УДК 517.958:530.145.6

© **М.С. Сметанина**
chuburin@otf.pti.udm.ru

О РАССЕЯНИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ключевые слова: уравнение Липпмана-Швингера, нелокальный потенциал, волновые операторы, асимптотика.

Abstract. We consider the Schrödinger operator of the form $H = -d^2/dx^2 + V$ acting in $L^2(\mathbf{R})$ where $V = \varepsilon W(x) + \lambda(\cdot, \varphi_0)\varphi_0$ is non-local potential and $W(x), \varphi_0(x)$ are decreasing functions for $\mid x \mid \to \infty$. The existence and completeness of the wave operators is proved. We investigate the asymptotic behaviour of solutions of the Lippmann-Schwinger equation and study the scattering amplitude.

Введение

Рассматривается оператор Шредингера $H = -d^2/dx^2 + V$, где

$$V = \varepsilon W(x) + \lambda(\cdot, \varphi_0)\varphi_0 \tag{0.1}$$

— нелокальный потенциал с вещественными параметрами ε, λ, $W(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая оценке вида $\mid W(x) \mid \leqslant Ce^{-a|x|}$, где $C, a > 0$ – некоторые константы, $\varphi_0(x)$ – заданная функция, для которой выполнено аналогичное неравенство $\mid \varphi_0(x) \mid \leqslant C_1 e^{-\alpha|x|}, C_1, \alpha > 0$. В дальнейшем функции, удовлетворяющие оценкам такого рода, будем называть экспоненциально убывающими. Потенциалы вида (0.1) представляют собой сумму локального потенциала (оператора умножения на функцию) и одномерного оператора $V_s = \lambda(\cdot, \varphi_0)\varphi_0$, называемого в физической литературе сепарабельным потенциалом [1];

такие потенциалы возникают, например, в теории псевдопотенциала [2].

Положим $H_0 = -d^2/dx^2$ — оператор Шредингера для свободной частицы. Обозначим через $R_0(E) = (H_0 - E)^{-1}$, $R(E) = (H - E)^{-1}$ резольвенты операторов H_0 и H. Как известно, ядро $R_0(E)$ имеет вид $G(x,y,k) = -(2ik)^{-1}e^{ik|x-y|}$, где $k = \sqrt{E}$ (разрез выбираем вдоль полуоси $[0,+\infty)$). Через $\sigma(A)$ ($\sigma_{ess}(A)$) обозначается спектр (существенный спектр) оператора A. Если $\psi\varphi \in L^1(\mathbf{R})$, то через (ψ,φ) будет обозначаться интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}} \psi(x)\overline{\varphi(x)}dx$.

Рассеяние микрочастиц на потенциале описывается уравнением Липпмана-Швингера

$$\psi(x) = e^{ikx} - \int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)V\psi(y)dy, \tag{0.2}$$

здесь функция $G(x,y,k)$ продолжена по параметру k в точки непрерывного спектра $E \in (0,+\infty)$. В работе [3] было доказано существование и единственность решения уравнения Липпмана-Швингера для потенциала вида (0.1), установлена связь между различными модификациями этого уравнения.

В первом разделе данной работы используется нестационарный подход к изучению рассеяния. Доказывается существование и полнота волновых операторов $\Omega_\pm(H,H_0)$ (см. по этому поводу [4]).

Во втором разделе задача рассеяния исследуется на основе стационарного подхода. Получена асимпотика решений уравнения Липпмана-Швингера при $x \to \pm\infty$ и при достаточно малых ε и $\lambda = K\varepsilon^\alpha + o(\varepsilon^\alpha)$, где $K = \text{const}, \alpha \in (0,+\infty)$. Исследованы амплитуды прохождения и отражения частицы. (О связи стационарного и нестационарного подходов см. замечание после теоремы 2.1.)

1. Существование и полнота волновых операторов

Обозначим через $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ множества операторов со следом и операторов Гильберта-Шмидта соответственно.

Т е о р е м а 1.1. *Волновые операторы* $\Omega_\pm(H, H_0)$ *существуют и полны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы H_0, H являются самосопряженными, поэтому согласно теореме Куроды-Бирмана [4] достаточно доказать, что $R(i) - R_0(i) \in \mathcal{I}_1$.

В силу резольвентного тождества имеем

$$R(i) - R_0(i) = -R_0(i)VR(i). \tag{1.1}$$

Воспользовавшись (0.1), правую часть (1.1) запишем в виде

$$\varepsilon R_0(i)W(x)R(i) + \lambda R_0(i)(\cdot, \varphi_0)\varphi_0(y)R(i) =$$

$$= \varepsilon(R_0(i)\sqrt{W(x)})(\sqrt{W(x)}R(i)) + \lambda(R(i)(\cdot), \varphi_0)R_0(i)\varphi_0(y). \tag{1.2}$$

Вначале рассмотрим оператор $R_0(i)\sqrt{W(y)}$, ядро которого имеет вид $G(x,y,k)\sqrt{W(y)}$ с $k = \sqrt{-1}$. Имеет место оценка

$$\int\limits_{\mathbf{R^2}} \big|G(x,y,k)\sqrt{W(y)}\big|^2 dxdy = \int\limits_{\mathbf{R^2}} \big|\tfrac{e^{ik|x-y|}}{2ik}\sqrt{W(y)}\big|^2 dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{R^2}} \tfrac{e^{-(\sqrt{2}/2)|x-y|}}{2}\big|\sqrt{W(y)}\big|^2 dxdy < +\infty. \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что оператор $R_0(i)\sqrt{W(y)} \in \mathcal{I}_2$ (см. [5]).

Оператор $\sqrt{W(x)}R(i)$, опять используя (1.1), представим в виде

$$\sqrt{W(x)}R(i) = \sqrt{W(x)}R_0(i) - \sqrt{W(x)}R_0(i)VR(i). \tag{1.4}$$

Применяя те же рассуждения, что и выше, получим $\sqrt{W(y)}\times$ $\times R_0(i) \in \mathcal{I}_2$. Имеем, далее,

$$\sqrt{W(x)}R_0(i)VR(i) = \varepsilon\sqrt{W(x)}R_0(i)W(x)R(i)+$$

$$+\lambda\sqrt{W(x)}(R(i)(\cdot),\varphi_0)R_0(i)\varphi_0.$$

Произведение $\sqrt{W(x)}R_0(i))(W(x)R(i) \in \mathcal{I}_2$ в силу теоремы VI.22 [5], поскольку $\sqrt{W(x)}R_0(i) \in \mathcal{I}_2$, а $W(x)R(i)$ является ограниченным оператором.

Оператор

$$\lambda\sqrt{W(x)}(R(i)(\cdot),\varphi_0)R_0(i)\varphi_0 = \lambda(\cdot, R^*(i)\varphi_0)R_0(i)\sqrt{W(y)}\varphi_0$$

является, очевидно, одномерным оператором с суммируемым с квадратом ядром. В силу теоремы VI.22 [5] и (1.4) получим, что

$$\sqrt{W(x)}R(i) \in \mathcal{I}_2.$$

В силу той же теоремы

$$R_0(i)\sqrt{W(y)}\ \sqrt{W(x)}R(i) \in \mathcal{I}_1.$$

Докажем теперь, что $A = \lambda R_0(i)(R(i)(\cdot),\varphi_0)\varphi_0 \in \mathcal{I}_1$. Имеем $A = (\cdot,\varphi_1)\varphi_2$, где $\varphi_1,\ \varphi_2 \in L^2(\mathbf{R})$. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ (Ae_n, e_n)\ | = \sum_{n=1}^{\infty} |\ (e_n,\varphi_1)(\varphi_2, e_n)\ | \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\ (e_n,\varphi_1)^2\ |\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\ (\varphi_2, e_n)\ |^2\Big)^{1/2} = \|\varphi_1\|\cdot\|\varphi_2\| < \infty.$$

Согласно [5] $A \in \mathcal{I}_1$.

Сумма операторов со следом является оператором со следом (см. теорему VI.19 [5]). Отсюда и из (1.1), (1.2) следует утверждение теоремы.

2. Асимптотика решений уравнения Липпмана-Швингера для нелокального потенциала

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $E > 0$ достаточно близко к нулю, тогда решение ψ уравнения Липпмана-Швингера* (0.2) *такое, что $\sqrt{W}\psi \in L^2(\mathbf{R})$, имеет следующий вид:*

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + \eta_+(x), \quad x > 0,$$

$$\psi(x) = e^{ikx} + Be^{-ikx} + \eta(x), \quad x < 0, \tag{2.1}$$

где

$$A = 1 + \tfrac{\lambda(\psi,\varphi_0)}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\varphi_0(y)dy + \tfrac{\varepsilon}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky} W\psi dy,$$

$$B = \tfrac{\lambda(\psi,\varphi_0)}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iky}\varphi_0(y)dy + \tfrac{\varepsilon}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iky} W\psi dy.$$

Функции $\eta_+(x)$ и $\eta_-(x)$ экспоненциально убывают, при этом

$$\psi'(x) = Aike^{ikx} + \eta'_+(x), \quad x > 0,$$

$$\psi'(x) = ike^{ikx} - Bike^{-ikx} + \eta'_-(x), \quad x < 0 \tag{2.2}$$

и $\eta'_+(x)$, $\eta'_-(x)$ — также экспоненциально убывают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение Липпмана-Швингера

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbf{R}} \tfrac{e^{ik|x-y|}}{2ik}\big(\varepsilon W(y)\psi(y) + \lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)\big)dy$$

при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Поскольку функция $\varphi_0(x)$ экспоненциально убывает, а произведение $W\psi$ представимо в виде $\sqrt{W}\sqrt{W}\psi$, где $\sqrt{W}\psi \in L^2(\mathbf{R})$, а $\sqrt{W}$ — экспоненциально убывает, можно воспользоваться леммой 1 [3]. Имеем

$$\psi(x) = e^{ikx} + \tfrac{e^{ikx}}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\big(\varepsilon W(y)\psi(y) + \lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)\big)dy +$$

$$+\eta_+(x) \quad \text{при} \quad x>0$$

и

$$\psi(x)=e^{ikx}+\tfrac{e^{-ikx}}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{iky}\big(\varepsilon W(y)\psi(y)+\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)\big)dy+$$

$$+\eta_-(x) \quad \text{при} \quad x<0, \tag{2.3}$$

причем $\eta_+(x)$ и $\eta_-(x)$ экспоненциально убывают и, как видно из доказательства леммы 1 [3], имеют следующий вид:

$$\eta_\pm(x)=\pm e^{\mp ikx}\int_x^{\pm\infty}\tfrac{e^{\pm iky}}{2ik}\big(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)+\varepsilon W(y)\psi(y)\big)dy\mp$$

$$\mp e^{\pm ikx}\int_x^{\pm\infty}\tfrac{e^{\mp iky}}{2ik}\big(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)+\varepsilon W(y)\psi(y)\big)dy. \tag{2.4}$$

Дифференцируя равенства (2.3), получим с помощью (2.4) при $x>0$ равенство

$$\psi'(x)=ike^{ikx}\Big(1+\tfrac{\lambda(\psi,\varphi_0)}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\varphi_0(y)dy+$$

$$+\tfrac{\varepsilon}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}W(y)\psi(y)dy\Big)-ike^{-ikx}\int_x^{+\infty}\tfrac{e^{iky}}{2ik}\big(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)+$$

$$+\varepsilon W(y)\psi(y)\big)dy-ike^{ikx}\int_x^{+\infty}\tfrac{e^{-iky}}{2ik}\big(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)+\varepsilon W(y)\psi(y)\big)dy.$$

Осталось доказать, что

$$\eta_+'(x)=-ike^{-ikx}\int_x^{+\infty}\tfrac{e^{iky}}{2ik}\big(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)+\varepsilon W(y)\psi(y)\big)dy-$$

$$-ike^{ikx}\int_x^{+\infty}\tfrac{e^{-iky}}{2ik}\big(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y)+\varepsilon W(y)\psi(y)\big)dy$$

также экспоненциально убывает. Это следует непосредственно из вида функции $\eta'_+(x)$, так как входящие в ее состав слагаемые отличаются от слагаемых $\eta_+(x)$ соответственно на множители $-ik$ и ik. Аналогичным образом получается представление $\psi'(x)$ при $x < 0$:

$$\psi'(x) = ike^{ikx} - ike^{-ikx}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{\mathbf{R}} \tfrac{e^{iky}}{2ik}(\lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0(y) + \varepsilon W(y)\psi(y))dy\Big) + \eta'_-(x),$$

где $\eta'_-(x)$ экспоненциально убывает.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Результаты теоремы 2.1 позволяют перенести на случай нелокальных потенциалов рассматриваемого вида обычные утверждения теории рассеяния (см. [6]): во-первых, что при $t \to \pm\infty$ решения нестационарного уравнения Шредингера с оператором H стремятся к решениям нестационарного уравнения с оператором H_0; во-вторых, о вероятностном смысле амплитуд прохождения и отражения A, B. Строгое доказательство равенства $\mid A\mid^2 + \mid B\mid^2 = 1$ см. ниже в теореме 2.2.

Комплексные числа A и B имеют физический смысл и называются амплитудами прохождения и отражения частицы; $\mid A\mid^2$, $\mid B\mid^2$ — это соответственно вероятности прохождения и отражения частицы.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Амплитуды отражения и прохождения связаны следующим соотношением:*

$$\mid A\mid^2 + \mid B\mid^2 = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\int_{-N}^{N} H\psi(x)\overline{\psi(x)}dx - \int_{-N}^{N}\psi(x)H\overline{\psi(x)}dx\Big) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\Bigl(E\int_{-N}^{N} \mid \psi(x) \mid^2 dx - E\int_{-N}^{N} \mid \psi(x) \mid^2 dx\Bigr) = 0 \qquad (2.5)$$

в силу того, что

$$(H\psi,\psi) = (E\psi,\psi) = E(\psi,\psi) = (\psi,E\psi) = (\psi,H\psi).$$

Преобразуем, интегрируя по частям, выражение

$$\int_{-N}^{N}\bigl(-\psi''(x) + \lambda(\psi,\varphi_0)\varphi_0 + \varepsilon W\psi\bigr)\overline{\psi(x)}dx =$$

$$= -ik \mid A \mid^2 + ik + \overline{B}ike^{-2ikN} - Bike^{2ikN} - \mid B \mid^2 ik +$$

$$+ \int_{-N}^{N} \mid \psi' \mid^2 dx + \lambda(\psi,\varphi_0)\int_{-N}^{N}\varphi_0(x)\overline{\psi(x)}dx + \varepsilon\int_{-N}^{N} W \mid \psi \mid^2 dx \qquad (2.6)$$

(используем, что $\eta_\pm(x)$, $\eta'_\pm(x)$ — экспоненциально убывающие функции).

С другой стороны, имеем

$$\int_{-N}^{N}\bigl(-\overline{\psi''(x)} + \lambda\overline{(\psi,\varphi_0)\varphi_0} + \varepsilon\overline{W\psi}\bigr)\psi(x)dx =$$

$$= \mid A \mid^2 ik - ik - Bike^{2ikN} + \overline{B}ike^{-2ikN} + \mid B \mid^2 ik +$$

$$+ \int_{-N}^{N} \mid \psi' \mid^2 dx + \lambda(\overline{\psi,\varphi_0})\int_{-N}^{N}\overline{\varphi_0}\psi dx + \varepsilon\int_{-N}^{N}\overline{W} \mid \psi \mid^2 dx. \qquad (2.7)$$

Вычитая из (2.6) равенство (2.7) и устремив $N \to +\infty$, получим в силу (2.5) равенство

$$0 = -2ik \mid A \mid^2 + 2ik - 2 \mid B \mid^2 ik.$$

Отсюда следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Пусть $\varphi(x)$ — вещественно-аналитическая функция, определенная в окрестности нуля. Далее предполагаем, если не оговорено противное, что параметры λ и ε связаны друг с другом соотношением $\lambda = \varphi(\varepsilon^{\alpha_0})$, $\alpha_0 > 0$. Рассмотрим случай $\varphi(0) = 0$. Тогда, разлагая φ в ряд Тейлора, получаем $\lambda = K\varepsilon^{\alpha} + o(\varepsilon^{\alpha})$, где $K = \mathrm{const} \neq 0,\ \alpha > 0$. Для простоты выкладок всюду в последующих доказательствах полагаем $\lambda = K\varepsilon^{\alpha}$, хотя все рассуждения справедливы в общем случае. Будем также предполагать, что решение уравнения Липпмана-Швингера ψ ищется в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{W(x)}\psi(x) \in L^2(\mathbf{R}). \tag{2.8}$$

В формулировке следующей теоремы $O(\varepsilon^{\alpha})$ понимается в том смысле, что $\|\sqrt{W(x)}O(\varepsilon^{\alpha})\|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant C\varepsilon^{\alpha},\ C = \mathrm{const}$.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть $E > 0$ находится в достаточно малой окрестности нуля вещественной прямой. Предположим, что $\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0(y)dy \neq 0$, тогда справедлива следующая формула для решения $\psi(x)$ уравнения Липпмана-Швингера:*

$$\psi(x) = e^{ikx} - K\varepsilon^{\alpha}(e^{ikx}, \varphi_0(x)) \int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\varphi_0(y)dy -$$

$$-\varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)W(y)e^{iky}dy + O(\varepsilon^{2\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

$$\psi(x) = e^{ikx} - \varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)W(y)e^{iky}dx + O(\varepsilon^{\alpha}), \quad \alpha > 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем 2, 3 [3] для нахождения асимптотики решения уравнения Липпмана-Швингера можно воспользоваться уравнением

$$\psi(x) = e^{ikx} - \frac{\lambda\big((e^{ikx}, \varphi_0) - \varepsilon\big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)W(y)\psi(y)dy, \varphi_0(x)\big)\big)}{1 + \lambda\big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\varphi_0(y)dy, \varphi_0(x)\big)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\varphi_0(y)dy - \varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)W(y)\psi(y)dy. \qquad (2.9)$$

Переходя в этом уравнении к новой неизвестной функции $\varphi(x) = = \sqrt{W(x)}\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$, получим:

$$\varphi(x) = \sqrt{W(x)}e^{ikx} - \varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} \sqrt{W(x)}G(x,y,k)\sqrt{W(y)}\varphi(y)dy-$$

$$-\lambda\Big(\big(e^{ikx},\varphi_0(x)\big) - \varepsilon\big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\sqrt{W(y)}\varphi(y)dy, \varphi_0(x)\big)\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\lambda\big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\varphi_0(y)dy,\varphi_0\big)\Big)^{-1}\times \int\limits_{\mathbf{R}} \sqrt{W(x)}G(x,y,k)\varphi_0(y)dy.$$

Из рассуждений, проведенных в лемме 6 [3], следует, что $L^2(\mathbf{R})$ -значная функция

$$T(k)\varphi(x) = \varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} \sqrt{W(x)}G(x,y,k)\sqrt{W(y)}\varphi(y)dy-$$

$$-\frac{\lambda\varepsilon\Big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\sqrt{W(y)}\varphi(y)dy,\varphi_0(x)\Big)}{1+\lambda\Big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\varphi_0(y)dy,\varphi_0(x)\Big)}\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}} \sqrt{W(x)}G(x,y,k)\varphi_0(y)dy \qquad (2.10)$$

является аналитической по k в окрестности любой точки, отличной от нуля.

Уравнение (2.9) с учетом (2.10) примет вид

$$(1+T(k))\varphi(x) =$$

$$= \sqrt{W(x)}e^{ikx} - \frac{\lambda(e^{ikx},\varphi_0(x))\int\limits_{\mathbf{R}} \sqrt{W(x)}G(x,y,k)\varphi_0(y)dy}{1+\lambda\big(\int\limits_{\mathbf{R}} G(x,y,k)\varphi_0(y)dy,\varphi_0(x)\big)}. \qquad (2.11)$$

При условии, что $\|T(k)\| < 1$, которое выполнено для достаточно малых ε, существует обратный оператор $(1+T(k))^{-1}$. Обозначим правую часть (2.10) через $g(x,k)$; это аналитическая $L^2(\mathbf{R})$-значная функция. Применяя к обеим частям (2.11) оператор $(1+T(k))^{-1}$, получим

$$(1+T(k))^{-1}g(x,k) = g(x,k) + T(k)g(x,k) + O(\varepsilon)$$

в силу разложимости оператора $(1+T(k))^{-1}$ в ряд по степеням ε (здесь и до конца доказательства $O(\cdot)$ понимаем в смысле нормы в $L^2(\mathbf{R})$). Используя равенство $\lambda = K\varepsilon^{\alpha}$ и в свою очередь разлагая функцию $g(x,k)$ по степеням ε, получим

$$g(x,k) = \sqrt{W(x)}e^{ikx} - K\varepsilon^{\alpha}(e^{ikx},\varphi_0(x))\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbf{R}}\sqrt{W(x)}G(x,y,k)\varphi_0(y)dy-$$
$$-\varepsilon\int\limits_{\mathbf{R}}\sqrt{W(x)}G(x,y,k)W(y)e^{iky}dy + O(\varepsilon^{\min\{2\alpha,\alpha+1,2\}}).$$

Учитывая, что $\alpha \in (0,+\infty)$, имеем:

$$\varphi(x) = \sqrt{W(x)}e^{ikx} - K\varepsilon^{\alpha}(e^{ikx},\varphi_0(x))\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbf{R}}\sqrt{W(x)}G(x,y,k)\varphi_0(y)dy-$$
$$-\varepsilon\int\limits_{\mathbf{R}}\sqrt{W(x)}G(x,y,k)W(y)e^{iky}dy + O(\varepsilon^{2\alpha}),$$

если $0 < \alpha \leqslant 1$, и

$$\varphi(x) = \sqrt{W(x)}e^{ikx} - \varepsilon\int\limits_{\mathbf{R}}\sqrt{W(x)}G(x,y,k)W(y)e^{iky}dy+$$
$$+O(\varepsilon^{\min\{2,\alpha\}}),$$

если $\alpha > 1$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Положим
$$\widehat{\varphi_0(k)} = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\varphi_0(y)dy$$
— преобразование Фурье функции $\varphi_0(x)$.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Предположим, кроме того, что* $\varphi_0 = \sqrt{W}\varphi_1$, *где* $\varphi_1 \in L^2(\mathbf{R})$. *Тогда при достаточно малых* $|\varepsilon|$ *решение уравнения Липпмана-Швингера имеет следующий вид:*

— *если* $x > 0$, *то*

$$\psi(x) = e^{ikx}\Big(1 + \tfrac{K\varepsilon^\alpha}{2ik} \mid \widehat{\varphi_0(k)} \mid^2 + \tfrac{\varepsilon}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} W(y)dy\Big) +$$
$$+\varepsilon^\alpha\eta_+(x) + O(\varepsilon^{2\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$
$$\psi(x) = e^{ikx}\Big(1 + \tfrac{\varepsilon}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} W(y)dy\Big) + \varepsilon\eta_+(x) + O(\varepsilon^{\min\{2,\alpha\}}), \quad \alpha > 1;$$

— *если* $x < 0$, *то*

$$\psi(x) = e^{ikx} + e^{-ikx}\Big(\tfrac{K\varepsilon^\alpha}{2ik} \mid \widehat{\varphi_0(k)} \mid^2 + \tfrac{\varepsilon}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{2iky}W(y)dy\Big) +$$
$$+\varepsilon^\alpha\eta_-(x) + O(\varepsilon^{2\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$
$$\psi(x) = e^{ikx} + e^{-ikx}\Big(\tfrac{\varepsilon}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{2iky}W(y)dy\Big) + \varepsilon\eta_-(x) + O(\varepsilon^{\min\{2,\alpha\}}),$$
$$\alpha > 1.$$

Функции $\eta_\pm(x)$ *в данных формулах экспоненциально убывают, а* $O(\varepsilon)$ *понимается в смысле нормы в* $L^\infty(\mathbf{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В правой части уравнения Липпмана-Швингера перейдем от функции $\psi(x)$ к функции $\varphi(x) = \sqrt{W(x)}\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ в силу (2.8). С учетом условия теоремы уравнение примет вид

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik} \big(\lambda(\varphi, \varphi_1)\varphi_0(y) + \varepsilon\sqrt{W(y)}\varphi(y)\big)dy. \quad (2.12)$$

Воспользуемся выражением (см. теорему 2.3)

$$\varphi(x) = \sqrt{W(x)}e^{ikx} + O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}). \quad (2.13)$$

Вследствие (2.13) уравнение (2.12) можно записать в виде

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik} \big[\lambda\big(\sqrt{W(y)}e^{iky} + O(\varepsilon^{\min\{\alpha,1\}}), \varphi_1(y)\big)\varphi_0(y) +$$

$$+\varepsilon\sqrt{W(y)}\ \big(\sqrt{W(y)}e^{iky} + O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}})\big)\big]dy.$$

Рассмотрим отдельно выражения

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik}\lambda\big(\sqrt{W(y)}e^{iky} + O(\varepsilon^{\min\{\alpha,1\}}), \varphi_1(y)\big)\varphi_0(y)dy \quad (2.14)$$

и

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik}\varepsilon\sqrt{W(y)}\ \big(\sqrt{W(y)}e^{iky} + O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}})\big)dy. \quad (2.15)$$

Первое из них в силу экспоненциального убывания функции $\varphi_0(x)$ и леммы 1 из [3] при $x \to +\infty$ примет вид

$$\frac{K\varepsilon^\alpha(\sqrt{W(y)}e^{iky}, \varphi_1(y))}{2ik}\Big(e^{ikx}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\varphi_0(y)dy + \eta_+^{(1)}(x)\Big) +$$

$$+\frac{K\varepsilon^\alpha(O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}), \varphi_1(y))}{2ik}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}\varphi_0(y)dy =$$

$$= \frac{K\varepsilon^{\alpha}(\sqrt{W(y)}e^{iky},\varphi_1(y))}{2ik} e^{ikx} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\varphi_0(y)dy +$$

$$+ \frac{K\varepsilon^{\alpha}(\sqrt{W(y)}e^{iky},\varphi_1(y))}{2ik} \eta_+^{(1)}(x)) +$$

$$+ \frac{K\varepsilon^{\alpha}(O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}),\varphi_1(y))}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}\varphi_0(y)dy,$$

где

$$\eta_+^{(1)}(x)) = e^{-ikx}\int_x^{+\infty} e^{iky}\varphi_0(y)dy - e^{ikx}\int_x^{+\infty} e^{-iky}\varphi_0(y)dy,$$

а значит, и

$$\frac{K\varepsilon^{\alpha}(\sqrt{W(y)}e^{iky},\varphi_1(y))}{2ik} \eta_+^{(1)}(x)$$

экспоненциально убывают. Далее, выражение

$$\frac{K\varepsilon^{\alpha}(O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}),\varphi_1(y))}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}\varphi_0(y)dy$$

есть $O(\varepsilon^{\min\{\alpha+1,2\alpha\}})$ в смысле нормы в $L^{\infty}(\mathbf{R})$, поскольку в силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\left| \frac{K\varepsilon^{\alpha}(O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}),\varphi_1(y))}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}\varphi_0(y)dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K\varepsilon^{\alpha}\|O(\varepsilon^{\min\{\alpha,1\}})\|\cdot\|\varphi_1(y)\|}{2|k|} \times \left| \int\limits_{\mathbf{R}} e^{ik|x-y|}\varphi_0(y)dy \right| \leqslant C_1\varepsilon^{\min\{2\alpha,\alpha+1\}}.$$

Таким образом, выражение (2.14) при $x \to +\infty$ можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik} \lambda\big(\sqrt{W(y)}e^{iky} + O(\varepsilon^{\min\{\alpha,1\}}),\varphi_1(y)\big)\varphi_0(y)dy =$$

$$= \frac{K\varepsilon^{\alpha}(\sqrt{W(y)}e^{iky},\varphi_1(y))}{2ik} e^{ikx} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky}\varphi_0(y)dy + \eta_+^{(1)}(x) + O(\varepsilon^{\min\{2\alpha,\alpha+1\}}).$$

Аналогично выражение (2.15) при $x \to +\infty$ имеет вид

$$e^{ikx} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{-iky}}{2ik} \varepsilon W(y) e^{iky} dy + \varepsilon \eta_+^{(2)}(x) +$$

$$+\varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik} \sqrt{W(y)} O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}) dy,$$

где

$$\eta_+^{(2)}(x) = e^{-ikx} \int_x^{+\infty} e^{2iky} W(y) dy - e^{ikx} \int_x^{+\infty} W(y) dy$$

экспоненциально убывает. Оценим, далее,

$$\left| \varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{e^{ik|x-y|}}{2ik} \sqrt{W(y)} O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}) dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} \mid k \mid \cdot \| \sqrt{W(y)} \| \cdot \| O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}) \| \leqslant C \varepsilon^{\min\{2\alpha, \alpha+1\}}.$$

Таким образом, асимптотика решения при $x \to +\infty$ и достаточно малых $|\varepsilon|$ выглядит следующим образом:

$$\psi(x) = e^{ikx} \Big(1 + \tfrac{K\varepsilon^{\alpha} (\sqrt{W(y)} e^{iky}, \varphi_1(y))}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-iky} \varphi_0(y) dy +$$

$$+ \tfrac{\varepsilon}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} W(y) dy \Big) + \varepsilon^{\min\{1,\alpha\}} \eta_+(x) + O(\varepsilon^{\min\{2\alpha, \alpha+1\}}), \qquad (2.16)$$

где $O(\varepsilon^{\min\{2\alpha,\alpha+1\}})$ понимается в смысле нормы пространства $L^{\infty}(\mathbf{R})$, $\eta_+(x) = \eta_+^{(1)}(x) + \eta_+^{(2)}(x)$.

Асимптотика решения при $x \to -\infty$ находится описанным выше способом. При $x \to -\infty$ имеем соотношение

$$\psi(x) = e^{ikx} + e^{-ikx} \Big(\tfrac{\varepsilon^{\alpha} (\sqrt{W(y)} e^{iky}, \varphi_1(y))}{2ik} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iky} \varphi_0(y) dy +$$

$$+\tfrac{\varepsilon}{2ik}\int_{\mathbf{R}} e^{2iky}W(y)dy\Big) + \varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}\eta_-(x) + O(\varepsilon^{\min\{1,\alpha\}}), \qquad (2.17)$$

где $\eta_-(x)$ экспоненциально убывает.

Асимптотическое поведение $\psi(x)$ в зависимости от α, указанное в формулировке теоремы, следует из (2.16), (2.17).

З а м е ч а н и е 2.2. Полученные результаты первого и (с соответствующими изменениями) второго разделов можно перенести на случай трехмерного оператора Шредингера $-\Delta+$ $+\varepsilon W(x)+\lambda(\cdot,\varphi_0)\varphi_0$ в ячейке $(0,1)^2\times\mathbf{R}$, где $W(x)$ и $\varphi_0(x)$ экспоненциально убывают при $|x_3|\to\infty$ и, кроме того, функция $\varphi_0(x)$ является блоховской по переменным x_1, x_2. Такие операторы появляются при разложении периодического по x_1, x_2 с периодом единица оператора Шредингера, отвечающего кристаллической пленке в прямом интеграле пространств $L^2(\Omega)$ (см. также статью [3]).

Список литературы

1. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 240 с.
2. Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала. М.: Мир, 1973. 560 с.
3. Сметанина М.С., Чубурин Ю.П. Об уравнении Шредингера для кристаллической пленки с нелокальным потенциалом // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 19–31.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982. 448 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 360 с.
6. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов – математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.