УДК 517.9

© **А. И. Булгаков, Е. А. Панасенко**
aib@tsu.tmb.ru, panlena_t@mail.ru

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Ключевые слова: многозначные отображения, обобщенное решение, краевая задачи для функционально-дифференциального включения.

Abstract. The concept of the generalized solution of quasilinear boundary value problem for the functional-differential inclusion is represented. The estimation of the difference between the generalized solution and a given continuous function is derived.

§ 1. Обозначения

Пусть X — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$; $\rho_X(\cdot,\cdot)$ и $h_X(\cdot,\cdot)$ — расстояние от точки до множества и расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве X; $\mathrm{comp}(X)$ — множество всех непустых компактов пространства X. Если P — система подмножеств пространства X, то $\Omega(P)$ — множество всех выпуклых подмножеств, принадлежащих P.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство вектор-столбцов, с нормой $|\cdot|$, $\mathcal{U} \subset [a,b]$ — измеримое множество, $\mu(\mathcal{U}) > 0$ (μ — мера Лебега). Обозначим $L^n(\mathcal{U})$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$. Пусть $C^n[a,b]$ ($D^n[a,b]$) пространство непрерывных (абсолютно

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00324).

непрерывных) функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$ ($\|x\|_{D^n[a,b]} = |x(a)| + \int_a^b |\dot{x}(s)| ds$). Обозначим $\mathcal{C}\ell(L^n)$ ($\mathcal{S}(L^n)$) — множество непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями (непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению) подмножеств пространства $L^n[a,b]$. Если $\Phi \subset L^n[a,b]$, то обозначим $\overline{\mathrm{sw}}\,\Phi$ замкнутую выпуклую по переключению оболочку множества Φ.

§ 2. Основной результат

Рассмотрим линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x = 0, \quad lx = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{L} : D^n[a,b] \to L^n[a,b]$ — линейный непрерывный оператор, $l\colon D^n[a,b] \to \mathbb{R}^n$ — линейный непрерывный вектор-функционал.

Будем предполагать, что для задачи (2.1) (см. [1]) существует непрерывный оператор Грина $G : L^n[a,b] \to D^n[a,b]$, определенный равенством

$$(Gz)(t) = \int_a^b G(t,s)z(s)\,ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

Пусть $X : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ фундаментальная матрица решений первого уравнения (2.1), удовлетворяющая условию $l(X) = E$. Тогда решение краевой задачи $\mathcal{L}x = z$, $lx = c$, где $z \in L^n[a,b]$, $c \in \mathbb{R}^n$, можно представить в виде $x = Xc + Gz$.

Рассмотрим линейную краевую задачу для функционально-дифференциального включения

$$\mathcal{L}x \in \overline{\mathrm{sw}}\,\Phi(x), \quad lx \in \varphi(x), \tag{2.3}$$

где $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ $\varphi : C^n[a,b] \to \Omega(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n))$ — непрерывные отображения. Решение задачи (2.3) будем называть *обобщенным* решением.

Пусть $q_0 \in C^n[a,b]$, $r_0 \in \varphi(q_0)$ и $w_0 \in L^n[a,b]$. Представим функцию q_0 в виде равенства

$$q_0 = Xr_0 + Gw_0 + e, \tag{2.4}$$

где $e = q_0 - r_0 - Gw_0$. Предположим, что функция $k \in L^1[a,b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a,b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}\big(w_0, \Phi(q_0)\big) \leqslant \int_{\mathcal{U}} k(s)ds, \tag{2.5}$$

а непрерывная функция $\nu_\varepsilon : [a,b] \to [0,\infty)$ определена соотношением

$$\nu_\varepsilon(t) = \int_a^b |G(t,s)|(\varepsilon + k(s))ds \ + \varepsilon \ + |e(t)|, \ \ \varepsilon \geqslant 0, \tag{2.6}$$

где $|G|$ — норма $(n\times n)$-матрицы G, согласованная с нормой пространства $\mathbb{R}^n$, e — функция в правой части равенства (2.4), функция $k \in L^1[a,b]$ удовлетворяет неравенству (2.5).

Обозначим

$$\lambda = \max\{|X(t)| : t \in [a,b]\}. \tag{2.7}$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что оператор Грина $G : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ и отображения $\varphi : C^n[a,b] \to \Omega\big(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)\big)$ и $\Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$ обладают свойством $\mathcal{A}$, если выполнены следующие условия: найдется такая функция $\beta \in L^1[a,b]$, что для любых $x, y \in C^n[a,b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$ выполнено неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}\big(\Phi(x), \Phi(y)\big) \leqslant \|\beta\|_{L^1(\mathcal{U})}\|x-y\|_{C^n[a,b]}\,; \tag{2.8}$$

найдется число $\alpha \geqslant 0$, что для любых $x, y \in C^n[a,b]$ имеет место оценка

$$h_{\mathbb{R}^n}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \leqslant \alpha\|x-y\|_{C^n[a,b]}\,; \tag{2.9}$$

для функции $\beta \in L^1[a,b]$ и числа $\alpha \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda < 1.$$

Рассмотрим в пространстве $C^1[a,b]$ уравнение

$$\omega_\varepsilon(t) = \Big(\int_a^b |G(t,s)|\beta(s)ds + \alpha\lambda\Big)\|\omega_\varepsilon\|_{C^1[a,b]} + \nu_\varepsilon(t), \qquad (2.10)$$

где функция $\nu_\varepsilon \in C^1[a,b]$ определена равенством (2.6).

Т е о р е м а 2.1. *Пусть оператор Грина* $G : L^n[a,b] \to C^n[a,b]$ *и отображения*

$$\varphi : C^n[a,b] \to \Omega\big(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)\big), \quad \Phi : C^n[a,b] \to \mathcal{C}\ell(L^n)$$

обладают свойством $\mathcal{A}$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (2.4). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое обобщенное решение* $x \in C^n[a,b]$ *задачи* (2.3), *для которого выполнены следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \omega_\varepsilon(t), \quad \|X(r_0 - lx)\|_{C^n[a,b]} \leqslant \lambda\alpha\|\omega_\varepsilon\|_{C^1[a,b]}\,;$$

при почти всех $t \in [a,b]$ *справедливо неравенство*

$$|(\mathcal{L}x)(t) - w_0(t)| \leqslant \varepsilon + k(t) + \beta(t)\|\omega_\varepsilon\|_{C^1[a,b]},$$

где ω_ε *— решение уравнения* (2.10) *число* α *задано неравенством* (2.9), *число* λ *определено равенством* (2.7), $r_0 \in \varphi(q_0)$, $w_0 \in L^n[a,b]$ *— элементы в представлении* q_0; $k, \beta \in L^1[a,b]$ *удовлетворяют неравенствам* (2.5), (2.8) *соответственно.*

* * *

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально – дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.