

УДК 517.9

© А. И. Булгаков, А. И. Коробко
aib@tsu.tmb.ru, prof13@yandex.ru

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ¹

Ключевые слова: возмущенное включение, обобщенное решение, полунепрерывная снизу аппроксимация многозначного отображения.

Abstract. The «perturbed» differential inclusion with a multimap non necessarily convex valued with respect to the switching is under discussion. For an inclusion as such the concept of the generalized solution is represented. The conditions for existence of the generalized solution with lower semicontinuous multimap are derived.

§ 1. Обозначения и определения

Пусть X — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, U — подмножество в X , тогда $\|U\|_X = \sup_{u \in U} \|u\|_X$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство вектор-столбцов, с нормой $|\cdot|$, $C^n[a, b]$ — пространство непрерывных функций $t \rightarrow x(t)$ из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a, b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$, $\mathcal{U} \subset [a, b]$ — измеримое множество, $\mu(\mathcal{U}) > 0$ (μ — мера Лебега). Обозначим $L^n(\mathcal{U})$ ($L_\infty^n(\mathcal{U})$) — пространство суммируемых по Лебегу (пространство измеримых ограниченных в существенном) функций $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds$ ($\|x\|_{L_\infty^n(\mathcal{U})} = \text{vraisup}_{s \in \mathcal{U}} |x(s)|$), $\mathcal{C}(L^n(\mathcal{U}))$ ($\mathcal{S}(L^n(\mathcal{U}))$) — множество

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00324).

непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями (непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению) подмножеств пространства $L^n(\mathcal{U})$; пусть также $\mathcal{C}(L_\infty^n(\mathcal{U}))$ — множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $L_\infty^n(\mathcal{U})$. Обозначим $\text{comp}(C^n[a, b])$ ($2^{C^n[a, b]}$) множество всех непустых выпуклых компактных (непустых ограниченных) подмножеств пространства $C^n[a, b]$.

Для множества $\Phi \subset L^n[a, b]$ обозначим через $\text{sw } \Phi$ совокупность всевозможных конечных комбинаций

$$y = \chi(U_1)x_1 + \chi(U_2)x_2 + \dots + \chi(U_m)x_m$$

элементов $x_i \in \Phi$, в которых U_i — непересекающиеся измеримые множества отрезка $[a, b]$ такие, что $[a, b] = \bigcup_{i=1}^m U_i$. Пусть далее, $\overline{\text{sw}} \Phi$ — замыкание множества $\text{sw } \Phi$ в пространстве $L^n[a, b]$. Множество $\overline{\text{sw}} \Phi$ будем называть выпуклой по переключению замкнутой оболочкой множества Φ .

Рассмотрим отображение $\Phi : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}(L^n[a, b])$. Отображение $\Phi_{\mathcal{U}} : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}(L^n(\mathcal{U}))$ определим следующим образом: каждое значение $\Phi_{\mathcal{U}}(x)$ состоит из всех сужений на $\mathcal{U}$ функций множества $\Phi(x)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить (см. [1, 2]), что отображение $\Phi : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}(L^n[a, b])$ *полу непрерывно снизу аппроксимируется в L_∞^n на множестве $K \subset C^n[a, b]$* , если для любого $\nu > 0$ существует такое измеримое множество $\mathcal{U}_\nu \subset [a, b]$, что выполнены условия: $\mu([a, b] \setminus \mathcal{U}_\nu) < \nu$; для любого $x \in K$ множество $\Phi_\nu(x) \in \mathcal{C}(L_\infty^n(\mathcal{U}_\nu))$; отображение $\Phi_\nu : K \rightarrow \mathcal{C}(L_\infty^n(\mathcal{U}_\nu))$ полу непрерывно снизу по Хаусдорфу, здесь $\Phi_\nu \equiv \Phi_{\mathcal{U}_\nu}$.

По заданному отображению $\Phi : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}(L^n[a, b])$ определим оператор $\tilde{\Phi} : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{S}(L^n[a, b])$ равенством

$$\tilde{\Phi}(x) = \overline{\text{sw}} \Phi(x). \quad (1.1)$$

§ 2. Основной результат

Рассмотрим в пространстве $C^n[a, b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \quad (2.1)$$

где оператор $\Psi : C^n[a, b] \rightarrow \text{comp}(C^n[a, b])$ полунепрерывен снизу и переводит каждое ограниченное множество пространства $C^n[a, b]$ в предкомпактное множество пространства $C^n[a, b]$; отображение $\Phi : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}(L^n[a, b])$ полунепрерывно снизу аппроксимируется в L_∞^n и обладает свойством: образ каждого ограниченного множества пространства $C^n[a, b]$ ограничен суммируемой функцией. Линейный непрерывный интегральный оператор $V : L^n[a, b] \rightarrow C^n[a, b]$, определенный равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t, s)z(s)ds, \quad t \in [a, b], \quad (2.2)$$

переводит каждое слабо предкомпактное в $L^n[a, b]$ множество в предкомпактное множество пространства $C^n[a, b]$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Под *обобщенным решением* включения (2.1) будем понимать функцию $x \in C^n[a, b]$, для которой существуют элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \tilde{\Phi}(x)$, что выполнено равенство $x = v + Vz$.

Определим отображение $\mathcal{M} : C^n[a, b] \rightarrow 2^{C^n[a, b]}$ равенством

$$\mathcal{M}(x) = \Psi(x) + V\tilde{\Phi}(x).$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть U — такое выпуклое замкнутое ограниченное множество пространства $C^n[a, b]$, что имеет место вложение $\mathcal{M}(U) \subset U$. Тогда включение (2.1) имеет обобщенное решение.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что отображения

$$V : L^n[a, b] \rightarrow C^n[a, b], \quad \Psi : C^n[a, b] \rightarrow \text{comp}(C^n[a, b]), \quad (2.3)$$

$$\Phi : C^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}(L^n[a, b]) \quad (2.4)$$

обладают свойством $\mathcal{A}$, если найдутся изотонные непрерывные операторы $\Gamma : C^1[a, b] \rightarrow L^1[a, b]$ и $P : C^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие следующим условиям: для любого $x \in C^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполнены неравенства

$$\|\Phi(x)\|_{L^n(\mathcal{U})} \leq \|\Gamma(Z(x))\|_{L^1(\mathcal{U})}, \quad \|\Psi(x)\|_{C^n[a, b]} \leq P(Z(x));$$

для непрерывного оператора $\mathcal{F} : C^1[a, b] \rightarrow C^1[a, b]$, определенного равенством

$$(\mathcal{F}z)(t) = \int_a^b |V(t, s)|(\Gamma(z))(s)ds + P(z)(t),$$

сходятся последовательные приближения. Здесь $|V(t, s)|$ — норма матрицы $V(t, s)$, согласованная с нормой пространства $\mathbb{R}^n$, непрерывное отображение $Z : C^n[a, b] \rightarrow C^1[a, b]$ задано равенством $(Zx)(t) = |x(t)|$.

С л е д с т в и е 2.1. Пусть отображения (2.3) и (2.4) обладают свойством $\mathcal{A}$. Тогда включение (2.1) имеет обобщенное решение.

* * *

1. Булгаков А. И. К вопросу существования непрерывных ветвей у многозначных отображений с невыпуклыми образами в пространстве суммируемых функций // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 292–300.
2. Булгаков А. И., Беляева О. П., Мачина А. Н. Функционально-дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удм. ун-та. 2005. № 1. С. 3–20.