УДК 917.934

© **И.Н. Баранова**
ibaranova@udm.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ [1]

Ключевые слова: дифференциальная игра, преследователь, убегающий.

Abstract. The paper gives a sufficient condition of capture by group of the same inertial objects of one escaping, in linear differential game, provided that one of roots of the characteristic equation is positive.

Введение

Рассматривается задача о поимке группой инерционных преследователей одного инерционного убегающего, при условии, что динамические возможности игроков одинаковы, а корни характеристического уравнения вещественны и разных знаков. В случае, если корни характеристического уравнения имеют неположительные вещественные части, задача рассматривалась в работе [1], в случае, если корни характеристического уравнения чисто мнимые, — в работе [2].

В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия поимки.

1. Постановка задачи

В пространстве R^k рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, ..., P_n$ и убегающий E.

[1]Работа выполнена при поддержке программы ґУниверситеты России€(грант 34126).

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\ddot{x}_i - a^2 x_i = u_i, \ \|u_i\| \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\ddot{y} - a^2 y = v, \ \|v\| \leqslant 1. \tag{1.2}$$

При $t = 0$ заданы начальные позиции преследователей

$$x_i(0) = x_i^0, \ \dot{x}_i(0) = x_i^1$$

и убегающего

$$y(0) = y_0, \ \dot{y}(0) = y_1,$$

причём $x_i^0 \neq y_0$ для всех i.

Пусть $z_i^0 = x_i^0 - y_0, \ z_i^1 = x_i^1 - y_1$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что в игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$, функции $u_i(t) = u_i(t, z_i^0, z_i^1, v_t(\cdot))$ такие, что $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, и для любой измеримой функции v ($\|v(t)\| \leqslant 1$ для всех t) найдутся момент $\tau \in [0, T]$ и номер q такие, что

$$x_q(\tau) = y(\tau).$$

Здесь $v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [0, t]\}$.

2. Решение задачи

В системах (1.1), (1.2) сделаем замену $z_i = x_i - y$.

Получим систему

$$\ddot{z}_i - a^2 z_i = u_i - v. \tag{2.1}$$

Решение системы (2.1) с начальными условиями z_i^0, z_i^1 и некоторыми измеримыми функциями u_i, v определяется соотношением

$$z_i(t) = \left(\frac{z_i^1 + az_i^0}{2a}\right)e^{at} + \left(\frac{az_i^0 - z_i^1}{2a}\right)e^{-at} +$$
$$+\int_0^t \frac{e^{a(t-\tau)} - e^{-a(t-\tau)}}{2a}(u_i(\tau) - v(\tau))d\tau. \qquad (2.2)$$

Пусть $w_i(t) = z_i(t)2ae^{-at}$. Тогда из (2.2) следует, что

$$w_i(t) = z_i^1 + az_i^0 + (az_i^0 - z_i^1)e^{-2at} +$$
$$+\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-a(2t-\tau)})(u_i(\tau) - v(\tau))d\tau. \qquad (2.3)$$

Определим функции $\lambda_i : D_1(0) \to R^1$ следующим образом:

$$\lambda_i(\xi_i, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 | -\lambda\xi_i \in D_1(0) - v\},$$

где $D_1(0) = \{u, \|u\| \leqslant 1\}$, ξ_i - фиксированные векторы R^k.

Введём следующие обозначения:

$$\xi_i(\tau) = \left(z_i^1 + az_i^0\right) + \left(az_i^0 - z_i^1\right)e^{-2a\tau},\ f(t,\tau) = e^{-a\tau} - e^{-a(t-2\tau)},$$

$$h_i(t) = 1 - \int_0^t f(t,\tau)\lambda_i(\xi_i(\tau), v(\tau))d\tau.$$

Л е м м а 2.1. *Пусть* $\delta = \inf_t \min_{\|v\|\leqslant 1} \max_i \lambda_i(\xi_i(t), v) > a \cdot n$ *для всех* $t > 0$. *Тогда существует момент* T_0 *такой, что для любой измеримой функции* $v : [0,\infty) \to D_1(0)$ *найдётся номер* j *такой, что* $h_j(T_0) \leqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции h_i непрерывны, $h_i(0) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(T) = n - \sum_{i=1}^{n} \int_0^T f(T,t)\lambda_i(\xi_i(\tau), v(\tau))d\tau =$$

$$= n - \int_0^T f(T,t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\xi_i(\tau), v(\tau))d\tau \leqslant n - \delta \int_0^T f(T,\tau)d\tau,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(\xi_i(\tau), v(\tau)) \geqslant \max\limits_i \lambda_i(\xi_i(\tau), v(\tau)) \geqslant \delta > 0$ для всех v, τ. При $T \to \infty$ $\int\limits_0^T f(T,\tau)d\tau \to \frac{1}{a}$. Следовательно,

$$n - \delta \int_0^T f(T,\tau)d\tau \to n - \frac{\delta}{a} < 0$$

в силу условия. Поэтому существует T_0 такой, что $h_j(T_0) \leqslant 0$ при некотором j.

Лемма доказана.

Пусть

$$T_0 = \min\{t \geqslant 0 : \inf_{v_t(\cdot)} \max_i \int_0^t f(t,\tau)\lambda_i(\xi_i(t), v(\tau))d\tau \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.1 $T_0 < \infty$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть для всех $t > 0$ выполнено неравенство $\min\limits_{\|v\| \leqslant 1} \max\limits_i \lambda(\xi_i(t), v) > a \cdot n$. Тогда в игре Γ происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(t), t \in [0, T_0]$ — произвольное допустимое управление убегающего E, t_1 — наименьший положительный корень функции h вида

$$h(t) = 1 - \max_i \int\limits_0^t f(T_0, \tau)\lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau)d\tau. \tag{2.4}$$

Зададим управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau))\xi_i(T_0),\ t \in [0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau)) = 0$ при $\tau \in [t_1, T_0]$.

Подставляя u_i в (2.3), получим

$$\begin{aligned} w_i(T_0) = \xi_i(T_0) - \int\limits_0^{T_0} f(T_0, \tau)\lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau))\xi_i(T_0)d\tau = \\ = \xi_i(T_0)\big(1 - \int\limits_0^{T_0} f(T_0, \tau)\lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau))d\tau\big) = \qquad (2.5) \\ = \xi_i(T_0)\big(1 - \int\limits_0^{t_1} f(T_0, \tau)\lambda_i(\xi_i(T_0), v(\tau))d\tau\big). \end{aligned}$$

Из (2.4) следует, что $w_q(T_0) = 0$ при некотором q. Следовательно, и $z_q(T_0) = 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть*

$$az_i^0 - z_i^1 = 0, \quad \delta = \min_{\|v\| \leqslant 1} \max_i \lambda_i(az_i^0 + z_i^1, v) > a \cdot n.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

П р и м е р 2.1. Пусть $k = 2$, $n = 2$.

$$z_1^0 = (0, -1),\ z_2^0 = \big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big),\ z_3^0 = \big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big).$$

Возьмем $z_i^1 = az_i^0$. Тогда

$$az_i^0 - z_i^1 = 0, \ \delta = \min_{\|v\|\leqslant 1} \max_i \lambda_i(az_i^0 + z_i^1, v) = \frac{1}{2a}.$$

Таким образом, получим

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Пусть*

$$z_1^0 = (0, -1), \ z_2^0 = \big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big), z_3^0 = \big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big),$$

$z_i^1 = az_i^0$, $a \in (0, \frac{1}{\sqrt{6}})$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

З а м е ч а н и е 2.1. В работе [1] доказано, что в дифференциальной игре Γ, описываемой системой вида

$$\ddot{z}_i + a\dot{z}_i + bz = u_i - v, \ \|u_i\| \leqslant 1, \ \|v\| \leqslant 1,$$

с начальными данными $z_i(0) = z_i^0$, $\dot{z}_i(0) = z_i^1$ при условии, что корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

различны, вещественны и неположительны, достаточное условие поимки имеет вид

$$0 \in \operatorname{Intco}\{z_i^1\}. \tag{2.6}$$

Отметим, что указанное условие (2.6) в общем случае не является достаточным условием поимки в игре Γ, описываемой (1.1).

* * *

1. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 197 с.

2. Благодатских А. И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками// Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2005. Вып. 2(32). С. 3–22.