. 1951. Vol.54. P. 286–295.
2. Vaisbord E. M., Zhukovskiy V. I. Introduction to Multi-Player Differential Games and their Applications. N. Y.: Gordon and Breach, 1988.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
5. Zhukovskiy V. I. Lyapunov Function in Differential Games. London and N. Y.:Teylor and Francis, 2003.
6. Жуковский В. И., Чикрий А. А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1994.