УДК 517.934

© **В.А. Матвеев**
vlmatveev@svs.ru

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА: ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО КОНУСУ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ

Ключевые слова: многокритериальная задача, оптимальность по конусу, уточнение оптимального по конусу решения.

Abstract. In article a multicriteria problem is considered. As a general rule the Pareto optimality was made use as a decision to such topic. Usually, there is an infinite set of that results. The optimality concept is refinement by extension of preference relation in criteria space. In this way the cone optimality is defined. The properties of this solution are investigated. Proposed method is made possible to reduce the set of optimal results or ever though extracted an unique situation as a decision in multicriteria problem. The model example is brought.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача принятия решений (ЗПР), качество решения в которой оценивается несколькими критериями. Используем терминологию и обозначения из [1;2]. Моделью такой ЗПР является многокритериальная задача. Это система

$$\langle X, f(x)\rangle. \qquad (1.1)$$

Здесь имеется одно лицо, принимающее решение (ЛПР). Задано множество допустимых исходов $x \in X \subset R^n$, среди которых ЛПР делает свой выбор. Выделен конечный набор желаемых свойств или критериев. В модели эти свойства описаны функциями: каждая функция представляет одно свойство. Оценка исходов основана только на этих свойствах (функциях).

Обычно информацию о всех критериях объединяют в одну, векторную функцию выигрыша $f : X \to R^m, m \geqslant 1$. Значения этой функции каждому исходу ставят в соответствие количественную оценку для выделенных свойств

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Это векторная оценка для исхода $x \in X$. Не уменьшая общности, считаем, что критерии $f_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ являются позитивными. Тогда на содержательном уровне цель ЛПР состоит в выборе такого исхода, что доставляет возможно большие значения одновременно всем компонентам векторной функции выигрыша $f(x)$. Отметим, что в соответствии с работой [2], множество X и функция f определяют соответственно реализационную и оценочную структуры ЗПР, представленную в (1.1).

Общепринятый подход к определению решения в задаче (1.1) основан на отношении доминирования по Парето в критериальном пространстве R^m [2, с. 56]. Именно исход $x^* \in X$ называется Парето-оптимальным в задаче векторной оптимизации (1.1), если для каждого x существует $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i(x) < f_i(x^*)$ или $f(x) = f(x^*)$. Парето-оптимальность исхода $x^* \in X$ означает, что, если возможно перейти к другому исходу и увеличить при этом значение какого-либо критерия, то обязательно найдётся другой критерий, значение по которому в этом случае уменьшится.

В [2, с. 58] отмечено, что ґкандидатомЄ на оптимальное решение в многокритериальной задаче может являться только Парето оптимальный исход. Однако Парето оптимальных решений в задаче (1.1) может быть несколько, а в непрерывном случае даже бесконечное множество. Это связано с эффектом несравнимости исходов в векторном критериальном пространстве. Несравнимость исходов является формой неопределённости, именно ценностной неопределённостью [2, с. 55]. Она связана с тем, что в условиях неполной информированности ЛПР стремится достичь нескольких, часто противоречивых целей. Как указано в работе [2, с. 58], выбор между несравнимыми исходами является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации.

2. Оптимальность по конусу в многокритериальной задаче

Достаточно общий подход к определению оценочной структуры в задаче (1.1) предлагает отношение предпочтения по конусу в критериальном пространстве $R^m, m \geqslant 1$. Для сравнения векторных исходов рассматривается отношение предпочтения по конусу. Будем рассматривать выпуклый, заострённый, выступающий, пространственный конус K [3, с. 1075]. Конус K порождает в векторном критериальном пространстве отношение порядка (векторную упорядоченность) $\geqslant_k$ по правилу

$$f \geqslant_k g \Leftrightarrow f - g \in K. \tag{2.1}$$

Такой конус K называют конусом доминирования в $R^m, m \geqslant 1$.

Часто конусом доминирования является многогранный конус

$$K = \{f \in R^m | Af \geqslant 0_m\}. \tag{2.2}$$

Здесь представлена система m однородных неравенств и 0_m — нулевой вектор в R^m. Зафиксирована A — квадратная матрица порядка m. Будем считать, что матрица $A = (a_{ij}), i, j = 1, \ldots, m$ является неотрицательной, т.е $a_{ij} \geqslant 0$. Кроме того, полагаем, что матрица A является невырожденной. Важными примерами многогранных конусов являются

$$R^m_{\geqslant} = \{x \in R^m | Ex \geqslant 0_m\} = \{x \in R^m | x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\} \tag{2.3}$$

и его внутренность

$$R^m_{>} = \{x \in R^m | x_i > 0, i = 1, \ldots, m\}. \tag{2.4}$$

Конусы $R^m_{\geqslant}, R^m_{>}$ определяются единичной матрицей E.

Использование векторной упорядоченности (2.1) позволяет определить в задаче (1.1) исходы, оптимальные по конусу K.

О п р е д е л е н и е 2.1. Исход $x^* \in X$ называется оптимальным по конусу K в задаче векторной оптимизации (1.1), если для любого исхода $x \in X$ из условия $f(x) \geqslant_k f(x^*)$, следует, что $x = x^*$. Последняя импликация равносильна тому, что для всех $x \in X, x \neq x^*$ справедливо $x - x^* \notin K$. Если для конуса K выполнено включение $R^m_> \subset K$, то оптимальное решение $x^* \in X$ будем называть максимальным по конусу. Если рассматривать оптимальность относительно конуса $(-K)$, то решение будем называть минимальным по конусу K. Множество оптимальных или максимальных(минимальных) по конусу K решений задачи векторной оптимизации (1.1) обозначается $X^* \subset X (X_\star \subset X)$.

Определение оптимального по конусу решения является достаточно общим. Оно включает в себя как частный случай Парето оптимальные решения. Действительно, такое решение получается в определении 2.1, если в качестве конуса доминирования использовать конус $R^m_\geqslant$ из (2.3).

З а м е ч а н и е 2.1. В качестве решения задачи векторной оптимизации (1.1) также используют оптимальные по Слейтеру решения [5, с. 67]. Так, исход $x^* \in X$ называется максимальным по Слейтеру в задаче векторной оптимизации (1.1), если для каждого $x \in X$ существует $i \in \{1, \dots, m\}$, что $f_i(x) < f_i(x^*)$. Максимальность по Слейтеру выделенного исхода $x^* \in X$ означает, что нет другого исхода, векторная оценка которого по всем критериям больше, чем у выделенного исхода. Заметим, что максимальность по Слейтеру является максимальностью по конусу для конуса доминирования $R^m_>$ из (2.4).

З а м е ч а н и е 2.2. В многокритериальной задаче (1.1) определяется A-оптимальное решение [4, с. 187]. Пусть задана постоянная $m \times m$ матрица $A = (a_{ij})$ с положительными элементами, т.е. $a_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, m$. Такая матрица A выделяет в векторном пространстве R^m многогранный конус согласно равенству (2.2). Этот многогранный конус, а значит, и положительная матрица A определяют векторную упорядоченность согласно соотношению (2.1). Исход в задаче (1.1), оптимальный относительно такой упорядоченности, называется A-оптимальным в задаче векторной оптимизации (1.1). Из определений следует, что A-оптимальность эквивалентна оптимальности по конусу, который определён положительной матрицей A в (2.2).

Заметим, что оптимальность по конусу более общее понятие, чем A-оптимальность. Действительно, многогранный конус, заданный положительной матрицей, с помощью которого определяется A-оптимальность, не исчерпывает множества всех выпуклых, заострённых, выступающих конусов в векторном пространстве $R^m, m \geqslant 1$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть в многокритериальной задаче* (1.1) *множество допустимых исходов* $X \subset R^n$ *компактно, векторная функция выигрыша* $f : X \to R^m$ *непрерывна, конус доминирования* K *является выпуклым, заострённым, выступающим в* R^m. *Тогда в задаче* (1.1) *существует исход, оптимальный по конусу* K.

Доказательство следует из существования гиперплоскости в R^m, разделяющей компактное множество X и соответствующий конус K.

Т е о р е м а 2.2. *Рассматриваются многокритериальная задача* (1.1) *и конусы доминирования* K_1, K_2. *Пусть* $X_1^* \subset X$, $X_2^* \subset X$ — *множества исходов, оптимальных по конусу* K_1, K_2 *соответственно. Тогда из* $K_1 \subset K_2$ *следует включение* $X_2 \subset X_1$.

Действительно, пусть $x^* \in X_2^*$. Тогда, согласно определению 2.1, $\forall x \neq x^*, x - x^* \notin K_2$. По условию $K_1 \subset K_2$, значит, $x - x^* \notin K_1$. Последнее означает, что $x^* \in X_1^*$. Следовательно, $X_2^* \subset X_1^*$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2.2 следует, что в задаче векторной оптимизации (1.1) оптимальные по Парето исходы являются уточнением оптимальных по Слейтеру исходов, т.к. $R^m_> \subset R^m_\geqslant$. Теорему 2.1 можно применить к многогранным конусам из (2.2). Тогда получается

Т е о р е м а 2.3. *Рассматриваются многокритериальная задача* (1.1) *и многогранный конус доминирования*

$$K = \{x \in R^m | Ax \geqslant 0_m\}$$

с неотрицательной матрицей A. *Тогда максимальные по конусу* K *исходы являются оптимальными по Парето.*

Оптимальность по Парето является оптимальностью по многогранному конусу $K^m_\geqslant$, определённому единичной матрицей E в соотношении (2.3). Рассмотрим систему из m однородных неравенств, которая задаётся в матричной форме $Ax \geqslant 0_m$. Для любой неотрицательной матрицы A последняя система является следствием тривиальной системы m линейных неравенств $Ex \geqslant 0_m$. Это означает, что $R^m_\geqslant \subset K$. Тогда по теореме 2.1 каждое оптимальное по конусу K решение является оптимальным по Парето, что и требовалось доказать.

Таким образом, оптимальность по конусу является уточнением оптимального по Парето решения. Такой подход позволяет сократить множество претендентов на оптимальный исход. В то же время предпочтение по конусу порождает определённые вопросы, связанные с наилучшим решением задачи (1.1). Во-первых, какие свойства, какой содержательный смысл имеют оптимальные по конусу решения, чем они выделяются среди паретовских решений. Во-вторых, каким образом выбирать конус доминирования, ведь таких конусов бесконечное множество. В-третьих, как уточнять оптимальное по конусу решение, если таких решений достаточно много.

Рассмотрим конус доминирования, представленный многогранным конусом (2.2) с неотрицательной невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, m$. Не уменьшая общности, можно считать, что матрица A является стохастической

[4, с. 381]. У такой матрицы

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1,\ i = 1, \ldots, m. \tag{2.5}$$

Произвольную неотрицательную невырожденную матрицу можно привести к условию (2.5), вынося из каждой строки соответствующий множитель. Хотя матрица при таком преобразовании изменится, но конусы доминирования для исходной и преобразованной матриц будут совпадать.

Рассмотрим произвольную i-ю строку стохастической матрицы A :

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}),\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, a_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

При определении оптимальности по конусу элементы этой строки умножаются соответственно на значения критериев, представленные в векторной функции выигрыша, и складываются. Каждая строка матрицы А даёт новый i-й критерий F_i . При этом элемент $0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1$ этой строки является ґвесовым коэффициентомЄ, т.е. множителем или весом, с которым исходный критерий $f_i(x)$ входит в новый критерий $F_i(x)$

$$F_i(x) = a_{i1} f_1(x) + a_{i2} f_2(x) + \cdots + a_{im} f_m(x).$$

Если j-й элемент в i-й строке матрицы равен нулю, т.е. $a_{ij} = 0$, то новый критерий F_i не зависит от этого исходного критерия $f_j(x)$.

Каждая строка стохастической матрицы А определяет новый критерий. В этом критерии учитывается отношение ЛПР к принимаемому решению. В то же время совокупность строк матрицы А представляет неопределённость ЛПР относительно общей итоговой цели. Строки матрицы можно представлять как мнения нескольких экспертов относительно итоговой цели. Эксперты по-разному видят конечную цель, поэтому строки матрицы линейно-независимы (матрица является невырожденной). В то же время мнение экспертов является важной информацией и позволяет сократить множество претендентов на оптимальное решение.

В задаче векторной оптимизации (1.1) оптимальное по конусу решение относительно многогранного конуса доминирования К из соотношения (2.2) можно рассматривать как оптимальное по Парето решение для векторной функции выигрыша

$$A \circ f : X \to R^m.$$

Здесь $A \circ f$ композиция отображений $f : X \to R^m$,
$A : R^m \to R^m$. Тогда оптимальное по конусу К (определённому матрицей А) решение в задаче (1.1) равносильно оптимальному по Парето решению в задаче векторной оптимизации

$$\langle X, A \circ f(x) \rangle. \tag{2.6}$$

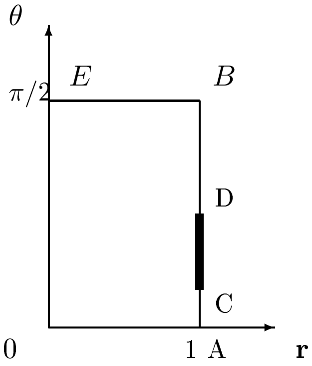
Рассмотрим модельный пример применения оптимального по конусу решения в многокритериальной задаче.

П р и м е р 2.1. Рассматривается двухкритериальная задача (1.1), где множество допустимых исходов

$$X = R \times \Psi = [0,1] \times [0, \pi/2].$$

Это множество представлено на рис. 1. Задан векторный критерий $f(r,\theta) = (f_1(r,\theta), f_2(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Здесь допустимые исходы $(r,\theta) \in R \times \Psi = [0,1] \times [0,\pi/2]$. Предполагается, что ЛПР в двухкритериальной задаче выбирает исход так, чтобы доставить возможно большие значения обоим критериям: $f_1(r,\theta) = r\cos\theta$ и $f_2(r,\theta) = r\sin\theta$. Такие критерии являются позитивными. Эта двухкритериальная задача представлена как система в

$$\langle [0,1] \times [0,\pi/2], (rcos\theta, rsin\theta) \rangle. \tag{2.7}$$



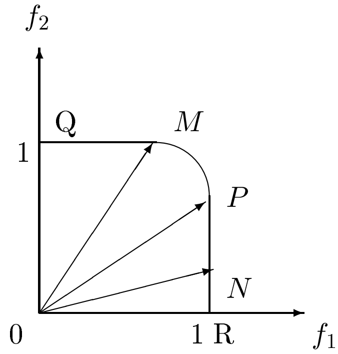


Рис. 1. Множество исходов X Рис. 2. Множество $f(X)$

Оценочная структура в задаче определяется в области достижимости

$$f(X) = \{(f_1, f_2) \in R^2 \mid f_1 = r\cos\theta, f_2 = r\sin\theta, (r,\theta) \in X.$$

Она представлена на рис. 2.

Задан многогранный конус доминирования

$$K = \{x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geqslant 0_2\}. \qquad (2.8)$$

Конус K образуют векторы $x = (x_1, x_2)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 0, \\ 4x_1 + x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Многогранный конус доминирования K из (2.8) представлен на рис. 3.

Отметим, что в данном случае важность (вес) критериев оценивается первым экспертом в отношении 3:2 и вторым экспертом в отношении 4:1. В задаче требуется найти исходы, оптимальные

относительно конуса K, в соответствии с определением 3.1. Рассмотрим оценки допустимых исходов, представленные на рис. 2. Расположим конус доминирования в R^2 так, что его вершина совпадает с оценкой некоторого исхода. Если в этом случае множество точек конуса не пересекается с множеством оценок всех допустимых исходов (за исключением общей вершины), то соответствующий исход является оптимальным по конусу K. В соответствии с этим оптимальные по конусу исходы расположены на сторон ,
где $A = (1,0)$

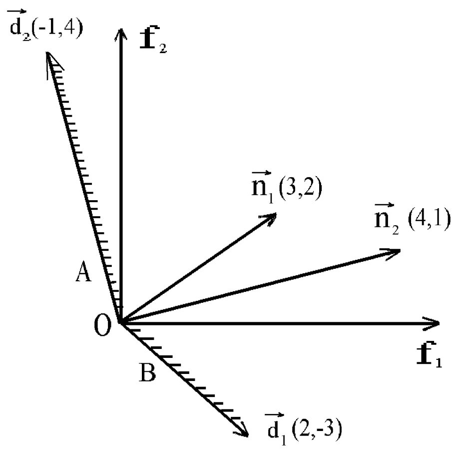


Рис. 3. Конус K

В этом случае $r^* = 1$. Выделим на дуге оценки, оптимальные по конусу. Они расположены на участке дуги NM (рис. 2). В пространстве критериев координаты точки N (точки M) находятся из условия $\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{4}{1}$ $\left(\frac{-f_1}{\sqrt{1-f_1^2}} = -\frac{3}{2}\right)$.

В результате получаем координаты точек

$$N(f_1^N, f_2^N) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right),\ (M(f_1^M, f_2^M) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)).$$

На дуге NM (рис. 2) представлены все оценки, оптимальные по конусу. Этим оценкам соответствуют оптимальные исходы. На рис. 1 эти исходы составляют отрезкок CD. Координаты точки C (точки D) найдём из условия

$$(r^* \cos\theta^*, r^* \sin\theta^*) = (4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17})$$
$$((r^* \cos\theta^*, r^* \sin\theta^*) = (3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})).$$

Учитывая, что $r^* = 1$, для значения $\theta \in [0, \pi/2]$ получаем уравнение $\tan\theta = 1/4$ $(\tan\theta = 2/3)$. Тогда $\theta^* = \arctan 1/4 (\theta^* = \arctan 2/3)$. Наконец, находим координаты точек

$$\mathrm{C}(r^*, \theta^*) = (1, \arctan 1/4), \; D(r^*, \theta^*) = (1, \arctan 2/3).$$

Эти точки представлены на рис. 1.

В данном примере получены все максимальные по конусу исходы (r^*, θ^*), $r^* = 1$, $\arctan 1/4 \leqslant \theta^* \leqslant \arctan 2/3$. Они изображены отрезком CD на рис. 1. Множество соответствующих оценок

$$(f_1^*, f_2^*) \in$$
$$\in \{(r^* \sin\theta^*, r^* \cos\theta^*) \mid r^* = 1, \arctan 1/4 \leqslant \theta^* \leqslant \arctan 2/3\}$$

указаны дугой NM на рис. 2.

Отметим, что в данной многокритериальной задаче (2.7) максимальные по конусу решения являются уточнением максимальных по Парето решений. Действительно, паретовские исходы представляются отрезком AB на рис. 1 и их оценки — всей дугой $PNMQ$ на рис. 2.

3. Уточнение оптимального по конусу решения

Рассмотренный выше пример показывает, что оптимальность по конусу позволяет сузить множество претендентов на наилучшее решение в многокритериальной задаче. Так, на рис. 1 сторона AB представляет оптимальные по Парето решения и его часть — отрезок СД, выделяет оптимальные по конусу K решения. Этот подход позволяет существенно сузить множество оптимальных решений. Но это не снимает проблему уточнения решения. Оптимальных по конусу решений может быть достаточно много. Рассмотрим следующую последовательность уточнений.

Обозначим через K_1 конус К из (2.2) и $X_1^* \subset X$ соответствующее множество оптимальных по этому конусу решений. Этот конус определён матрицей А. Обозначим через K_2 и $X_2^* \subset X$ конус и множество оптимальных по нему решений для матрицы A^2. Аналогично для натурального n обозначим K_n и $X_n^* \subset X$ конус и множество оптимальных по этому конусу решений, определённых матрицей A^n.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть матрица A является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда для любого натурального n*

а) матрица A^n является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической;

б) для соответствующих конусов имеет место включение $K_n \subset K_{n+1}$;

в) для соответствующих множеств оптимальных по конусу решений имеет место включение $X_n^* \supset X_{n+1}^*$.

Пункт а) следует из правила умножения неотрицательных матриц. Многогранный конус K_n определяется как решение однородной системы линейных неравенств $A^n f \geqslant 0_m$. Многогранный конус K_{n+1} определяется как решение для следствия последней системы, именно $A^{n+1} f = AA^n f \geqslant 0_m$. Напомним, что элементы матрицы A неотрицательны. Поэтому имеет место включение конусов $K_n \subset K_{n+1}$. Наконец, в) следует из теоремы 2.2.

Для матрицы А из теоремы 3.1 верны условия теоремы Фробениуса [4, с. 355], именно справедлива

Т е о р е м а 3.2. *Пусть матрица* A *является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда существует предел последовательности* $\lim_{n\to\infty} A^n = A_0$. *Матрица* A_0 *является положительной, вырожденной, с рангом, равным 1, все строки матрицы равны левому собственному вектору, относящемуся к максимальному собственному значению* $\lambda = 1$, *и сумма координат этого вектора равна 1.*

Последнее утверждение является основанием для уточнения оптимального по конусу K решения, определённого матрицей A.

О п р е д е л е н и е 3.1. Рассматривается многокритериальная задача (1.1) и многогранный конус K (2.2), определённый квадратной матрицей A порядка m. Считаем, что матрица A является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Пусть вектор $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$, $a_i > 0$ является левым собственным вектором для собственного значения $\lambda = 1$ матрицы A. Тогда исход

$$x^* \in \arg\max_{x \in X}(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_m f_m(x))$$

будем называть уточнённым по конусу оптимальным (максимальным, минимальным) решением многокритериальной задачи (1.1).

Т е о р е м а 3.3. *Пусть в многокритериальной задаче* (1.1) *множество допустимых исходов* $X \subset R^n$ *компактно, векторная функция выигрыша* $f : X \to R^m$ *непрерывна, квадратная матрица* A *порядка* m *является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда в задаче существует уточнённое по конусу, порождённому матрицей* A, *оптимальное решение.*

Существование уточнённого решения следует их компактности множества допустимых исходов X и непрерывности функции $f(x, a) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_m f_m(x)$, где

$a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, $a_i > 0$ есть левый собственный вектор матрицы A или, по другому, собственный вектор для строк матрицы A.

Т е о р е м а 3.4. *Уточнённое по конусу* K *оптимальное (максимальное, минимальное) решение* $x* \in X$ *в многокритериальной задаче* (1.1) *является оптимальным (максимальным, минимальным) по конусу* K *решением и, значит, оптимальным (максимальным, минимальным) по Парето решением.*

Уточнённое по конусу оптимальное решение многокритериальной задачи (1.1) является также оптимальным по конусу решением. Этот конус K_0 определяется положительной матрицей A_0 из теоремы 3.2 и

$$K_0 = \{f \in R^m \mid A_0 f \geqslant 0_m\} =$$

$$= \{f \mid a_1 f_1(x) + \cdots + a_m f_m(x) \geqslant 0, \text{где } a^T A = a^T\}. \qquad (3.1)$$

Здесь вектор-строка $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, $a_i > 0$, является левым собственным вектором для матрицы A или собственным вектором для строк этой матрицы, относящимуся к наибольшему положительному собственному значению $\lambda = 1$. В этом случае по определению левого собственного вектора $a^T A = a^T$. Тогда для любого вектора $f \in R^m$ выполнено условие $a^T A f = a^T f$. Из полученного равенства векторов следует, что неравенство из (3.1) есть следствие системы неравенств $Af \geqslant 0_m$ из (2.2). Значит, верно включение конусов $K \subset K_0$, где K_0 из (3.1). В этом случае по теореме 2.2, уточнённое по конусу K оптимальное решение является оптимальным по конусу K, а, согласно теореме 2.3, — оптимальным по Парето.

Суммируя результаты из вышеприведённых утверждений, получается

Т е о р е м а 3.5. *Пусть квадратная матрица* A *порядка* m *является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Тогда*

а) существует предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = A_0$;

б) предельная матрица A_0 *является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической и все строки этой матрицы равны левому собственному вектору* $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$, $a_i > 0$, *относящемуся к максимальному собственному значению* $\lambda = 1$;

с) для последовательности матриц A^n, $n = 1, 2, \dots$, *соответствующая последовательность многогранных конусов* K_n, $n = 1, 2, \dots$, *определённая аналогично* (2.2), *удовлетворяет цепочке включений* $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_n \subset \dots \subset K_0$;

д) соответствующая последовательность множеств, оптимальных по конусу K_n, $n = 1, 2, \dots$, *решений в задаче векторной оптимизации* (1.1) *удовлетворяет включениям* $X_1^* \supset X_2^* \supset X_3^* \supset \dots \supset X_n^* \supset \dots \supset X_0^*$.

Найдём уточненное по конусу максимальное решение двухкритериальной задачи рассмотренного выше примера.

Продолжим рассмотрение двухкритериальной задачи (2.7). Для неё конус доминирования K представлен в (2.8). Его можно задать с помощью стохастической матрицы, которую, так же как и в (2.8), обозначим A.

$$K = \{x \in R^2 \mid Ax = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geqslant 0_2\}.$$

Найдем предел последовательности матриц $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = A_0$. Наибольшее собственное значение матрицы A есть $\lambda = 1$. Определим соответствующий левый собственный вектор

$$x^T = (x_1, x_2),\ x_1 + x_2 = 1,\ x_i \geqslant 0, i = 1, 2$$

из решения системы двух уравнений

$$\begin{aligned} -\tfrac{2}{5}x_1 + \tfrac{4}{5}x_2 = 0, \\ \tfrac{2}{5}x_1 - \tfrac{4}{5}x_2 = 0. \end{aligned}$$

Получаем $x^T = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Тогда по теореме матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с определением 3.1, уточнённым по конусу K, максимальным решением многокритериальной задачи (2.7) будут решения задачи математического программирования (задача максимизации): $\langle [0,1] \times [0, \pi/2],\ 2r\cos\theta + r\sin\theta \rangle$. Здесь максимальное значение достигается при $r^\bullet = 1$, $\theta^\bullet = \arctan 1/2$. Эти же значения будут доставлять единственное уточнённое максимальное по конусу решение двухкритериальной задачи (2.7). Это решение представлено на рис. 1. Тогда уточнённый максимальный по конусу векторный выигрыш будет $f^\bullet = (f_1^\bullet, f_2^\bullet) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$. Он приведён в критериальном пространстве на рис. 2.

Список литературы

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. М.: Наука, 1982.
2. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом "Университет": Высш. шк., 2002.
3. Математическая энциклопедия. М.: Сов. энцикл., 1979.
4. Жуковский В. И., Салуквадзе М. Е. Парето оптимальные решения многокритериальных задач. Тбилиси: Мецниереба, 1996.
5. Гантмахер Ф. П. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
6. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.