Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2004. Ґ1(29)

УДК 517.958:530.145.6

© **Н.И. Плетникова**
chuburin@otf.pti.udm.ru

ОБ ОДНОМЕРНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ВОЗМУЩЕННОЙ СТУПЕНЬКИ

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелокальный потенциал, собственное значение, резонанс, асимптотика

Abstract. We consider a Schrödinger operator of the form $H=-\frac{d^2}{dx^2}+V$ acting in $L^2(\mathbf{R})$ where $V=V_0\theta(x)+\varepsilon(\cdot,\varphi_0)\varphi_0$ is non-local potential. We prove that the unique level (i.e. eigenvalue or resonance of the operator H) exists for all sufficiently small ε and $V_0=V_0(\varepsilon)$. We investigate the asymptotic behaviour of this level. (If $V_0(\varepsilon)$ is separated from zero the levels are absent.) We study the asymptotic behaviour of eigenfunctions for $|x|\to\infty$.

Введение

В статье рассматривается уравнение Шредингера

$$H\psi=E\psi, \tag{0.1}$$

где $H=-\frac{d^2}{dx^2}+V$ — оператор Шредингера с потенциалом V вида $V=V_0\theta(x)+\varepsilon(\cdot,\varphi_0)\varphi_0$, где $V_0<0$ (данное предположение не уменьшает общности), $\varepsilon\in\mathbf{R}$ — параметр, $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неравенству вида $|\varphi_0(x)|\leqslant Ce^{-\alpha|x|}$, причем $\alpha>\sqrt{|V_0|}>0$, и $\theta(x)$ - функция Хевисайда. Потенциал такого вида является простой моделью кристаллической поверхности; в данной модели периодическое распределение заряда при $x>0$ усредняется (таким образом, периодическая при $x>0$ функция заменяется константой), а поверхностные эффекты описаны одномерным возмущением (ґсепарабельным потенциаломЄ — см. [1]). Потенциалы такого вида используются в физике, например, в рамках теории псевдопотенциала [2]. В работе [3] исследовался аналогичный оператор с локальным потенциалом.

В дальнейшем под обобщенными собственными функциями оператора H понимаются ненулевые решения уравнения (0.1), где $E \in \mathbf{C}$, ψ удовлетворяет условию

$$\psi \cdot \varphi_0 \in L^1(\mathbf{R}), \tag{0.2}$$

а $(\psi(x), \varphi_0)$ обозначает, вообще говоря, не скалярное произведение, а $\int\limits_{\mathbf{R}} \psi(x)\overline{\varphi_0(x)}dx$.

В статье описан спектр оператора H, изучена асимптотика собственных значений и резонансов данного оператора при малых ε и V_0, а также описана асимптотика (обобщенных) собственных функций оператора H при $x \to \pm\infty$.

Обозначим $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_0\theta(x)$, тогда уравнение (0.1) можно переписать в виде

$$H_1\varphi + \varepsilon(\psi, \varphi_0)\varphi_0 = E\psi. \tag{0.3}$$

Введем обозначения для резольвент операторов H_0 и H_1, полагая $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$, $R_1(E) = (H_1 - E)^{-1}$. В дальнейшем ядра этих резольвент (являющихся интегральными операторами - см. ниже), вообще говоря, продолженные по параметру E на второй лист соответствующей римановой поверхности, будем для краткости называть функциями Грина. Спектр (существенный спектр) оператора H будем обозначать через $\sigma(H)$ ($\sigma_{\text{ess}}(H)$). Нормы, которые будут в дальнейшем встречаться, — это нормы в $L^2(\mathbf{R})$.

1. Предварительные результаты

Имеет место следующее утверждение (см. [3]; в приведенной в статье формуле не хватает скобки).

Л е м м а 1.1. *Функция Грина оператора* H_1 *имеет вид*

$$G_1(x,y,E,V_0) = -\theta(x)\theta(y)[\tfrac{1}{2i\sqrt{E-V_0}}e^{i\sqrt{E-V_0}|x-y|}+$$

$$+\tfrac{-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}{2i\sqrt{E-V_0}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}e^{i\sqrt{E-V_0}(x+y)}]-$$

$$-\theta(x)\theta(-y)\tfrac{1}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}e^{i\sqrt{E-V_0}x-i\sqrt{E}y}-$$

$$-\theta(-x)\theta(y)\tfrac{1}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}e^{i\sqrt{E}x+i\sqrt{E-V_0}y}-$$

$$-\theta(-x)\theta(-y)[\tfrac{1}{2i\sqrt{E}}e^{i\sqrt{E}|x-y|}-\tfrac{-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}{2i\sqrt{E}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}e^{-i\sqrt{E}(x+y)}]. \quad (1.1)$$

Т е о р е м а 1.1. *Имеют место равенства*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma(H_1) = [V_0, +\infty). \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем второе равенство. Пусть $E \in [V_0, +\infty)$, докажем, что $E \in \sigma(H_1)$. В силу замкнутости спектра можем считать, что $E > V_0$. Достаточно доказать (см. [4]) существование такой последовательности ψ_n из области определения оператора H_1 , что

$$\int_{\mathbf{R}} |\psi_n(x)|^2 dx = 1, \quad n \in \mathbf{N} \quad (1.3)$$

и

$$||(H_1 - E)\psi_n|| \to 0 \ \ (n \to +\infty). \quad (1.4)$$

Выберем последовательность ψ_n в виде $\psi_n(x) = C_n\varphi(\frac{x}{n})\psi(x)$, где C_n — нормировочные константы, $\varphi(x) \in C_0^\infty(x)$ — неотрицательная функция с носителем в $[0, +\infty)$, $||\varphi(x)|| = 1$ и $\psi_0(x)$ — решение уравнения

$$-\tfrac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\theta(x)\psi = E\psi \quad (1.5)$$

вида

$$\psi_0(x) = \theta(-x)(\tfrac{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}{-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}e^{-i\sqrt{E}x} + e^{i\sqrt{E}x})+$$

$$+\theta(x)\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}e^{-i\sqrt{E-V_0}x}. \qquad (1.6)$$

Заметим, что при $E>0$ функция $\psi_0(x)$ является ограниченной вместе со своей производной. Учитывая условие (1.3), нормировочные множители C_n, $n\in\mathbf{N}$, имеют

вид $C_n=\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{2\sqrt{En}}$. В итоге получим последовательность

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{2\sqrt{En}}\varphi(\tfrac{x}{n})\psi(x).$$

Проверим выполнение второго условия. Если $P=\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{2\sqrt{E}}$, то

$$(H_1-E)\psi_n=\tfrac{P}{\sqrt{n}}\big(-\tfrac{1}{n^2}\varphi''(\tfrac{x}{n})\psi(x)-\tfrac{2}{n}\varphi'(\tfrac{x}{n})\psi'(x)-$$

$$-\varphi(\tfrac{x}{n})\psi''(x)+V_0\theta(x)\varphi(\tfrac{x}{n})\psi(x)-E\varphi(\tfrac{x}{n})\psi(x)\big)=$$

$$=\tfrac{P}{\sqrt{n}}\big(-\tfrac{1}{n^2}\varphi''(\tfrac{x}{n})\psi(x)-\tfrac{2}{n}\varphi'(\tfrac{x}{n})\psi'(x)\big). \qquad (1.7)$$

Имеем

$$\int\limits_{\mathbf{R}}\big|\tfrac{P}{\sqrt{n}}(-\tfrac{1}{n^2}\varphi''(\tfrac{x}{n})\psi(x))\big|^2dx=$$

$$=\tfrac{P^2}{n^5}\int\limits_{\mathbf{R}}|\varphi''(\tfrac{x}{n})\psi(x)|^2dx=\tfrac{P^2}{n^4}\int\limits_{\mathbf{R}}|\varphi''(z)\psi(nz)|^2dz\leqslant$$

$$\leqslant C\tfrac{P^2}{n^4}\int\limits_{\mathbf{R}}|\varphi''(z)|^2dz\to 0\ \ (n\to\infty). \qquad (1.8)$$

Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}}\big|\tfrac{P}{\sqrt{n}}(-\tfrac{2}{n}\varphi''(\tfrac{x}{n})\psi(x))\big|^2dx\to 0\ \ (n\to\infty). \qquad (1.9)$$

Из (1.7) — (1.9) вытекает, что $||(H_1-E)\psi_n||\to 0$ при $n\to\infty$. Докажем утверждение в другую сторону. Пусть $E\in\sigma(H_1)$. Предположим противное, что $E\notin[V_0,+\infty)$. Но для таких E, как легко видеть, функция Грина оператора H_1 определяет интегральный оператор, действующий в $L^2(\mathbf{R})$, и, таким образом, для данного E существует резольвента $R_1(E)$ - противоречие. Произведение операторов $\varepsilon(\cdot, \varphi_0)\varphi_0$ и $R_1(E)$, где $E \notin \sigma(H_1)$, является одномерным и, следовательно, компактным оператором. В силу теоремы об относительно компактных возмущениях [5, раздел XIII.4] справедливо $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_1)$. Очевидно, что $\sigma_{\text{ess}}(H_1) = \sigma(H_1)$, тем самым теорема доказана.

При условии $E \notin [V_0, +\infty)$ приведем уравнение (0.3) к интегральному виду

$$\psi = -\varepsilon(\psi, \varphi_0) \int\limits_{\mathbf{R}} G_1(x, y, E, V_0)\varphi_0(y)dy. \tag{1.10}$$

Для того чтобы рассматривать кроме собственных значений также и резонансы, будем в дальнейшем функцию G_1 продолжать по параметру E на соответствующую риманову поверхность.

Под резонансом оператора H будем понимать такое $E \in \mathbf{C}$, для которого существует решение уравнения (1.10), удовлетворяющее (0.2) и не принадлежащее $L^2(\mathbf{R})$ (см. [6]).

Уровнем E оператора H в дальнейшем будем называть собственное значение или резонанс данного оператора (а также соответствующее E число $k = \sqrt{E}$).

Сделаем замену $k = \sqrt{E}$, $\kappa = \sqrt{E - V_0}$. Соответственно в дальнейшем пользуемся обозначениями вида $G_1(x, y, k, \kappa)$ вместо $G_1(x, y, E, \sqrt{E - V_0})$. Тогда уравнение (1.10) можно записать в виде

$$\psi = -\varepsilon(\psi, \varphi_0) \int\limits_{\mathbf{R}} G_1(x, y, k, \kappa)\varphi_0(y)dy. \tag{1.11}$$

Л е м м а 1.2. *Для функции Грина* $G_1(x, y, k, \kappa)$ *имеет место представление*

$$G_1(x, y, k, \kappa) = \tfrac{-1}{i(k+\kappa)}[\theta(x)\theta(y)e^{i\kappa(x+y)} + \theta(x)\theta(-y)e^{i\kappa x - iky} +$$

$$+\theta(-x)\theta(y)e^{-ikx+i\kappa y}+\theta(-x)\theta(-y)e^{-ik(x+y)}]-G_2(x,y,k,\kappa), \quad (1.12)$$

где $G_2(x,y,k,\kappa)$ *обладает следующими свойством: для любых функций* $a(x)$, $b(x)$ *таких, что* $|a(x)| \leqslant C_1 e^{-\alpha_1|x|}$, $|b(x)| \leqslant \leqslant C_2 e^{-\alpha_2|x|}$, *где* $\alpha_1,\alpha_2 > 0$, *функция* $a(x)G_1(x,y,k,\kappa)b(y)$ *для достаточно малых* $|k|$, $|V_0|$ *является* $L^2(\mathbf{R^2})$ *-значной аналитической функцией параметра* k *в некоторой достаточно малой окрестности нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем функцию Грина $G_1(x,y,k,\kappa)$ оператора H_1 (см. лемму 1.1) к виду

$$G_1(x,y,k,\kappa) = -\tfrac{1}{i(k+\kappa)}[\theta(x)\theta(y)e^{i\kappa(x+y)} + \theta(x)\theta(-y)e^{i\kappa x-iky}+$$

$$+\theta(-x)\theta(y)e^{-i\kappa x+i\kappa y} + \theta(-x)\theta(-y)e^{-ik(x+y)}]-$$

$$-\tfrac{\theta(x)\theta(y)}{2i\kappa}(e^{i\kappa|x-y|} - e^{i\kappa(x+y)}) - \tfrac{\theta(-x)\theta(-y)}{2ik}(e^{ik|x-y|} - e^{ik(x+y)}).$$

Обозначим

$$G_2(x,y,k,\kappa) = \tfrac{\theta(x)\theta(y)}{2i\kappa}(e^{i\kappa|x-y|} - e^{i\kappa(x+y)})+$$

$$+\tfrac{\theta(-x)\theta(-y)}{2ik}(e^{ik|x-y|} - e^{ik(x+y)}).$$

Для того чтобы доказать, что $a(x)G_2(x,y,k,\kappa)b(y)$ является $L^2(\mathbf{R})$ -значной аналитической функцией от аргумента k, достаточно (см., например, [7]) доказать, что

$$(a(x)G_2(x,y,k,\kappa)b(y),\varphi(x,y)) =$$

$$= \iint\limits_{\mathbf{R^2}} a(x)G_2(x,y,k,\kappa)b(y)\overline{\varphi(x,y)}dxdy$$

является аналитической функцией для любой функции $\varphi(x,y) \in \in L^2(\mathbf{R^2})$. В свою очередь для этого достаточно доказать равномерную по k из окрестности нуля сходимость интеграла

$$\iint\limits_{\mathbf{R^2}} a(x)\tfrac{\partial G_2(x,y,k,\kappa)}{\partial k}b(y)\overline{\varphi(x,y)}dxdy$$

(см. подробные рассуждения в [8]). Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, оценим

$$\left|\iint\limits_{\mathbf{R}^2} a(x)\frac{\partial G_2(x,y,k,\kappa)}{\partial k}b(y)\overline{\varphi(x,y)}dxdy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\iint\limits_{\mathbf{R}^2} |a(x)|^2\left|\frac{\partial G_2(x,y,k,\kappa)}{\partial k}\right|^2|b(y)|^2dxdy} \cdot \sqrt{\iint\limits_{\mathbf{R}^2} |\overline{\varphi(x,y)}|^2dxdy} =$$

$$= C\sqrt{\iint\limits_{\mathbf{R}^2} |a(x)|^2|\frac{\partial G_2(x,y,k,\kappa)}{\partial k}|^2|b(y)|^2dxdy}$$

Поскольку, очевидно, для достаточно малых $|k|$, $|V_0|$ справедлива оценка

$$|\frac{\partial G_2(x,y,k,\kappa)}{\partial k}| \leqslant C_1|x|e^{\delta(|x|+|y|)} + C_2|y|e^{\delta(|x|+|y|)},$$

где $\delta > 0$ произвольно, то интеграл сходится. Тем самым теорема доказана.

Т е о р е м а 1.2. *Число k из некоторой достаточно малой окрестности нуля является уровнем тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$k = -\kappa + \varepsilon(F(x,k,\kappa),\varphi_0), \tag{1.13}$$

где

$$F(x,k,\kappa) = \int\limits_{\mathbf{R}}\Big(\tfrac{1}{i}\big[\theta(x)\theta(y)e^{i\kappa(x+y)} + \theta(x)\theta(-y)e^{i\kappa x-iky}+$$

$$\theta(-x)\theta(y)e^{-ikx+i\kappa y} + \theta(-x)\theta(-y)e^{-ik(x+y)}\big]+$$

$$+G_2(x,y,k,\kappa)(k+\kappa)\Big)\varphi_0(y)dy. \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (1.14) запишем уравнение (1.11) в виде

$$\psi(x) = \tfrac{\varepsilon(\psi,\varphi_0)}{k+\kappa} F(x,k,\kappa). \tag{1.15}$$

Так как $(\psi,\varphi_0) = C = \mathrm{const}$, то получим следующее выражение для функции $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \tfrac{\varepsilon C}{k+\kappa} F(x,k,\kappa). \tag{1.16}$$

Подставляя выражение (1.16) в уравнение (1.10), получим

$$1 = \tfrac{\varepsilon}{k+\kappa}(F(x,k,\kappa),\varphi_0),$$

откуда и следует требуемое равенство.

2. Асимптотика уровней

Т е о р е м а 2.1. *Для всех достаточно малых ε оператор H не имеет уровней в окрестности нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремой 1.2 наличие уровня эквивалентно существованию решения уравнения (1.13). Положим $S = \{k : |k| < \rho\}$, где $\rho > 0$. В предположении противного выберем последовательность $\varepsilon_n \to 0\ (n \to \infty)$. Поскольку функция $F(x,k,\kappa)$, в силу леммы 1.2, ограничена равномерно по $k \in S$, то $\varepsilon_n(F(x,k,\kappa),\varphi_0) \to 0$ равномерно по $k \in S$ при $n \to \infty$. Обозначим через k_n решение уравнения (1.13), отвечающее ε_n. Подставляя в (1.13) $k = k_n$ и $\kappa = \sqrt{{k_n}^2 - V_0}$, получаем

$$k_n + \sqrt{{k_n}^2 - V_0} = \varepsilon_n(F(x,k,\kappa),\varphi_0).$$

Взяв достаточно малое ρ, получаем противоречие при $\varepsilon_n \to 0$. Теорема доказана.

Из равенств $\kappa = \sqrt{E - V_0}$ и $k = \sqrt{E}$ выразим

$$\kappa = \sqrt{k^2 - V_0} = k\sqrt{1 - \tfrac{V_0}{k^2}} = k(1 - \tfrac{V_0}{2k^2} + o(\tfrac{V_0}{k^2})).$$

Отсюда и из (1.13) получаем уравнение

$$k = \frac{\varepsilon}{2}(F(x,k),\varphi_0) + \frac{V_0}{4k} + o(\frac{V_0}{k}). \tag{2.1}$$

Будем считать, что $V_0 = V_0(\varepsilon)$ – функция параметра ε, причем согласно теореме 2.1 для существования уровня следует предположить, что при $\varepsilon \to 0$ и $V_0(\varepsilon) \to 0$. Будем предполагать, что имеет место зависимость V_0 от ε вида $V_0(\varepsilon) = f(\varepsilon^\alpha)$, где $\alpha > 0$, $f(x)$ – вещественно-аналитическая функция такая, что $f(0) = 0$. Раскладывая $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля, получаем равенство

$$V_0(\varepsilon) = a_m\varepsilon^{m\alpha} + a_{m+1}\varepsilon^{(m+1)\alpha} + ... = a_m\varepsilon^{m\alpha} + o(\varepsilon^{m\alpha}).$$

Введем обозначения $a_m = -A$, где по предположению $A > 0$, и $m\alpha = \gamma$. В результате получим $V_0(\varepsilon) = -A\varepsilon^\gamma + o(\varepsilon^\gamma)$. Положим $T(k) = (\frac{1}{2}F(x,k),\varphi_0)$, тогда $T(0) = \frac{1}{2i}\left|\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx\right|^2$.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0 dx \neq 0$, $\gamma > 2$, $K > 0$, $\nu = \min(\gamma - 1, 2)$, $\delta \in (1,\nu)$. *Уравнение* (1.10) *при всех достаточно малых* $|\varepsilon|$ *имеет единственное с точностью до множителя ненулевое решение для уровня* k, *удовлетворяющего неравенству* $|k - \varepsilon T(0)| \leqslant K|\varepsilon|^\delta$. *При этом для* k *справедливо соотношение*

$$k = \frac{\varepsilon}{2i}\left|\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx\right|^2 + O(\varepsilon^{\alpha+2}),$$

где $\alpha > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим $T(k)$ по формуле Тейлора:

$$T(k) = T(0) + T'(0)k + o(k).$$

Подставляя это выражение для $T(k)$, а также выражение для V_0 в уравнение (2.1), получим

$$k = \varepsilon T(0) - \frac{A\varepsilon^\gamma}{4k} + o(\frac{\varepsilon^\gamma}{k}) + \varepsilon T'(0)k + \varepsilon o(k). \tag{2.2}$$

Обозначим

$$g(k) = -\tfrac{A\varepsilon^\gamma}{4k} + o(\tfrac{\varepsilon^\gamma}{k}) + \varepsilon T'(0)k + \varepsilon o(k), \tag{2.3}$$

тогда

$$k = \varepsilon T(0) + g(k). \tag{2.4}$$

Покажем, что

$$|\varepsilon| C_2 \leqslant |k| \leqslant |\varepsilon| C_1, \tag{2.5}$$

где $C_1,\ C_2 > 0$, т.е. $k = O(\varepsilon)$, $k^{-1} = O(\varepsilon)$. Имеем

$$|k| \leqslant |k - \varepsilon T(0)| + |\varepsilon T(0)| \leqslant K|\varepsilon|^\delta + |\varepsilon T(0)| =$$

$$= |\varepsilon|(K|\varepsilon|^{\delta-1} + |T(0)|) \leqslant |\varepsilon| C_1.$$

С другой стороны,

$$|k| = |k - \varepsilon T(0) + \varepsilon T(0)| \geqslant \big||k - \varepsilon T(0)| - |\varepsilon T(0)|\big| = \big|o(\varepsilon) - |\varepsilon T(0)|\big| =$$

$$= |\varepsilon| \cdot \big|\tfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} - |T(0)|\big| \geqslant \tfrac{|\varepsilon|}{2}|T(0)| \geqslant |\varepsilon| C_2.$$

По условию $\gamma > 2$, поэтому в силу (2.3)

$$g(k) = O(k^2). \tag{2.6}$$

Уравнение (2.4) будем исследовать с помощью принципа сжимающих отображений. Обозначим

$$R(k) = \varepsilon T(0) + g(k). \tag{2.7}$$

Докажем, что отображение $R(k)$ действует в круге

$$S = \{k : |k - \varepsilon T(0)| \leqslant K|\varepsilon|^\delta\}.$$

Это означает, что если $|k - \varepsilon T(0)| \leqslant K|\varepsilon|^\delta$, то должно быть выполнено неравенство $|R(k) - \varepsilon T(0)| \leqslant K|\varepsilon|^\delta$ или, что согласно (2.7) то же самое, $|g(k)| \leqslant K|\varepsilon|^\delta$. Но это очевидно в силу (2.6) и неравенства $\delta < 2$, которое вытекает из условий теоремы. Докажем, что отображение $R(k)$ является сжимающим в круге, т.е. что $|R(k_1) - R(k_2)| \leqslant q|k_1 - k_2|$, где $q < 1$. Оценим

$$|R(k_1) - R(k_2)| = \left| \int\limits_{[k_1,k_2]} R'(s)ds \right| \leqslant \max_{s\in[k_1,k_2]} |R'(s)||k_2 - k_1|. \quad (2.8)$$

Положим $q = \max\limits_{s\in[k_1,k_2]} |R'(s)|$. Достаточно доказать, что $R'(s) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $s \in S$. Пользуясь аналитичностью слагаемых в равенстве (2.2), а также равенством (2.6), получим

$$R'(s) = (\varepsilon T(0) + g(s))' = g'(s) =$$

$$= -\tfrac{A\varepsilon^\gamma}{s^2} + O(\tfrac{\varepsilon^{2\gamma}}{s^3}) + \varepsilon T'(0) + \varepsilon O(s) = O(\varepsilon^\alpha), \quad (2.9)$$

где $\alpha > 0$ и в неравенстве $|O(\varepsilon^\alpha)| \leqslant C|\varepsilon|^\alpha$ константа C не зависит от $s \in S$, откуда вытекает требуемое утверждение. Воспользуемся рекуррентной формулой для принципа сжимающих отображений $k_n = R(k_{n-1})$, где в качестве k_0 выберем $k_0 = \varepsilon T(0)$, тогда в силу (2.6) получим

$$k_1 = R(k_0) = \varepsilon T(0) + g(k_0) = \varepsilon T(0) + \varepsilon^2 = O(\varepsilon). \quad (2.10)$$

Вследствие известной формулы для погрешности в принципе сжимающих отображений имеем

$$|k_1 - k^*| \leqslant \tfrac{q}{1-q}|k_1 - k_0|. \quad (2.11)$$

Очевидно, что $\frac{q}{1-q} = O(q)$, поэтому $|k_1 - k^*| \leqslant O(q)|k_1 - k_0|$. В силу (2.8) и (2.9) $q = O(\varepsilon^\alpha)$. Из (2.10) и (2.11) окончательно получаем

$$k^* = k_1 + O(\varepsilon^{2+\alpha}) = \varepsilon T(0) + O(\varepsilon^{2+\alpha}).$$

3. Асимптотика собственных функций

Т е о р е м а 3.1. *Обобщенные собственные функции оператора H имеют следующий вид:*

$$\psi(x) = \theta(x)P_1 e^{i\sqrt{E-V_0}x} + \theta(-x)P_2 e^{-i\sqrt{E}x} + \eta(x),$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда, P_1, P_2 - константы, а $\eta(x)$ удовлетворяет оценке вида $|\eta(x)| \leqslant Ce^{-\beta|x|}$, где $\beta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1.10) и (1.1) вытекает равенство

$$\psi(x) = -\varepsilon(\psi, \varphi_0)(I_1 + I_2 + I_3 + I_4), \tag{3.1}$$

где

$$I_1 = -\int_{\mathbf{R}} \theta(x)\theta(y)[\tfrac{1}{2i\sqrt{E-V_0}} e^{i\sqrt{E-V_0}|x-y|} +$$

$$+ \tfrac{-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}{2i\sqrt{E-V_0}(\sqrt{E}\sqrt{E-V_0})} e^{i\sqrt{E-V_0}(x+y)}]\varphi_0(y)dy,$$

$$I_2 = -\int_{\mathbf{R}} \theta(x)\theta(-y)\tfrac{1}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})} e^{i\sqrt{E-V_0}x - i\sqrt{E}y}\varphi_0(y)dy,$$

$$I_3 = -\int_{\mathbf{R}} \theta(-x)\theta(y)\tfrac{1}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})} e^{-i\sqrt{E}x + i\sqrt{E-V_0}y}\varphi_0(y)dy,$$

$$I_4 = -\int_{\mathbf{R}} \theta(-x)\theta(-y)[\tfrac{1}{2i\sqrt{E}} e^{i\sqrt{E}|x-y|} -$$

$$- \tfrac{-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}{2i\sqrt{E}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})} e^{-i\sqrt{E}(x+y)}]\varphi_0(y)dy. \tag{3.2}$$

Полагая $A_2 = \int_{\mathbf{R}} \theta(-y)e^{-i\sqrt{E}y}\varphi_0(y)dy = \mathrm{const}$, запишем выражение I_2 из (3.2) в виде

$$I_2 = -\tfrac{A_2\theta(x)}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})} e^{i\sqrt{E-V_0}x}.$$

Аналогично I_3 приводится к виду

$$I_3 = -\frac{A_3\theta(-x)}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}e^{-i\sqrt{E}x},$$

где $A_3 = \int\limits_{\mathbf{R}} \theta(y)e^{-i\sqrt{E-V_0}y}\varphi_0(y)dy = \mathrm{const}$. Воспользовавшись леммой 1 из [9] и проведя те же рассуждения, что и для I_2, получим

$$I_1 = -\left(\frac{\theta(x)A_{11}}{2i\sqrt{E-V_0}} + \frac{\theta(x)A_{12}(-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}{2i\sqrt{E-V_0}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}\right)e^{i\sqrt{E-V_0}x} + \eta_1(x),$$

где

$$A_{11} = \int\limits_{\mathbf{R}} \theta(y)e^{-i\sqrt{E-V_0}y}\varphi_0(y)dy = \mathrm{const},$$

$$A_{12} = \int\limits_{\mathbf{R}} \theta(y)e^{-i\sqrt{E-V_0}y}\varphi_0(y)dy = \mathrm{const},$$

$|\eta_1(x)| \leqslant C_1e^{-\beta_1|x|}$, где $\beta_1 > 0$. Наконец,

$$I_4 = -\left(\frac{\theta(x)A_{41}}{2i\sqrt{E}} + \frac{\theta(-x)A_{42}(-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}{2i\sqrt{E}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}\right)e^{i\sqrt{E}x} + \eta_2(x),$$

где

$$A_{41} = \int\limits_{\mathbf{R}} \theta(-y)e^{i\sqrt{E}y}\varphi_0(y)dy = \mathrm{const},$$

$$A_{42} = \int_{\mathbf{R}} \theta(-y)e^{-i\sqrt{E}y}\varphi_0(y)dy = \mathrm{const},$$

$|\eta_2(x)| \leqslant C_2e^{-\beta_2|x|}$, где $\beta_2 > 0$. Осталось подставить выражения для I_1, I_2, I_3, I_4 в (3.1) и обозначить

$$P_1 = -\varepsilon(\psi,\varphi_0)\Big(\frac{A_{11}}{2i\sqrt{E-V_0}} - \frac{A_{12}(-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}{2i\sqrt{E-V_0}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})} + \\ + \frac{A_2}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}\Big),$$

$$P_2 = -\varepsilon(\psi,\varphi_0)\Big(\frac{A_{41}}{2i\sqrt{E}} - \frac{A_{42}(-\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}{2i\sqrt{E}(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})} + \\ + \frac{A_3}{i(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})}\Big)$$

и $\eta(x) = \eta_1(x) + \eta_2(x)$.

Список литературы

1. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 240 с.
2. Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала. М.: Мир, 1973. 560 с.
3. Чубурин Ю.П. Об операторе Шредингера с малым потенциалом типа возмущенной ступеньки // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 120, Ѓ2. С. 277-290.
4. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. 488 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 432 с.
6. Чубурин Ю.П. О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом // Теор. и мат. физика. 1997. Т. 110, Ѓ3. С. 443-453.
7. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.
8. Сметанина М.С. Об уравнении Шредингера с нелокальным потенциалом // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. Ѓ3(26). С. 99-114.
9. Сметанина М.С., Чубурин Ю.П. Об уравнении Шредингера для кристаллической пленки с нелокальным потенциалом // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 19-31.