Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2005. Ґ4(34)

УДК 517.934

© **А.И. Благодатских**
aiblag@mail.ru

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ УБЕГАЮЩЕГО В ПРИМЕРЕ ПОНТРЯГИНА[1]

Ключевые слова: групповое преследование, поимка, убегание, пример Понтрягина, конфликтно управляемый процесс.

Abstract. Sufficient conditions of catching were derived in one problem of group pursuit.

Введение

В данной работе рассматривается обобщенный пример Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков. В предположении, что корни характеристического уравнения являются чисто мнимыми, в терминах начальных позиций получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего.

Работа примыкает к исследованиям [1–3].

1. Постановка задачи

В пространстве R^ν ($\nu \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающий E. Движение каждого преследователя P_i описывается уравнением

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + a_2 x_i^{(l-2)} + \cdots + a_l x_i = u_i, \quad u_i \in V, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (грант А04–2.8–60) и программы "Университеты России" (грант 34126).

закон движения убегающего E имеет вид

$$y^{(l)} + a_1 y^{(l-1)} + a_2 y^{(l-2)} + \cdots + a_l y = v, \quad v \in V, \tag{1.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in R^\nu$, $a_1, a_2, \ldots, a_l \in R^1$, V – строго выпуклый компакт R^ν такой, что $\mathrm{Int}V \neq \emptyset$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(q)}(0) = X_i^q,\ y^{(q)}(0) = Y^q,\ \text{причем } X_i^0 \neq Y^0 \text{ для всех } i.$$

Здесь и далее

$$i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\ q = 0, 1, \ldots, l-1,\ Z_0 = (X_i^q, Y^q).$$

Вместо уравнений (1.1), (1.2) рассмотрим уравнение

$$z_i^{(l)} + a_1 z_i^{(l-1)} + a_2 z_i^{(l-2)} + \cdots + a_l z_i = u_i - v \tag{1.3}$$

с начальными условиями $z_i^{(q)}(0) = Z_i^q = X_i^q - Y^q$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Управления $u_i(t), v(t)$ из класса измеримых функций, удовлетворяющие соответственно ограничениям (1.1), (1.2), называются допустимыми.

О п р е д е л е н и е 1.2. В игре Γ возможна поимка, если существует момент $T_0 = T_0(Z_0)$ такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ найдутся допустимые управления

$$u_i(t) = u_i(t,\ Z_0,\ v(s),\ 0 \leqslant s \leqslant t)$$

такие, что для некоторых $\tau \in [0, T_0]$, $\alpha \in I$ выполнено $z_\alpha(\tau) = 0$.

2. Решение задачи

Через φ_q обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1 \omega^{(l-1)} + a_2 \omega^{(l-2)} + \cdots + a_l \omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \ldots, \omega^{(q-1)}(0) = 0,$$
$$\omega^{(q)}(0) = 1,\ \omega^{(q+1)}(0) = 0, \ldots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Корни характеристического уравнения

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + a_2\lambda^{l-2} + \cdots + a_l = 0 \tag{2.1}$$

являются чисто мнимыми.

Обозначим корни уравнения (2.1) через

$$\pm b_1\iota, \pm b_2\iota, \dots, \pm b_p\iota \quad (0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_p),$$

а их кратности соответственно

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ $(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_p = l/2)$ и $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p\} - 1$.

Пусть, далее,

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t)Z_i^0 + \varphi_1(t)Z_i^1 + \cdots + \varphi_{l-1}(t)Z_i^{l-1},$$

и так как каждая из функций φ_q имеет вид

$$\varphi_q(t) = t^\gamma\sigma_{q0}(t) + t^{\gamma-1}\sigma_{q1}(t) + \cdots + \sigma_{q\gamma}(t), \text{ где}$$

$$\sigma_{qr}(t) = \sum_{k=1}^{p}\bigl(c_{qrk}\cos b_k t + s_{qrk}\sin b_k t\bigr), \ c_{qrk}, s_{qrk} \in R^1,$$

то все функции ξ_i представимы в виде

$$\xi_i(t) = t^\gamma\Sigma_{i0}(t) + t^{\gamma-1}\Sigma_{i1}(t) + \cdots + \Sigma_{i\gamma}(t), \text{ где}$$

$$\Sigma_{ir}(t) = \sum_{k=1}^{p}\bigl(C_{irk}\cos b_k t + S_{irk}\sin b_k t\bigr), \ C_{irk}, S_{irk} \in R^\nu,$$

здесь $r = 0, 1, \dots, \gamma$.

Считаем, что $\xi_i(t) \neq 0$ для всех $i, t > 0$, ибо если $\xi_\alpha(\tau) = 0$ при некоторых $\alpha \in I, \tau > 0$, то преследователь P_α ловит убегающего E к моменту τ, полагая $u_\alpha(t) = v(t)$, $t \in [0, \tau]$.

П р е д п о л о ж е н и е 2.2. $\sigma_{l-10}(t) \not\equiv 0.$

Определим функцию

$$R(t) = \frac{1}{(t+1)^{\gamma}} \int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)|ds.$$

Л е м м а 2.1. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2. *Тогда* $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = \infty.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\gamma = 0,$ то

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t |\sigma_{l-10}(t-s)|ds = \infty,$$

так как функция σ_{l-10} является почти периодической.

Пусть $\gamma \geqslant 1,$ тогда

$$R(t) = \frac{1}{(t+1)^{\gamma}} \int\limits_0^t \Big|\sum_{k=0}^{\gamma}(t-s)^{\gamma-k}\sigma_{l-1k}(t-s)\Big|ds \geqslant R_1(t) - R_2(t), \text{ где}$$

$$R_1(t) = \frac{1}{(t+1)^{\gamma}} \int\limits_0^t (t-s)^{\gamma}|\sigma_{l-10}(t-s)|ds,$$

$$R_2(t) = \frac{1}{(t+1)^{\gamma}} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{\gamma}(t-s)^{\gamma-k}\Big|\sigma_{l-1k}(t-s)\Big|ds.$$

Теперь докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} R_1(t) = \infty,$ $\lim\limits_{t\to\infty} R_2(t) \leqslant M/\gamma,$ для некоторого положительного M и, тем самым, лемма будет доказана.

$$\lim_{t\to\infty} R_1(t) \geqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(t+1)^\gamma} \int\limits_0^{t/2} (t-s)^\gamma |\sigma_{l-10}(t-s)| ds \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{t\to\infty} \Big(\frac{t-t/2}{t+1}\Big)^\gamma \int\limits_0^{t/2} |\sigma_{l-10}(t-s)| ds = \infty.$$

Далее, так как все функции σ_{l-1k} ограничены, то существует такое положительное число M, что $|\sigma_{l-1k}(t)| \leqslant M$ для всех $t \geqslant 0$ и $k = 1, 2, \ldots, \gamma$, поэтому

$$\lim_{t\to\infty} R_2(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{M}{(t+1)^\gamma} \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{\gamma} (t-s)^{\gamma-k} ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{M}{(t+1)^\gamma} \sum_{k=1}^{\gamma} \frac{t^k}{k} = \frac{M}{\gamma}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через H_i кривые

$$H_i = \{\Sigma_{i0}(t),\ t \in [0, \infty)\}.$$

У с л о в и е 2.1. Существуют $h_i^0 \in H_i$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}.$$

У с л о в и е 2.2. Для любых $h_i \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon)$

$$0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}.$$

У с л о в и е 2.3. Для всех $t \geqslant 1$ найдется $\tau_i \in [t, t+T(\varepsilon))$, что

$$\frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^\gamma} \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon).$$

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2 *и условие* 2.1. *Тогда для некоторых* $\varepsilon > 0$ *и* $T(\varepsilon) > 0$ *выполнены условия* 2.2 *и* 2.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathrm{co}\{h_i^0\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках h_k^0, $k \in K \subset I$. Из условия 2.1 следует, что $0 \in \mathrm{Intco}\{h_k^0\}$. Так как множество $\mathrm{Intco}\{h_k^0\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $h_k \in \mathfrak{D}(h_k^0, \varepsilon)$ $0 \in \mathrm{Intco}\{h_k\}$.

Из последнего, учитывая, что

$$\mathrm{Intco}\{h_k\} \subset \mathrm{Intco}\{h_i\},$$

следует справедливость условия 2.2.

Так как функции Σ_{i0} являются почти периодическими и выполнено условие 2.1, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется число $T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \geqslant 1$ существуют $\tau_i \in [t, t + T_1(\varepsilon))$, что

$$\Sigma_{i0}(\tau_i) \in \mathfrak{D}(h_i^0, \varepsilon/3).$$

Справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \|t^{-\gamma}\xi_i(t) - \Sigma_{i0}(t)\| = 0,$$

а значит, существует число $T_2(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \geqslant T_2(\varepsilon)$

$$\|t^{-\gamma}\xi_i(t) - \Sigma_{i0}(t)\| \leqslant \varepsilon/3.$$

Взяв $T(\varepsilon) = T_1(\varepsilon) + T_2(\varepsilon)$, получаем справедливость условия 2.3.

Лемма доказана.

Далее считаем, что $\varepsilon > 0$ и $T(\varepsilon) > 0$ выбраны, исходя из условий 2.2 и 2.3.

Определим функции ψ, λ, Q

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_{l-1}(t) \geqslant 0 \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda(v, \psi, h) = \sup\left\{\lambda : \lambda \geqslant 0,\ (v - \lambda\psi h) \in V\right\},$$

$$
Q(t,h)=\frac{1}{(t+1)^{\gamma}}\int\limits_0^t|\varphi_{l-1}(t-s)|\lambda(v(s),\psi(t-s),h)ds.
$$

Положим

$$
d=(h_1,h_2,\dots,h_n),\ \mathfrak{D}=\mathfrak{D}(h_1^0,\varepsilon)\times\mathfrak{D}(h_2^0,\varepsilon)\times\dots\times\mathfrak{D}(h_n^0,\varepsilon).
$$

Л е м м а 2.3. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2 *и условие* 2.1. *Тогда существует момент T такой, что для любого допустимого управления $v(t)$ и произвольного $d\in\mathfrak{D}$ найдется номер $\alpha\in I$, что $Q(T,h_\alpha)\geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что выполнено условие 2.2, поэтому, для произвольного $d\in\mathfrak{D}$,

$$
\delta_{\pm1}(d)=\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\pm1,h_i)>0.
$$

В силу леммы 1.3.13 [3, с. 30] функция λ непрерывна на каждом из множеств $V\times\{\pm1\}\times\mathfrak{D}(h_i^0,\varepsilon)$, откуда

$$
\lim_{d^*\to d}\delta_{\pm1}(d^*)=\lim_{d^*\to d}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\pm1,h_i^*)=
$$

$$
=\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\pm1,h_i)=\delta_{\pm1}(d),
$$

следовательно, и функции $\delta_{\pm1}$ являются непрерывными, учитывая еще, что множество $\mathfrak{D}$ компакт, получим

$$
\delta=\min_{d\in\mathfrak{D}}\min_{\psi\in\{1,-1\}}\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(v,\psi,h_i)=\min_{d\in\mathfrak{D}}\{\delta_{+1}(d),\delta_{-1}(d)\}>0.
$$

Далее,

$$
\max_{i\in I}Q(t,h_i)=\frac{1}{(t+1)^{\gamma}}\max_{i\in I}\int\limits_0^t|\varphi_{l-1}(t-s)|\lambda(v(s),\psi(t-s),h_i)ds\geqslant
$$

$$
\geqslant\frac{1}{(t+1)^{\gamma}n}\int\limits_0^t|\varphi_{l-1}(t-s)|\sum_{i\in I}\lambda(v(s),\psi(t-s),h_i)ds\geqslant
$$

$$\geqslant \frac{\delta}{(t+1)^{\gamma}n}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(t-s)|ds = \frac{\delta}{n}R(t).$$

Таким образом, в силу леммы 2.1, для момента T, определяемого из условия $\frac{\delta}{n}R(T) \geqslant 1$ и некоторого $\alpha \in I$ выполнено $Q(T, h_{\alpha}) \geqslant 1$. Лемма доказана.

Пусть

$$T_1 = T_1(Z_0) = \min\{t \geqslant 1 : \inf_{v(\cdot)}\min_{d\in\mathfrak{D}}\max_{i\in I} Q(t,h_i) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2.3 $T_1 < \infty$.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены предположения* 2.1, 2.2 *и условие* 2.1. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Коши для всех $t \geqslant 0$

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int\limits_0^t \varphi_{l-1}(t-s)(u_i(s) - v(s))ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T_1 + T(\varepsilon)$ – произвольное допустимое управление убегающего E и t_1 – наименьший положительный корень функции

$$F(t) = 1 - \max_{i\in I}\frac{1}{\tau_i^{\gamma}}\int\limits_0^t |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)|\lambda\Big(v(s), \psi(\tau_i - s), \frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^{\gamma}}\Big)ds,$$

где $\tau_i \in [T_1, T_0)$ выбраны так, чтобы выполнялось условие 2.3. Отметим, что $t_1 \leqslant \tau_i$, т.к.

$$\max_{i\in I}\frac{1}{\tau_i^{\gamma}}\int\limits_0^{\tau_i} |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)|\lambda\Big(v(s), \psi(\tau_i - s), \frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^{\gamma}}\Big)ds \geqslant$$

$$\geqslant \max_{i\in I} Q(\tau_i, \frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^{\gamma}}) \geqslant 1.$$

Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda\Big(v(t), \psi(\tau_i - t), \frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^\gamma}\Big)\psi(\tau_i - t)\frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^\gamma}, \ t \in [0, T_0],$$

где считаем, что $\lambda(v(t), \psi(\tau_i - t), \tau_i^{-\gamma}\xi_i(\tau_i)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$. Тогда, с учетом формулы Коши,

$$z_i(\tau_i) = \xi_i(\tau_i)\Big(1 - \frac{1}{\tau_i^\gamma}\int\limits_0^{t_1} |\varphi_{l-1}(\tau_i - s)|\lambda\Big(v(s), \psi(\tau_i - s), \frac{\xi_i(\tau_i)}{\tau_i^\gamma}\Big)ds\Big).$$

В силу определения t_1 для некоторого $\alpha \in I$ выражение в скобках обращается в ноль, поэтому $z_\alpha(\tau_\alpha) = 0$.

Теорема доказана.

3. Пример

В R^ν рассмотрим дифференциальную игру Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и убегающего E. Уравнение (1.3) имеет вид

$$z_i^{(4)} + 2\ddot{z}_i + z_i = u_i - v.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

равны $\pm\iota$, а их кратности 2 $(\gamma = 1)$ и предположение 2.1 выполнено. Далее,

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2}t\sin t + \cos t, \quad \varphi_1(t) = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{3}{2}\sin t,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}t\sin t, \quad \varphi_3(t) = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t, \quad \sigma_{30}(t) = -\frac{1}{2}\cos t \not\equiv 0,$$

$$\xi_i(t) = t\Big(-\frac{1}{2}(Z_i^1 + Z_i^3)\cos t + \frac{1}{2}(Z_i^0 + Z_i^2)\sin t\Big) +$$
$$+ Z_i^0\cos t + \frac{1}{2}(3Z_i^1 + Z_i^3)\sin t.$$

Следовательно, предположение 2.2 выполнено и

$$\Sigma_{i0}(t) = -\frac{1}{2}(Z_i^1 + Z_i^3)\cos t + \frac{1}{2}(Z_i^0 + Z_i^2)\sin t.$$

Учитывая, что

$$\Sigma_{i0}\left(\frac{\pi}{2}\right)= \frac{1}{2}(Z_i^0 + Z_i^2), \quad \Sigma_{i0}\left(\frac{3\pi}{4}\right)= \frac{\sqrt{2}}{4}(Z_i^0 + Z_i^1 + Z_i^2 + Z_i^3),$$

$$\Sigma_{i0}(\pi) = \frac{1}{2}(Z_i^1 + Z_i^3),$$

получаем справедливость следующих утверждений.

У т в е р ж д е н и е 3.1. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0 + Z_i^2\}$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

У т в е р ж д е н и е 3.2. *Пусть*

$$0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^0 + Z_i^1 + Z_i^2 + Z_i^3\}.$$

Тогда в игре Γ *возможна поимка.*

У т в е р ж д е н и е 3.3. *Пусть* $0 \in \operatorname{Intco}\{Z_i^1 + Z_i^3\}$. *Тогда в игре* Γ *возможна поимка.*

* * *

1. Петров Н.Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 197 с.

2. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно управляемые процессы // Прикладная математика и механика. 1993. Т.57, вып.3. С. 3-14.

3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка. 1992,