Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2004. Ґ1(29)

УДК 517.9

© **Л.И. Данилов**
danilov@otf.pti.udm.ru

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО СТЕПАНОВУ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: почти периодические функции, относительный компакт Бора, равномерная аппроксимация.

Abstract. We study uniform approximation of Stepanov almost periodic functions on relative Bohr compacts.

В первой части работы вводятся обозначения, собраны определения и сформулированы основные утверждения о равномерной аппроксимации на вещественной прямой $\mathbf{R}$ почти периодических (п.п.) по Степанову функций. Во второй (основной) части равномерная аппроксимация рассматривается на относительных компактах Бора. В последней части работы содержатся обобщения утверждений из первой части для п.п. по Вейлю функций.

1. Введение

Пусть (U,ρ) – полное метрическое пространство. Через $\overline{A}$ обозначается замыкание множества $A\subseteq U$, mes – мера Лебега на $\mathbf{R}$. Функция $f:\mathbf{R}\to U$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j\in U$ и непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j\subseteq\mathbf{R}$, $j\in\mathbf{N}$, такие, что $\operatorname{mes}\mathbf{R}\backslash\bigcup_j T_j=0$ и $f(t)=x_j$ при $t\in T_j$. Такую функцию обозначим $f(\cdot)= =\sum_j x_j\chi_{T_j}(\cdot)$ (где $\chi_T(\cdot)$ – характеристическая функция множества $T\subseteq\mathbf{R}$). Используемое обозначение формально некорректно, но никаких линейных операций над элементарными функциями производиться не будет. Функция $f:\mathbf{R}\to U$ *измерима*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon : \mathbf{R} \to U$ такая, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}} \rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon\,.$$

Совокупность измеримых функций $f : \mathbf{R} \to U$ обозначим через $M(\mathbf{R}, U)$ (функции, совпадающие при почти всех (п.в.) $t \in \mathbf{R}$, отождествляются). На множестве $L_\infty(\mathbf{R}, U) \subseteq M(\mathbf{R}, U)$ измеримых и в существенном ограниченных функций определим метрику

$$D^{(\rho)}_\infty(f,g) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbf{R}} \rho(f(t), g(t)) \quad \forall f, g \in L_\infty(\mathbf{R}, U)\,.$$

Фиксируем точку $x_0 \in U$. Пусть при $p \geqslant 1$

$$M_p(\mathbf{R}, U) = \{f \in M(\mathbf{R}, U) : \sup_{\xi\in\mathbf{R}} \int_\xi^{\xi+1} \rho^p(f(t), x_0)\, dt < +\infty\}.$$

На множестве $M_p(\mathbf{R}, U)$ для всех $l > 0$ определяются метрики

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g) = \Bigl(\sup_{\xi\in\mathbf{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \rho^p(f(t), g(t))\, dt\Bigr)^{1/p},\ \ f, g \in M_p(\mathbf{R}, U)\,.$$

Если $l_1 \geqslant l$, то

$$\Bigl(\tfrac{l}{l_1}\Bigr)^{1/p} D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g) \leqslant D^{(\rho)}_{p,\,l_1}(f,g) \leqslant \Bigl(1 + \tfrac{l}{l_1}\Bigr)^{1/p} D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)\,.$$

Поэтому метрики $D^{(\rho)}_{p,\,l}$, $l > 0$, эквивалентны и существует предел

$$\widetilde{D}^{(\rho)}_p(f,g) = \lim_{l\to+\infty} D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g) = \inf_{l>0} D^{(\rho)}_{p,\,l}(f,g)\,,\ \ f, g \in M_p(\mathbf{R}, U)\,.$$

Положим $D^{(\rho)}_p \doteq D^{(\rho)}_{p,\,1}$. Если $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство ($\rho(x,y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathcal{H}$), то для функций $f \in M_p(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $p \geqslant 1$, определены нормы

$$\|f\|_{p,\,l} = \Bigl(\sup_{\xi\in\mathbf{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \|f(t)\|^p dt\Bigr)^{1/p},\ \ l > 0\,,$$

и полунорма

$$\|f\|_{p,\infty} = \lim_{l\to+\infty} \|f\|_{p,l}\,.$$

Множество $T \subseteq \mathbf{R}$ назывется *относительно плотным*, если существует число $a > 0$ такое, что $[\xi, \xi + a] \cap T \neq \varnothing$ для всех $\xi \in \mathbf{R}$. Непрерывная функция $f \in C(\mathbf{R}, U)$ принадлежит пространству $CAP\,(\mathbf{R}, U)$ *п.п. по Бору* функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество чисел $\tau \in \mathbf{R}$, для которых

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \rho(f(t), f(t+\tau)) < \varepsilon\,,$$

относительно плотно. Число $\tau \in \mathbf{R}$ называется $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,\,l})$ *-почти периодом* функции $f \in M_p(\mathbf{R}, U)$, $\varepsilon > 0$, если

$$D^{(\rho)}_{p,\,l}(f(\cdot), f(\cdot+\tau)) < \varepsilon.$$

Функция $f \in M_p(\mathbf{R}, U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbf{R}, U)$ *п.п. по Степанову порядка* p функций, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,\,1})$-почти периодов функции f. Функция $f \in M_p(\mathbf{R}, U)$, $p \geqslant 1$, принадлежит пространству $W_p(\mathbf{R}, U)$ *п.п. по Вейлю порядка* p функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l = l(\varepsilon, f) > 0$ такое, что множество $(\varepsilon, D^{(\rho)}_{p,\,l})$-почти периодов функции f относительно плотно [1]. Имеем $CAP\,(\mathbf{R}, U) \subseteq S_p(\mathbf{R}, U) \subseteq W_p(\mathbf{R}, U)$ (относительно свойств п.п. функций см., например, [1; 2]).

На пространстве U определим также метрику

$$\rho'(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\} \quad \forall x, y \in U\,;$$

(U, ρ') – полное метрическое пространство. Для всех f, g из $M(\mathbf{R}, U) = M_1(\mathbf{R}, (U, \rho'))$ обозначим

$$D^{(\rho')}_{1,\,l}(f, g) = \sup_{\xi\in\mathbf{R}} \frac{1}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho'(f(t), g(t))\,dt\,,\ l > 0\,,$$

$$\widetilde{D}^{(\rho)}(f, g) = \lim_{l\to+\infty} D^{(\rho')}_{1,\,l}(f, g)\,;\ D^{(\rho)}(f, g) \doteq D^{(\rho')}_{1,\,1}(f, g)\,.$$

Пусть $S(\mathbf{R},U) \doteq S_1(\mathbf{R},(U,\rho'))$, $W(\mathbf{R},U) \doteq W_1(\mathbf{R},(U,\rho'))$. Справедливы вложения $S(\mathbf{R},U) \subseteq W(\mathbf{R},U)$ и $W_p(\mathbf{R},U) \subseteq W(\mathbf{R},U)$, $p \geqslant 1$.

Обозначим через $(\mathrm{cl}_b\, U, \mathrm{dist})$ метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных множеств $A \subseteq U$ с метрикой Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}(A,B) = \mathrm{dist}_\rho(A,B) = \max\big\{\sup_{x\in A}\rho(x,B), \sup_{x\in B}\rho(x,A)\big\}\,,$$

$$A, B \in \mathrm{cl}_b\, U\,,$$

где $\rho(x,F) = \inf_{y\in F}\rho(x,y)$ – расстояние от точки $x \in U$ до непустого множества $F \subseteq U$. Пусть $\mathrm{cl}\, U$ – совокупность непустых замкнутых множеств $A \subseteq U$ и $\mathrm{dist}_{\rho'}$ – метрика Хаусдорфа на $\mathrm{cl}\, U$, соответствующая метрике ρ' . Имеем $\mathrm{cl}\, U = \mathrm{cl}_b\,(U,\rho')$. Метрические пространства $(\mathrm{cl}_b\, U, \mathrm{dist})$ и $(\mathrm{cl}\, U, \mathrm{dist}_{\rho'})$ являются полными. Так как $\mathrm{dist}'(A,B) \doteq \min\{1, \mathrm{dist}\,(A,B)\} = \mathrm{dist}_{\rho'}(A,B)$ для всех $A,B \in \mathrm{cl}_b\, U$, то вложение $(\mathrm{cl}_b\, U, \mathrm{dist}') \subseteq (\mathrm{cl}\, U, \mathrm{dist}_{\rho'})$ изометрично. Пространства $S(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U)$, $S_p(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U)$, $p \geqslant 1$, и $W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U)$, $W_p(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U)$, $p \geqslant 1$, *п.п. по Степанову* и *п.п. по Вейлю многозначных отображений* $\mathbf{R} \ni t \to F(t) \in \mathrm{cl}_b\, U$ определяются как соответствующие пространства п.п. функций со значениями в метрическом пространстве $(\mathrm{cl}_b\, U, \mathrm{dist})$. Положим

$$S(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U) \doteq S_1(\mathbf{R}, (\mathrm{cl}\, U, \mathrm{dist}_{\rho'})), W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U) \doteq W_1(\mathbf{R}, (\mathrm{cl}\, U, \mathrm{dist}_{\rho'})).$$

Справедливы вложения

$$S_p(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq S_1(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq S(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq S(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U)$$

и

$$W_p(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq W_1(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U)\,.$$

Последовательность $\{\tau_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$ называется *f-возвращающей* для функции $f \in W(\mathbf{R},U)$, если $\widetilde{D}^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) \to 0$

при $j \to +\infty$. Аналогично определяются f-возвращающие последовательности для функций f из пространств $CAP(\mathbf{R},U)$, $S_p(\mathbf{R},U)$, $S(\mathbf{R},U)$ и $W_p(\mathbf{R},U)$ (при замене $\widetilde{D}^{(\rho)}$ на $D^{(\rho)}_\infty$, $D^{(\rho)}_p$, $D^{(\rho)}$ и $\widetilde{D}^{(\rho)}_p$ соответственно). При этом f-возвращающие последовательности не зависят от того, какому именно из рассматриваемых пространств п.п. функций функция f считается принадлежащей (если она принадлежит нескольким из них). Для функций $f \in W(\mathbf{R},U)$ (в частности, для функций $f \in S(\mathbf{R},U)$) через $\operatorname{Mod} f$ обозначается множество (модуль, группа по сложению) чисел $\lambda \in \mathbf{R}$ таких, что $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ для любой f-возвращающей последовательности $\{\tau_j\} \subset \mathbf{R}$. Если $\tau_j \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{N}$, и $e^{i\lambda\tau_j} \to 1$ при $j \to +\infty$ для всех $\lambda \in \operatorname{Mod} f$, то последовательность $\{\tau_j\}$ является f-возвращающей для функции $f \in W(\mathbf{R},U)$. В случае банахова пространства $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ множество $\operatorname{Mod} f$ совпадает с модулем показателей Фурье функции $f \in W_1(\mathbf{R},\mathcal{H})$.

Если $\Lambda_j \subseteq \mathbf{R}$ – произвольные модули (где индекс j принимает какое-либо множество значений), то через $\sum_j \Lambda_j$ (или $\Lambda_1 + \dots + \Lambda_n$ для конечного числа модулей Λ_j, $j = 1, \dots, n$) обозначается наименьший модуль (группа по сложению) в $\mathbf{R}$, содержащий все множества Λ_j.

Пусть $S(\mathbf{R})$ – совокупность измеримых по Лебегу множеств $T \subseteq \mathbf{R}$ таких, что $\chi_T \in S_1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Если $T \in S(\mathbf{R})$, то положим $\operatorname{Mod} T = \operatorname{Mod} \chi_T$.

Для произвольного модуля $\Lambda \subseteq \mathbf{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}^{(S)}(\Lambda)$ множество последовательностей $\{T_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ непересекающихся множеств $T_j \in S(\mathbf{R})$ таких, что $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \Lambda$ и $\|\chi_{\mathbf{R}\setminus\bigcup_{j=1}^N T_j}(\cdot)\|_{1,1} \to 0$ при $N \to +\infty$.

Л е м м а 1.1 ([3; 4]). *Пусть* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(S)}(\mathbf{R})$ *и* $x_j \in U$, $j \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$\sum_j x_j \chi_{T_j}(\cdot) \in S(\mathbf{R},U)$$

и

$$\mathrm{Mod}\sum_j x_j\chi_{T_j}(\cdot)\subseteq\sum_j \mathrm{Mod}\,T_j\,.$$

Доказательство следующей теоремы (о равномерной аппроксимации п.п. по Степанову функций) приведено в [4; 5; 6].

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $f\in S(\mathbf{R},U)$ *. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существуют последовательность* $\{T_j\}\in\mathfrak{M}^{(S)}(\mathrm{Mod}\,f)$ *и точки* $x_j\in U$ *,* $j\in\mathbf{N}$*, такие, что* $\rho(f(t),x_j)<\varepsilon$ *для всех* $t\in T_j$ *,* $j\in\mathbf{N}$ *и* $\{f(t):t\in T_j\}\subseteq U$ *,* $j\in\mathbf{N}$ *, – предкомпактные множества.*

Теорема 1.1 используется при доказательстве существования п.п. по Степанову сечений многозначных п.п. по Степанову отображений. Первые результаты о п.п. по Степанову сечениях были получены А.М. Долбиловым и И.Я. Шнейбергом [7] на основе результатов Фришковского [8] (см. также [9]). В работах [4 - 6; 10 - 15] на основе теоремы 1.1 доказывалось существование п.п. по Степанову сечений, удовлетворяющих разнообразным дополнительным условиям. В частности, в [15] в случае компактного метрического пространства (U,ρ) доказано, что многозначное отображение $F:\mathbf{R}\to\mathrm{cl}_b\,U$ принадлежит пространству $S_1(\mathbf{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $f_j\in S_1(\mathbf{R},U)$, $j\in\mathbf{N}$, такие, что $\{f_j(.)\}_{j\in\mathbf{N}}$ – предкомпактное семейство в $L_\infty(\mathbf{R},U)$ и $F(t)=\overline{\bigcup_j f_j(t)}$ при п.в. $t\in\mathbf{R}$ (при этом для многозначного отображения $F\in S_1(\mathbf{R},\mathrm{cl}_b\,U)$ функции $f_j\in S_1(\mathbf{R},U)$, $j\in\mathbf{N}$, можно выбирать так, что $\mathrm{Mod}\,f_j\subseteq\mathrm{Mod}\,F$). Ниже приведены еще две теоремы о п.п. по Степанову сечениях.

Пусть $\mathcal{N}$ – множество неубывающих функций $[0,+\infty)\ni t\to\to\eta(t)\in[0,+\infty)$, для которых $\eta(t)>0$ при $t>0$. Для непустого множества $A\subseteq U$ обозначим $A^\delta=\{x\in U:\rho(x,A)<\delta\}$, $\delta>0$.

Т е о р е м а 1.2 ([16]). *Пусть* (U,ρ) *– полное метрическое пространство,* $F\in S(\mathbf{R},\mathrm{cl}\,U)$ *,* $g\in S(\mathbf{R},U)$ *. Тогда для любой функции* $\eta\in\mathcal{N}$ *существует функция* $f\in S(\mathbf{R},U)$ *такая,* *что* $\operatorname{Mod} f \subseteq \operatorname{Mod} F + \operatorname{Mod} g$, $f(t) \in F(t)$ *п.в. (почти всюду) и* $\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ *п.в. Если, кроме того,* $F \in S_p(\mathbf{R}, \operatorname{cl}_b U)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$ *, то* $f \in S_p(\mathbf{R}, U)$.

Теорема 1.2 при $\eta(0) > 0$ доказана в [4; 5]. Если $\eta(0) = 0$, то функция f , определяемая в теореме 1.2, совпадает с функцией g при п.в. $t \in \mathbf{R}$, для которых $g(t) \in F(t)$.

Т е о р е м а 1.3 ([16]). *Пусть* (U, ρ) *– полное метрическое пространство,* $F \in S(\mathbf{R}, \operatorname{cl} U)$ *,* $\varepsilon > 0$ *,* $\delta > 0$ *,* $n \in \mathbf{N}$ *,* $g_j \in S(\mathbf{R}, U)$ *,* $j = 1, \ldots, n$ *. Предположим, что при п.в.* $t \in \mathbf{R}$ *множество точек* $x_j(t) = g_j(t)$ *, для которых* $g_j(t) \in F^\delta(t)$ *, можно дополнить (если оно состоит из меньшего числа точек) до* n *точек* $x_j(t) \in F^\delta(t)$ *,* $j = 1, \ldots, n$ *, образующих* ε *-сеть для множества* $F(t)$ *. Тогда для любого* $\varepsilon' > \varepsilon + \delta$ *существуют функции* $f_j \in S(\mathbf{R}, U)$ *,* $j = 1, \ldots, n$ *, такие, что* $\operatorname{Mod} f_j \subseteq \operatorname{Mod} F + \sum_{j=1}^n \operatorname{Mod} g_j$ *,* $f_j(t) \in F(t)$ *п.в.,* $f_j(t) = g_j(t)$ *при п.в.* $t \in \{\tau \in \mathbf{R} : g_j(\tau) \in F(\tau)\}$ *и множество точек* $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ *при п.в.* $t \in \mathbf{R}$ *образует* ε' *-сеть для множества* $F(t)$.

Частные случаи теоремы 1.3 приводились в [5; 14].

В [17] теорема 1.1 применяется при доказательстве следующей теоремы (являющейся почти периодическим вариантом теоремы Лузина).

Т е о р е м а 1.4. *Пусть* $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ *– банахово пространство,* $f \in S(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ *. Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют множество* $T \in S(\mathbf{R})$ *и функция* $\mathcal{F} \in CAP(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ *такие, что* $\operatorname{Mod} T \subseteq \operatorname{Mod} f$ *,* $\operatorname{Mod} \mathcal{F} \subseteq \operatorname{Mod} f$ *,* $\|\chi_{\mathbf{R} \setminus T}(\cdot)\|_{1,1} < \delta$ *и* $f(t) = \mathcal{F}(t)$ *при всех* $t \in T$ *(если* $\operatorname{Mod} f \neq \{0\}$ *, то множество* $T \subseteq \mathbf{R}$ *можно считать замкнутым).*

Теорема 1.4 (в свою очередь) позволяет (для банахова пространства $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$) получить усиленный вариант теоремы 1.1.

Т е о р е м а 1.5 ([17]). *Пусть* $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – *банахово пространство,* $f \in S(\mathbf{R}, \mathcal{H})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют последовательность* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(S)}(\mathrm{Mod}\, f)$, *точки* $x_j \in U$ *и функции* $\mathcal{F}_j \in CAP\,(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $j \in \mathbf{N}$, *такие, что* $\mathrm{Mod}\,\mathcal{F}_j \subseteq \subseteq \mathrm{Mod}\, f$, $f(t) = \mathcal{F}_j(t)$ *при* $t \in T_j$, $j \in \mathbf{N}$, *и* $\rho(\mathcal{F}_j(t), x_j) < \varepsilon$ *для всех* $t \in \mathbf{R}$ *и* $j \in \mathbf{N}$.

В следующем разделе работы теоремы 1.4 и 1.5 переносятся на относительные компакты Бора.

2. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций на относительных компактах Бора

В этом разделе будем предполагать, что $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство ($\rho(x,y) = \|x-y\|, x,y \in \mathcal{H}$) и $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ – некоторый фиксированный счетный плотный в $\mathbf{R}$ модуль (с выбранной нумерацией чисел $\lambda \in \Lambda$). Пусть $CAP^{\Lambda}(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $S_p^{\Lambda}(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $p \geqslant 1$, и $S^{\Lambda}(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ – пространства функций f из $CAP\,(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $S_p(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ и $S(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ соответственно, для которых $\mathrm{Mod}\, f \subseteq \Lambda$. Определим относительный компакт Бора $\mathbf{R}_B^{\Lambda}$ (см., например, [18, гл. 1]), отвечающий счетному (плотному в $\mathbf{R}$) модулю Λ , как пополнение метрического пространства $(\mathbf{R}, \rho_\Lambda)$, где

$$\rho_\Lambda(\xi, \eta) = \sum_{j\in\mathbf{N}} 2^{-j}\, |e^{i\lambda_j \xi} - e^{i\lambda_j \eta}|\,, \ \xi, \eta \in \mathbf{R}$$

(метрика ρ_Λ зависит от нумерации чисел $\lambda \in \Lambda$, но при разных нумерациях получаются эквивалентные между собой метрики). Полное метрическое пространство $(\mathbf{R}_B^{\Lambda}, \rho_\Lambda)$ является компактным, при этом с вещественной прямой $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}_B^{\Lambda}$ (по непрерывности) переносится операция сложения, превращающая относительный компакт Бора $\mathbf{R}_B^{\Lambda}$ в компактную абелеву группу. Пусть μ_Λ – нормированная мера Хаара на $\mathbf{R}_B^{\Lambda}$ (инвариантная относительно сдвигов и взятия противоположных элементов), $\mu_\Lambda(\mathbf{R}) = 0$. Функция $f : \mathbf{R} \to \mathcal{H}$ принадлежит пространству $CAP^{\Lambda}(\mathbf{R}, \mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда функция

$(\mathbf{R}\,,\rho_\Lambda)\ni t\to f(t)\in\mathcal{H}$ равномерно непрерывна и, следовательно, продолжается до непрерывной функции f^Λ на относительный компакт Бора $\mathbf{R}_B^\Lambda$. Если $f\in CAP^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$, то (см., например, [18])

$$\int\limits_{\mathbf{R}_B^\Lambda} f^\Lambda(x)\,d\mu_\Lambda(x)=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(t)\,dt\,.$$

Существует естественное непрерывное инъективное отображение $(S^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H}),D^{(\rho)})\ni f\to f^\Lambda$ в метрическое пространство $(M(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H}),d)$ измеримых (относительно меры Хаара μ_Λ) функций $\mathcal{F}:\mathbf{R}_B^\Lambda\to\mathcal{H}$ с метрикой

$$d(\mathcal{F},\mathcal{G})=\int\limits_{\mathbf{R}_B^\Lambda}\min\{1,\|\mathcal{F}(x)-\mathcal{G}(x)\|\}\,d\mu_\Lambda(x)\quad\forall\mathcal{F},\mathcal{G}\in M(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H})\,,$$

ставящее в соответствие функциям $f\in CAP^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$ их непрерывные продолжения f^Λ на $\mathbf{R}_B^\Lambda$ (и продолженное по непрерывности из $(S^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H}),D^{(\rho)})$ в $(M(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H}),d)$). Рассматриваемое отображение также непрерывно из $(S_p^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H}),D_p^{(\rho)})$ в $L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H})$, $p\geqslant1$, где $L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H})$ – банахово пространство измеримых функций $\mathcal{F}:\mathbf{R}_B^\Lambda\to\mathcal{H}$, для которых

$$\|\mathcal{F}\|_{L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda,\mathcal{H})}=\Bigl(\int\limits_{\mathbf{R}_B^\Lambda}\|\mathcal{F}(x)\|^p d\mu_\Lambda(x)\Bigr)^{1/p}<+\infty\,.$$

Пространства $(M(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H}),d)$ и $L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda\,,\mathcal{H})$, $p\geqslant1$, изометричны соответствующим пространствам п.п. функций Безиковича [18] (см. также [16]), отвечающим счетному плотному в $\mathbf{R}$ модулю Λ .

Пусть $(M([0,1],\mathcal{H}),D^{(\rho)}_{[0,1]})$ – метрическое пространство измеримых функций $f:[0,1]\to\mathcal{H}$ с метрикой

$$D^{(\rho)}_{[0,1]}(f,g)=\int_0^1\min\{1,\|f(t)-g(t)\|\}\,dt\quad\forall f,g\in M([0,1],\mathcal{H})\,.$$

Л е м м а 2.1 ([16]). *Функция* $\mathcal{F} \in M(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$ *тогда и только тогда является образом* f^Λ *некоторой функции* f *из* $S^\Lambda(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, *когда функция*

$$(\mathbf{R}_B^\Lambda, \rho_\Lambda) \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \mathcal{F}(x+t)\} \in (M([0,1], \mathcal{H}), D_{[0,1]}^{(\rho)})$$

непрерывна (совпадает при п.в. $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda$ *с непрерывной функцией).*

Л е м м а 2.2 ([16]). *Функция* $\mathcal{F} \in L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$, $p \geqslant 1$, *тогда и только тогда является образом* f^Λ *некоторой функции* $f \in S_p^\Lambda(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, *когда функция*

$$(\mathbf{R}_B^\Lambda, \rho_\Lambda) \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \mathcal{F}(x+t)\} \in L_p([0,1], \mathcal{H})$$

непрерывна (совпадает при п.в. $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda$ *с непрерывной функцией).*

В следующем примере строится функция $\mathcal{F} \in L_\infty(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H}) \subset$ $\subset M(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$ такая, что она не совпадает ни с одной из функций $f^\Lambda \in M(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$, где $f \in S^\Lambda(\mathbf{R}, \mathcal{H})$.

П р и м е р 2.1. Так как для любого $\varepsilon > 0$ существуют сколь угодно большие числа $\xi \in \mathbf{R}$, для которых $\rho_\Lambda(0, \xi) < \varepsilon$, то можно выбрать последовательность непересекающихся отрезков $[\xi_j, \xi_j + 1] \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{R}_B^\Lambda$, имеющих некоторые непересекающиеся (между собой) открытые (в $\mathbf{R}_B^\Lambda$) окрестности $\mathcal{O}_j \supset [\xi_j, \xi_j + 1]$, $j \in \mathbf{N}$, и таких, что $\rho_\Lambda(0, \xi_j) \to 0$ при $j \to +\infty$ (следовательно, $[0,1] \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$ для всех $j \in \mathbf{N}$). Фиксируем некоторый вектор $e \in \mathcal{H} : \|e\| = 1$, обозначим $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in 2\mathbf{N}-1} \mathcal{O}_j$ и положим

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} e, & \text{если } x \in \mathcal{O}, \\ 0 & \text{если } x \in \mathbf{R}_B^\Lambda \backslash \mathcal{O}. \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{F} \in L_\infty(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$ и при этом для всех $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda$ из достаточно малых окрестностей (в $\mathbf{R}_B^\Lambda$) элементов $\xi_j \in \mathbf{R} \subset \mathbf{R}_B^\Lambda$ имеем

$\mathcal{F}(x+t) \equiv e$, $t \in [0,1]$, если $j \in 2\mathbf{N}$, и $\mathcal{F}(x+t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$, если $j \in 2\mathbf{N}-1$. Последнее означает, что функция

$$(\mathbf{R}_B^\Lambda, \rho_\Lambda) \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \mathcal{F}(x+t)\} \in (M([0,1],\mathcal{H}), D_{[0,1]}^{(\rho)})$$

не может (так как $\rho_\Lambda(0,\xi_j) \to 0$ при $j \to +\infty$) при п.в. $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda$ совпадать с непрерывной функцией и, следовательно (в силу леммы 2.1), функция $\mathcal{F}$ не совпадает (п.в.) ни с одной из функций f^Λ, где $f \in S^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$. $\square$

Приведенный пример показывает, что вложения

$$\{f^\Lambda \in M(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H}) : f \in S^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})\} \subset M(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$$

и

$$\{f^\Lambda \in L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H}) : f \in S_p^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})\} \subset L_p(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H}),\ p \geqslant 1,$$

являются строгими (см. соответствующую проблему, сформулированную в конце главы 1 книги [18]).

Обозначим через $\mathcal{C}_\Lambda^o$ и $\mathcal{C}_\Lambda^c$ множества соответственно открытых и замкнутых подмножеств $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{R}_B^\Lambda$, для которых отображение

$$(\mathbf{R}_B^\Lambda, \rho_\Lambda) \ni x \to \{[0,1] \ni t \to \chi_{\mathcal{O}}(x+t)\} \in L_1([0,1],\mathbf{R})$$

непрерывно ($\chi_{\mathcal{O}}$ – характеристическая функция множества $\mathcal{O}$),

$$\mathcal{C}_\Lambda^o(\varepsilon) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{C}_\Lambda^o : \mathrm{mes}\,\{t \in [0,1] : x+t \in \mathcal{O}\} < \varepsilon\ \forall x \in \mathbf{R}_B^\Lambda\},\ \varepsilon > 0.$$

Если $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_\Lambda^o(\varepsilon)$, то $\mu_\Lambda(\mathcal{O}) < \varepsilon$.

Т е о р е м а 2.1 ([16]). *Пусть* $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ *– банахово пространство,* $f \in S^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$. *Тогда для всех* $j \in \mathbf{N}$ *найдутся множества* $\mathcal{O}_j \in \mathcal{C}_\Lambda^o(2^{-j})$ *и функции* $\mathcal{F}_j \in C(\mathbf{R}_B^\Lambda, \mathcal{H})$ *такие, что* $\mathcal{O}_{j+1} \subseteq \mathcal{O}_j$, $\mathbf{R}_B^\Lambda \setminus \mathcal{O}_j$ *– замыкания (в* $\mathbf{R}_B^\Lambda$*) множеств* $\mathbf{R}\setminus\mathcal{O}_j$, $\mathcal{F}_{j+1}(x) = \mathcal{F}_j(x)$ *при всех* $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda \setminus \mathcal{O}_j$ *и* $\mathcal{F}_j(t) = f(t)$ *при всех*

$t \in \mathbf{R}\backslash\mathcal{O}_j$. *Если* $f \in S_p^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$, $p \geqslant 1$, *то функции* $\mathcal{F}_j$ *можно, кроме того, выбрать так, что*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}_B^\Lambda} \int_0^1 \|\mathcal{F}_j(x+t)\|^p dt \leqslant \sup_{\xi\in\mathbf{R}} \int_0^1 \|f(\xi+t)\|^p dt$$

и

$$\sup_{x\in\mathbf{R}_B^\Lambda} \int_{t\in[0,1]\,:\,x+t\in\mathcal{O}_j} \|\mathcal{F}_j(x+t)\|^p dt \leqslant 2^{-j} \sup_{\xi\in\mathbf{R}} \int_0^1 \|f(\xi+t)\|^p dt\,.$$

В условиях теоремы 2.1 определена функция

$$\mathbf{R}_B^\Lambda \setminus \bigcap_k \mathcal{O}_k \ni x \to \mathcal{F}(x) \in \mathcal{H},$$

совпадающая с функцией $\mathcal{F}_j(x)$ при $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda \setminus \mathcal{O}_j$;

$$\mu_\Lambda\big(\bigcap_k \mathcal{O}_k\big) = 0$$

и $\mathcal{F}(t) = f(t)$ при п.в. $t \in \mathbf{R}$. При этом (при п.в. $x \in \mathbf{R}_B^\Lambda$) $\mathcal{F}(x) = f^\Lambda(x)$ (в следующей теореме 2.2 функция $f^\Lambda \in M(\mathbf{R}_B^\Lambda,\mathcal{H})$ (для функции $f \in S^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$) будет выбираться именно таким образом). Теорема 2.1 является обобщением п.п. варианта теоремы Лузина на относительный компакт Бора $\mathbf{R}_B^\Lambda$. Теорема 1.4 (если (в условиях этой теоремы) $\mathrm{Mod}\, f$ – счетный плотный в $\mathbf{R}$ модуль) непосредственно следует из теоремы 2.1 , так как для любого множества $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_\Lambda^o$ множество $\mathcal{O} \cap \mathbf{R}$ является открытым на вещественной прямой $\mathbf{R}$, $\mathcal{O}\cap\mathbf{R} \in S(\mathbf{R})$ и $\mathrm{Mod}\,\mathcal{O}\cap\mathbf{R} \subseteq \Lambda$. Кроме того, ограничение $\mathcal{F}(\cdot|_\mathbf{R})$ любой функции $\mathcal{F} \in C(\mathbf{R}_B^\Lambda,\mathcal{H})$ на $\mathbf{R}$ принадлежит пространству $CAP^\Lambda(\mathbf{R},\mathcal{H})$, а для любого множества $\mathcal{O} \in \mathcal{C}_\Lambda^o(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, имеем $\|\chi_{\mathcal{O}\cap\mathbf{R}}(\cdot)\|_{1,1} < \varepsilon$.

В следующей теореме утверждение о равномерной аппроксимации п.п. по Степанову функций приведено для относительного компакта Бора $\mathbf{R}_B^\Lambda$.

Т е о р е м а 2.2 ([16]). *Пусть* $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – *банахово пространство,* $f \in S^\Lambda(\mathbf{R}, \mathcal{H})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся точки* $y_j \in \mathcal{H}$, *непересекающиеся множества* $\mathcal{O}_j \in \mathcal{C}^c_\Lambda$ *и функции* $\mathcal{F}_j \in C(\mathbf{R}^\Lambda_B, \mathcal{H})$, $j \in \mathbf{N}$, *такие, что* $\mathbf{R}^\Lambda_B \setminus \bigcup_{j \leqslant J} \mathcal{O}_j \in \mathcal{C}^o_\Lambda(\varepsilon_J)$, *где* $\varepsilon_J \to 0$ *при* $\mathbf{N} \ni J \to +\infty$, $\|\mathcal{F}_j(x) - y_j\| < \varepsilon$ *для всех* $x \in \mathbf{R}^\Lambda_B$ *и* $f^\Lambda(x) = \mathcal{F}_j(x)$ *для всех* $x \in \mathcal{O}_j$, $j \in \mathbf{N}$.

Из теоремы 2.2 вытекает теорема 1.5. Более того, если в условиях теоремы 1.5 имеем $\operatorname{Mod} f \neq \{0\}$, то (как следует из теоремы 2.2, при этом отдельно рассматривается случай, когда функция f является периодической) все множества T_j , $j \in \mathbf{N}$, можно считать замкнутыми.

3. Равномерная аппроксимация почти периодических по Вейлю функций

Пусть $W(\mathbf{R})$ – совокупность измеримых (по Лебегу) множеств $T \subseteq \mathbf{R}$ таких, что $\chi_T \in W_1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Имеем $S(\mathbf{R}) \subset W(\mathbf{R})$. Для множеств $T \in W(\mathbf{R})$ положим $\operatorname{Mod} T = \operatorname{Mod} \chi_T$.

Для произвольного модуля $\Lambda \subseteq \mathbf{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ непересекающихся множеств $T_j \in W(\mathbf{R})$, для которых $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \Lambda$, $\operatorname{mes} \mathbf{R} \setminus \bigcup_j T_j = 0$ и $\|\chi_{\mathbf{R} \setminus \bigcup_{j=1}^N T_j}(\cdot)\|_{1,\infty} \to 0$ при $N \to +\infty$.

Л е м м а 3.1 ([19]). *Пусть* $\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\mathbf{R})$ *и* $x_j \in U$, $j \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$\sum_j x_j \chi_{T_j}(\cdot) \in W(\mathbf{R}, U)$$

и

$$\operatorname{Mod} \sum_j x_j \chi_{T_j}(\cdot) \subseteq \sum_j \operatorname{Mod} T_j .$$

Т е о р е м а 3.1 ([19]). *Пусть* $f \in W(\mathbf{R}, U)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют последовательность*

$$\{T_j\} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod} f)$$

и точки $x_j \in U$, $j \in \mathbf{N}$, *такие, что* $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$ *для всех* $t \in T_j$, $j \in \mathbf{N}$.

Теорема 3.1, являющаяся теоремой о равномерной аппроксимации п.п. по Вейлю функций (элементарными п.п. по Вейлю функциями), применяется при доказательстве существования п.п. по Вейлю сечений многозначных отображений. Следующая теорема (аналогичная теореме 1.2) доказывается с помощью теоремы 3.1.

Т е о р е м а 3.2 ([19]). *Пусть* (U, ρ) – *полное метрическое пространство,* $F \in W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U)$ *и* $g \in W(\mathbf{R}, U)$. *Тогда для любой функции* $\eta \in \mathcal{N}$ *(для которой можно считать, что* $\eta(0) = 0$ *) существует функция* $f \in W(\mathbf{R}, U)$ *такая, что* $\mathrm{Mod}\, f \subseteq \mathrm{Mod}\, F + \mathrm{Mod}\, g$, $f(t) \in F(t)$ *п.в. и*

$$\rho(f(t), g(t)) \leqslant \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t))) \quad \text{п.в.}$$

Если, кроме того, $F \in W_p(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U)$ *для некоторого* $p \geqslant 1$, *то* $f \in W_p(\mathbf{R}, U)$.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть* (U, ρ) – *полное сепарабельное метрическое пространство,* $F \in W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U)$. *Тогда найдутся функции* $f_j \in W(\mathbf{R}, U)$, $j \in \mathbf{N}$, *такие, что* $\mathrm{Mod}\, f_j \subseteq \mathrm{Mod}\, F$ *и* $F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$ *при п.в.* $t \in \mathbf{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем счетное всюду плотное множество точек $x_k \in U$, $k \in \mathbf{N}$, и в соответствии с теоремой 3.2 (в которой выбираем функции $\eta(t) \equiv 2^{-n}$, $t \in [0, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}$ и $g(t) \equiv x_k$, $t \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$) для всех $k, n \in \mathbf{N}$ найдем такие функции $f_{k,n} \in W(\mathbf{R}, U)$, что $\mathrm{Mod}\, f_{k,n} \subseteq \mathrm{Mod}\, F$, $f_{k,n}(t) \in F(t)$ п.в. и $\rho(f_{k,n}(t), x_k) < \rho(x_k, F(t)) + 2^{-n}$ п.в. Осталось перенумеровать функции $f_{k,n}(.)$ с помощью одного индекса $j \in \mathbf{N}$.

Если в условиях следствия 3.1 $F \in W_p(\mathbf{R}, \mathrm{cl}_b\, U) \subseteq W(\mathbf{R}, \mathrm{cl}\, U)$, $p \geqslant 1$, то все функции f_j , $j \in \mathbf{N}$, принадлежат пространству $W_p(\mathbf{R}, U)$ [19].

Теорема 3.2 находит применение при исследовании почти периодических по Вейлю дифференциальных включений [20; 21].

Список литературы

1. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.
2. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 205 с.
3. Данилов Л.И. Многозначные почти периодические отображения и их сечения. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1993. 36 с. Деп. в ВИНИТИ 24.09.93, Ѓ 2465-В93.
4. Данилов Л.И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16-78.
5. Данилов Л.И. О сечениях многозначных почти периодических отображений. Новосибирск: Ред. ѓСиб. матем. журн.Є, 1995. 39 с. Деп. в ВИНИТИ 31.07.95, Ѓ 2340-В95.
6. Данилов Л.И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сб. 1997. Т. 188, Ѓ 10. С. 3-24.
7. Долбилов А.М., Шнейберг И.Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32, Ѓ 2. С. 172-175.
8. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, Ѓ 2. P. 163-174.
9. Bressan A., Colombo G. Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math. 1988. Vol. 90. P. 69-86.
10. Данилов Л.И., Иванов А.Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. 1994. Ѓ 6. С. 50-59.
11. Данилов Л.И. О многозначных почти периодических отображениях, зависящих от параметра // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 1994. Ѓ 2. С. 29-44.
12. Данилов Л.И. О суперпозиции почти периодических многозначных отображений и функций. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1995. - 31 с. Деп. в ВИНИТИ 31.01.95, Ѓ 262-В95.

13. Данилов Л.И. О почти периодических мерозначных функциях. I. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1996. 72 с. Деп. в ВИНИТИ 05.05.96, Ѓ 1434-В96.
14. Данилов Л.И. Об операторах суперпозиции, сохраняющих почти периодичность. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 1998. 64 с. Деп. в ВИНИТИ 26.05.98, Ѓ 1589-В98.
15. Данилов Л.И. О почти периодических многозначных отображениях // Матем. заметки. 2000. Т. 68, Ѓ 1. С. 82-90.
16. Данилов Л.И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций и почти периодические сечения многозначных отображений. Ижевск: ФТИ УрО РАН, 2003. - 70 с. Деп. в ВИНИТИ 21.02.03, Ѓ 354-В2003.
17. Данилов Л.И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Математика. 1998. Ѓ 5. С. 10-18.
18. Панков А.А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1985.
19. Danilov L.I. On equi-Weyl almost periodic selections of multivalued maps. Preprint arXiv: math.CA/0310010, 2003.
20. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions. Differential Inclusions and Optimal Control (ed. by J.Andres, L.Górniewicz and P.Nistri), LN in Nonlin. Anal. 1998. Vol. 2. P. 35-50.
21. Andres J., Bersani A.M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics // Acta Appl. Math. 2001. Vol. 65, Ѓ 1-3. P. 35-57.