УДК 517.917

© **С. Ф. Николаев, Е. Л. Тонков, И. В. Феклистов**
me@cvmlib.com, eltonkov@udm.ru, artclimate@rambler.ru

КОЛЕБАНИЯ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК, СОЕДИНЁННЫХ ЖЁСТКОЙ ТЯГОЙ[1]

Ключевые слова: механические системы, управляемые процессы, периодические колебания.

Abstract. Исследуются условия существования периодических решений механической системы, состоящей из двух материальных точек, соединённых жёсткой тягой.

§ 1. Математическая модель

Пусть m_i — масса i-ой материальной точки, g — ускорение свободного падения, $r_i = (x_i, y_i)$ — координаты точки m_i в инерциальной системе координат, $w = (w_1, w_2)$ — вектор управляющих сил, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ — возмущающая сила, приложенная к точке m_2 (см. рис. 1). Выберем управление $w = (w_1, w_2)$ в виде $w_1 = v_1 - f_1(t)$, $w_2 = v_2 - f_2(t)$, где $v = (v_1, v_2)$ — новое управление. Предполагается, что точки m_i жестко связаны тягой нулевой массы длины l и колебания системы происходят в плоскости XOY. На точки m_i действуют реактивные силы R_i тяги l и $R_1 = (R\sin\alpha, -R\cos\alpha)$, $R_2 = (-R\sin\alpha, R\cos\alpha)$.

Обозначим далее, $F_1 = (F_{1x}, F_{1y})$ и $F_2 = (F_{2x}, F_{2y})$ — равнодействующие силы, приложенные к точкам m_1 и m_2. Тогда $F_{1x} = v_1 + R\sin\alpha$, $F_{1y} = v_2 - m_1 g + R\cos\alpha$, $F_{2x} = -R\sin\alpha + f_1(t)$,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06–01–00258) и программы «Университеты России» (грант № 34125).

$F_{2y} = -m_2 g + R\cos\alpha + f_2(t)$ и уравнения движения в форме Ньютона запишутся ввиде:

$$m_i \ddot{r}_i = F_i, \quad i = 1, 2. \tag{1.1}$$

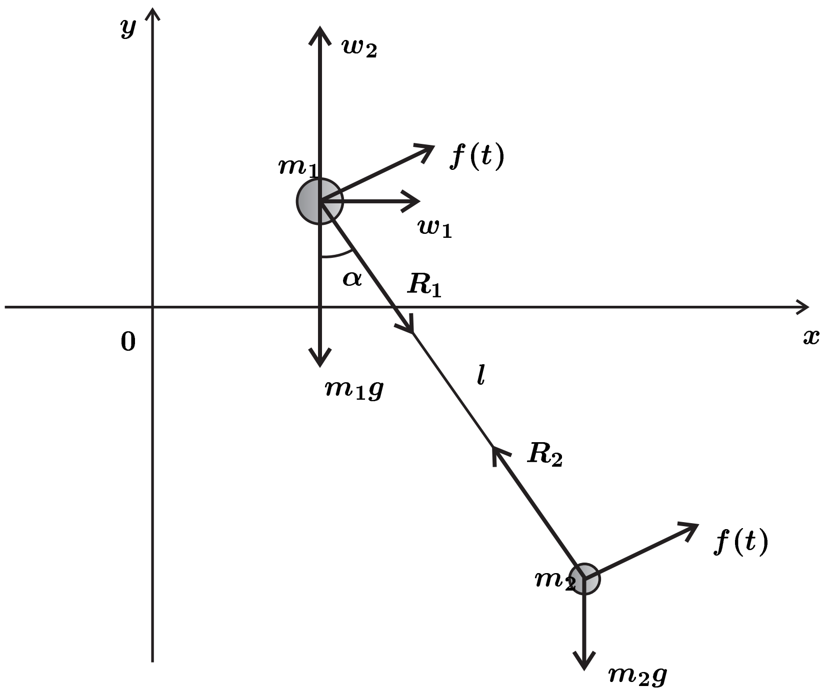

Рис. 1. Материальные точки, соединенные жесткой тягой

Поскольку механическая системы имеет жесткую связь, то число степеней свободы равно трём. Это позволяет нам, записав систему (1.1) в форме Лагранжа [1, Глава 3, § 1], уменьшить количество уравнений на единицу. Введем обобщенные координаты $q = (q_1, q_2, q_3)$, где $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = \alpha$. Тогда уравнения движения в форме Лагранжа запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i, \quad i = 1,2,3, \tag{1.2}$$

где $\dot q = (\dot q_1, \dot q_2, \dot q_3)$ — обобщенные скорости, T — кинетическая энергия, Φ_i — обобщенные силы. Так как $T = \dfrac{m_1(\dot x_1^2 + \dot y_1^2)}{2} + \dfrac{m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2)}{2}$, то $T = \dfrac{m(\dot x_1^2 + \dot y_1^2)}{2} + \dfrac{m_2}{2}\big(l^2\dot\alpha^2 + 2l\dot\alpha(\dot x_1\cos\alpha + \dot y_1 \sin\alpha)\big)$, где $m = m_1 + m_2$ и уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{cases} m\ddot x_1 + (m_2 l\cos\alpha)\ddot\alpha - m_2 l\dot\alpha^2\sin\alpha & = \Phi_1, \\ m\ddot y_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot\alpha + m_2 l\dot\alpha^2\cos\alpha & = \Phi_2, \\ (m_2 l\cos\alpha)\ddot x_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot y_1 + m_2 l^2\ddot\alpha & = \Phi_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь $\Phi_i = F_{1x}\dfrac{\partial x_1}{\partial q_i} + F_{1y}\dfrac{\partial y_1}{\partial q_i} + F_{2x}\dfrac{\partial x_2}{\partial q_i} + F_{2y}\dfrac{\partial y_2}{\partial q_i}$. Поэтому

$\Phi_1 = v_1 + f_1(t)$, $\Phi_2 = v_2 - mg + f_2(t)$,

$\Phi_3 = -m_2 gl\sin\alpha + l(f_1(t)\cos\alpha + f_2(t)\sin\alpha)$.

Выберем управления $v_1 = u_1 - f_1(t)$, $v_2 = u_2 + mg - f_2(t)$, где u_1 и u_2 — новые управления. Тогда

$$\begin{cases} m\ddot x_1 + (m_2 l\cos\alpha)\ddot\alpha - m_2 l\dot\alpha^2\sin\alpha = u_1, \\ m\ddot y_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot\alpha + m_2 l\dot\alpha^2\cos\alpha = u_2, \\ (m_2 l\cos\alpha)\ddot x_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot y_1 + m_2 l^2\ddot\alpha - \\ \quad - l f_1(t)\cos\alpha - l(f_2(t) - m_2 g)\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

§ 2. Безразмерные координаты

Выберем в качестве характерных масштабов массу, длину и ускорение g. Тогда для t в качестве масштаба примем величину $t_* = \sqrt{l/g}$. После стандартных преобразований и возвращаясь к привычным обозначениям, получим следующую систему

$$\begin{cases} (1+m)\ddot x + (m\cos\alpha)\ddot\alpha - m\dot\alpha^2\sin\alpha = u_1, \\ (1+m)\ddot y + (m\sin\alpha)\ddot\alpha + m\dot\alpha^2\cos\alpha = u_2, \\ m(\ddot x\cos\alpha + \ddot y\sin\alpha + \ddot\alpha) - f_1(t)\cos\alpha - h(t)\sin\alpha = 0, \end{cases}$$

где $m = m_2/m_1$, $h(t) = f_2(t) - m$.

§ 3. Периодические колебания

Предположим, что задана траектория $(t, p(t))$ движения точки (x, y). Тогда система уравнений в отклонениях $x \to x - t$, $y \to y - p(t)$, $\alpha \to \alpha$ запишется в виде

$$\begin{cases} (1+m)\ddot{x} + (m\cos\alpha)\ddot{\alpha} - m\dot{\alpha}^2 \sin\alpha = v_1, \\ (1+m)\ddot{y} + (m\sin\alpha)\ddot{\alpha} + m\dot{\alpha}^2 \cos\alpha = v_2, \\ m(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}\sin\alpha + \ddot{\alpha}) = f_1(t)\cos\alpha + (h(t) - m\ddot{p}(t))\sin\alpha, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $v_2 = u_2 - (1+m)p(t)$.

Движение системы (3.1) назовем *идеальным*, если найдется такое управление (v_1, v_2), что система имеет тривиальное решение. Идеальное движение существует в том и только в том случае, если $f_1(t) \equiv 0$. Таким образом, при идеальном движении точка m_1 осуществляет заданное движение и при этом отсутствует «раскачивание» точки m_2 относительно m_1.

Т е о р е м а 3.1. *Если* $p(t) \equiv \mathrm{const}$ *и* $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ *— периодическое с периодом* T, *достаточно малое по норме* $\|f\|_0 = \max_t |f(t)|$ *возмущение системы* (3.1), *то для всякого измеримого и* T *-периодического управления* $v(\cdot)$, *достаточно малого по норме* $\mathrm{vraimax}_t |v(t)|$, *система* (3.1) *имеет достаточно малое по норме* $\|x\|_0$ T *-периодическое решение. Это решение устойчиво по Ляпунову.*

Задача управления состоит в построении такого T-периодического управления $v(\cdot)$, из заданного множества $\mathrm{vraimax}_t |v(t)| \leqslant \varepsilon$ периодических управлений, при котором периодическое колебание системы (3.1) минимально по норме $\| \cdot \|_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.:Физматлит. 2001. 320 с.