УДК 519.833.2

© **А. А. Горелова**
agorelova@bk.ru

РИСКИ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ИГРАХ С ВЕКТОРНЫМИ ВЫИГРЫШАМИ И ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ [1]

Ключевые слова: бескоалиционная игра, многокритериальная задача, равновесие, неопределенность, выигрыши.

Abstract. There are discoalition game with vector functions of outcome and uncertainty. Guaranteed on outcomes and risks decision of this game is formalized. It's known for gamblers only set of values.

Введение

Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц с векторными функциями выигрыша и при неопределенности (БИВН):

$$\Gamma = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \rangle.$$

В игре Γ каждый игрок i выбирает свою стратегию $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ $(i=1,2)$, в результате образуется ситуация $x=(x_1,x_2) \in X = X_1 \times X_2$; независимо от такого выбора одновременно реализуется какая-либо неопределенность $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$; на прямом произведении $X \times Y$ определена векторная функция выигрыша i -го игрока

$$f_i(x,y) = \left(f_i^{(1)}(x,y), ..., f_i^{(N_i)}(x,y)\right)(i=1,2).$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (02-01-00612).

На ґсодержательном уровнеЄ цель i-го игрока — выбор такой своей стратегии $x_i \in X$, при которой все компоненты

$$f_i^{(j)}(x, y)(j = 1, ..., N_i)$$

принимали бы возможно большие значения (выигрыши); при таком выборе все игроки должны учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$.

БИВН возникают при моделировании взаимодействий конкурирующих экономических систем, в которых, *во-первых*, качество функционирования каждой оценивается набором критериев (увеличение прибыли, снижение себестоимости, затрат); *во-вторых*, учитываются помехи, возмущения и другого типа неопределенности, о которых известны лишь границы изменений (скачки спроса, срыв и изменение номенклатуры поставок, неожиданное появление конкурентов на рынке сбыта и т.п.).

Математические модели типа Γ уже рассматривались в [1] с позиции принципа максиминной полезности [2] и для БИВН со скалярными функциями выигрыша. Однако при этом (при формировании своих стратегий) игроки вынуждены рассчитывать на ґкатастрофуЄ - на реализацию ґсамой плохойЄ неопределенности $y \in Y$. Такой подход, как правило, приводит к ґзаниженнымЄ гарантиям.

Избежать пессимистического подхода можно, если, *во-первых*, игрокам при выборе опираться на принцип минимаксного сожаления [3], *во-вторых*, стремиться к оптимальному сочетанию векторных выигрышей (исходов) и рисков.

Как раз такому подходу в формализации гарантированного решения БИВН и посвящена данная работа.

1. Формализация гарантированного по выигрышам и рискам решения

Введем функцию риска по каждому критерию $f_i^{(j)}(x,y)$ $(j=1,...,N_i;\ i=1,2)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(j)}(x_1,x_2,y) &= \max_{z_1\in X_1} f_1^{(j)}(z_1,x_2,y) - f_1^{(j)}(x_1,x_2,y) = \\ &= g_1^{(j)}(x_2,y) - f_1^{(j)}(x_1,x_2,y),\ (j=1,...,N_1), \\ \Phi_2^{(j)}(x_1,x_2,y) &= \max_{z_2\in X_2} f_2^{(j)}(x_1,z_2,y) - f_2^{(j)}(x_1,x_2,y) = \\ &= g_2^{(j)}(x_1,y) - f_2^{(j)}(x_1,x_2,y),\ (j=1,...,N_2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Игре Γ поставим в соответствие вспомогательную бескоалиционную игру при неопределенности и с векторными функциями выигрыша Γ_h :

$$\Gamma_h = \langle \{1,2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x,y), -\Phi_i(x,y)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{1.2}$$

В этой игре i-й игрок $(i=1,2)$ стремится за счет $x_i\in X_i$ одновременно возможно увеличить свой векторный исход $f_i(x,y) = (f_i^{(1)}(x,y),...,f_i^{(N_i)}(x,y))$ и уменьшить свой векторный риск $\Phi_i(x,y) = (\Phi_i^{(1)}(x,y),...,\Phi_i^{(N_i)}(x,y))$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Набор

$$\langle x^S, f_1^S, \Phi_1^S, f_2^S, \Phi_2^S\rangle \in X\times \mathbb{R}^{2(N_1+N_2)}$$

назовем гарантированным по исходам и рискам решением игры Γ, если существует неопределенность $y_S\in Y$, для которой

1^0. $f_i^S = f_i(x^S,y_S), \Phi_i^S = \Phi_i(x^S,y_S),\ (i=1,2)$;

2^0. а) при любой $x_1\in X_1$ несовместна система из $2N_1$ неравенств:

$$f_1^{(j)}(x_1,x_2^S,y_S) > f_1^{(j)}(x^S,y_S),$$
$$\Phi_1^{(j)}(x_1,x_2^S,y_S) < \Phi_1^{(j)}(x^S,y_S)\,(j\in\{1,...,N_1\}),$$

то есть x_1^S - максимальная по Слейтеру стратегия в $2N_1$-критериальной задаче $\langle X_1, \{f_1(x_1, x_2^S, y_S), -\Phi_1(x_1, x_2^S, y_S)\}\rangle$;

б) для каждой $x_2 \in X_2$ несовместна система из $2N_2$ неравенств:

$$f_2^{(j)}(x_1^S, x_2, y_S) > f_2^{(j)}(x^S, y_S),$$

$$\Phi_2^{(j)}(x_1^S, x_2, y_S) < \Phi_2^{(j)}(x^S, y_S)\,(j \in \{1, ..., N_2\}),$$

то есть x_2^S - максимальная по Слейтеру стратегия в $2N_2$-критериальной задаче $\langle X_2, \{f_2(x_1^S, x_2, y_S), -\Phi_2(x_1^S, x_2, y_S)\rangle$;

в) при всякой $y \in Y$ несовместна система из $2(N_1 + N_2)$ неравенств:

$$f_i^{(j)}(x^S, y) < f_i^{(j)}(x^S, y_S),$$

$$\Phi_i^{(j)}(x^S, y) > \Phi_i^{(j)}(x^S, y_S)\,(j \in \{1, ..., N_i\},\, i = 1, 2).$$

При этом тройку (x_1^S, x_2^S, y_S) назовем гарантированным равновесием Нэша — Слейтера БИВН в игре Γ, а

$$f_i^S(x, y) = (f_i^{(1)}(x^S, y_S), ..., f_i^{(N_i)}(x^S, y_S))$$

гарантированным векторным исходом;

$$\Phi_i^S(x, y) = (\Phi_i^{(1)}(x^S, y_S), ..., \Phi_i^{(N_i)}(x^S, y_S))$$

гарантированным векторным риском i -го игрока $(i = 1, 2)$.

Смысл решения заключается в том, что каждый i-й игрок старается увеличить свой векторный выигрыш и уменьшить свой векторный риск за счет выбора своей i-й стратегии $x_i \in X_i$, на основе концепции оптимума по Слейтеру. Неопределенность, согласно принципу максиминной полезности [2], ґстараетсяЄ максимально уменьшить векторные функции выигрыша обоих игроков и максимально увеличить их векторные функции риска.

З а м е ч а н и е 1.1. Представим функции, противоположные функциям риска, в следующем виде:

$$-\Phi_1^{(j)}(x, y) = f_1^{(j)}(x, y) - g_1^{(j)}(x_2, y),$$

$$-\Phi_2^{(j)}(x,y) = f_2^{(j)}(x,y) - g_2^{(j)}(x_1,y).$$

Тогда требования 2а, 2б и 2в в определении 1 можно привести к следующему виду:

2а) при любых $x_1 \in X_1$ несовместна система неравенств:

$$f_1^{(j)}(x_1, x_2^S, y_S) > f_1^{(j)}(x^S, y_S),\ j \in \{1, ..., N_1\},$$

то есть x_1^S - максимальная по Слейтеру стратегия в N_1 - критериальной задаче

$$\langle X_1, f_1(x_1, x_2^S, y_S)\rangle; \tag{1.3}$$

2б) аналогично x_2^S - максимальная по Слейтеру стратегия в N_2 -критериальной задаче

$$\langle X_2, f_2(x_1^S, x_2, y_S)\rangle; \tag{1.4}$$

2в) неопределенность y_S - минимальна по Слейтеру в $2(N_1 + N_2)$ -критериальной задаче

$$\langle Y, \{f_1(x^S, y), -\Phi_1(x^S, y), f_2(x^S, y), -\Phi_2(x^S, y)\}\rangle. \tag{1.5}$$

2. Игра со скалярными функциями выигрыша

Рассмотрим игру при $N_1 = N_2 = 1$, то есть

$$\Gamma = \langle X_1, X_2, Y, \{f_1^{(1)}(x_1, x_2, y), f_2^{(1)}(x_1, x_2, y)\}\rangle. \tag{2.1}$$

Функции риска примут вид:

$$\Phi_1^{(1)}(x,y) = \max_{z_1 \in X_1} f_1^{(1)}(z_1, x_2, y) - f_1^{(1)}(x_1, x_2, y),$$

$$\Phi_2^{(1)}(x,y) = \max_{z_2 \in X_2} f_2^{(1)}(x_1, z_2, y) - f_2^{(1)}(x_1, x_2, y).$$

Будем рассматривать специальную ситуацию равновесия по Нэшу $x^e(y) = (x_1^e(y), x_2^e(y))$ игры (2.1), при каждом $y \in Y$ определяемую равенствами:

$$\max_{X_1} f_1(x_1, x_2^e(y), y) = f_1(x^e(y), y),$$

$$\max_{X_2} f_2(x_1^e(y), x_2, y) = f_2(x^e(y), y).$$

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Если существует* $x^e(y)$, *то*

$$\Phi_i^{(1)}(x^e(y), y) \equiv 0, \text{ при любых } y \in Y \text{ и } i = 1, 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом $y \in Y$ имеет место

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(x^e(y), y) &= \max_{z_1 \in X_1} f_1^{(1)}(z_1, x_2^e(y), y) - f_1^{(1)}(x_1^e(y), x_2^e(y), y) = \\ &= f_1^{(1)}(x^e(y), y) - f_1^{(1)}(x^e(y), y) \equiv 0, \\ \Phi_2^{(1)}(x^e(y), y) &= \max_{z_2 \in X_2} f_2^{(1)}(x_1^e(y), z_2, y) - f_2^{(1)}(x_1^e(y), x_2^e(y), y) = \\ &= f_2^{(1)}(x^e(y), y) - f_2^{(1)}(x^e(y), y) \equiv 0.\end{aligned}$$

С л е д с т в и е 2.1. *Если существует гарантированное по исходам и рискам решение игры* (2.1) , *то* $\Phi_i^{(1)}(x^e, y_S) = 0$ $(i = 1, 2)$, *причем* $y_S \in Y$ *будет минимальной по Слейтеру неопределенностью в четырехкритериальной задаче*

$$\langle Y, \{f_i^{(1)}(x^e, y), \Phi_i^{(1)}(x^e, y)\}_{i=1,2}\rangle.$$

В самом деле,

$$\Phi_1^{(1)}(x^e, y_S) = \max_{z_1 \in X_1} f_1^{(1)}(z_1, x_2^e, y_S) - f_1^{(1)}(x_1^e, x_2^e, y_S) = 0.$$

Аналогично получаем $\Phi_2(1)(x^e, y_S) = 0$. Так как $\Phi_i(x, y) \geqslant 0$ (по определению), поэтому y_S будет минимальной по Слейтеру, ибо $\Phi_i^{(1)}(x^e, y_S) = 0$ $(i = 1, 2)$.

3. Достаточные условия существования

Л е м м а 3.1. ([4], *с.*71). *Если существуют постоянные* $\lambda_i \geqslant 0 \quad (i = 1, ..., m), \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i > 0$, *такие, что*

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^S)$$

$$\Big(\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x^S)\Big),$$

то альтернатива x^S *будет максимальной (соответственно, минимальной) по Слейтеру в* m *-критериальной задаче* $\langle X,\{f_i(x)\}_{i=1,...,m}\rangle$.

Утверждение 3.1. *Пусть существуют неотрицательные постоянные* $\alpha_j,\beta_k,\gamma_1^{(j)},\gamma_1^{(j+N_1)},\gamma_2^{(k)},\gamma_2^{(k+N_2)}$ $(j=1,...,N_1;\ k=1,...,N_2)$, *причем* $\sum\limits_{j=1}^{N_1}\alpha_j>0,\sum\limits_{k=1}^{N_2}\beta_k>0,$

$$\sum_{j=1}^{N_1}(\gamma_1^{(j)}+\gamma_1^{(j+N_1)})+\sum_{k=1}^{N_2}(\gamma_2^{(k)}+\gamma_2^{(k+N_2)})>0,$$

и тройка $(x_1^S,x_2^S,y_S)\in X_1,X_2,Y$ *такие, что*

$$\max_{x_1\in X_1}\sum_{j=1}^{N_1}\alpha_j f_1^{(j)}(x_1,x_2^S,y_S)=\sum_{j=1}^{N_1}\alpha_j f_1^{(j)}(x^S,y_S); \tag{3.1}$$

$$\max_{x_2\in X_2}\sum_{k=1}^{N_2}\beta_k f_2^{(k)}(x_1^S,x_2,y_S)=\sum_{k=1}^{N_2}\beta_k f_2^{(k)}(x^S,y_S); \tag{3.2}$$

$$Idem[y\to y_S]=\min_{y\in Y}\Big(\sum_{j=1}^{N_1}\big[\gamma_1^{(j)}f_1^{(j)}(x^S,y)-\gamma_1^{(j+N_1)}\Phi_1^{(j)}(x^S,y)\big]+$$

$$+\sum_{k=1}^{N_2}\big[\gamma_2^{(k)}f_2^{(k)}(x^S,y)-\gamma_1^{(k+N_2)}\Phi_2^{(k)}(x^S,y)\big]\Big), \tag{3.3}$$

то (x_1^S,x_2^S,y_S) *будет гарантированным равновесием Нэша — Слейтера БИВН в игре* Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3.1 и пункту 2а замечания 1.1 выполнение равенства (3.1) достаточно, чтобы стратегия x_1^S была максимальной по Слейтеру в N_1 - критериальной задаче (1.3). Аналогично устанавливаются импликации
(3.2) $\Rightarrow$ [x_2^S - максимальна по Слейтеру в (1.4)],
(3.3) $\Rightarrow$ [y_S - минимальна по Слейтеру в (1.5)].

З а м е ч а н и е 3.1. Рассмотрим вспомогательную бескоалиционную игру трех лиц

$$\langle \{1,2,3\}, \{X_1, X_2, Y\}, \{F_r(x_1, x_2, y)\}_{r=1,2,3} \rangle, \tag{3.4}$$

где функции выигрыша игроков 1, 2, 3 соответственно имеют вид:

$$F_1(x_1, x_2, y) = \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j f_1^{(j)}(x_1, x_2, y),$$

$$F_2(x_1, x_2, y) = \sum_{k=1}^{N_2} \beta_k f_2^{(k)}(x_1, x_2, y),$$

$$F_3(x_1, x_2, y) = -\sum_{j=1}^{N_1} \left[\gamma_1^{(j)} f_1^{(j)}(x, y) - \gamma_1^{(j+N_1)} \Phi_1^{(j)}(x, y)\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{N_2} \left[\gamma_2^{(k)} f_2^{(k)}(x, y) - \gamma_1^{(k+N_2)} \Phi_2^{(k)}(x, y)\right],$$

а $\alpha_j, \beta_k, \gamma_1^{(j)}, \gamma_1^{(j+N_1)}, \gamma_2^{(k)}, \gamma_2^{(k+N_2)}$ $(j = 1, ..., N_1;\ k = 1, ..., N_2)$ — постоянные, фигурирующие в утверждении 3.1. Тогда, если выполнены требования этого утверждения, то тройка (x_1^S, x_2^S, y_S) является ситуацией равновесия по Нэшу игры (3.4). Этот факт позволяет для доказательства существования гарантированного по исходам и рискам решения игры Γ привлечь теоремы существования ситуации равновесия по Нэшу из теории бескоалиционных игр [5].

4. Свойства гарантированного решения

4.1. Инвариантность относительно аффинных преобразований

Рассмотрим игру $\Gamma' = \langle X_1, X_2, Y, \{\hat{f}_1(x,y), \hat{f}_2(x,y)\}\rangle$, где

$$\hat{f}_i^{(j)}(x,y) = \alpha_i^{(j)} f_i^{(j)}(x,y) + \beta_i^{(j)},\ (j = 1, ...N_i;\ i = 1,2), \qquad (4.1)$$

причем $\alpha_i^{(j)} = const > 0, \beta_i^{(j)} = const$.

У т в е р ж д е н и е 4.1. *Любое гарантированное равновесие Нэша — Слейтера* (x_1^S, x_2^S, y_S) *игры* Γ *одновременно является гарантированным равновесием игры* (4.1) *и, обратно, любое гарантированное равновесие игры* (4.1) *является гарантированным равновесием игры* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению, функция риска по критерию $f_i^{(j)}$ для игры Γ имеет следующий вид:

$$\Phi_i^{(j)}(x,y) = \max_{x_i} f_i^{(j)}(x,y) - f_i^{(j)}(x,y).$$

Для преобразованной игры (4.1) функция риска станет

$$\hat{\Phi}_i^{(j)}(x,y) = \max_{x_i} \hat{f}_i^{(j)}(x,y) - \hat{f}_i^{(j)}(x,y) =$$

$$= \max_{x_i} (\alpha_i^{(j)} f_i^{(j)}(x,y) + \beta_i^{(j)}) - \alpha_i^{(j)} f_i(j)(x,y) - \beta_i^{(j)} =$$

$$-\alpha_i^{(j)}(\max_{x_i} f_i^{(j)}(x,y) - f_i^{(j)}(x,y)) = \alpha_i^{(j)} \Phi_i^{(j)}(x,y).$$

При $\alpha_i > 0$ справедливы эквиваленции: (x_1^S, x_2^S, y_S) - гарантированное равновесие в игре Γ тогда и только тогда, когда несовместны следующие системы неравенств:

а) $f_1^{(j)}(x_1, x_2^S, y_S) > f_1^{(j)}(x^S, y_S),\ j \in \{1, ..., N_1\}$;

б) $f_2^{(j)}(x_1^S, x_2, y_S) > f_2^{(j)}(x^S, y_S),\ j \in \{1, ..., N_2\}$,

в) $f_i^{(j)}(x^S, y) < f_i^{(j)}(x^S, y_S)$,

$\Phi_i^{(j)}(x^S, y) > \Phi_i^{(j)}(x^S, y_S)$, $j \in \{1, ..., N_i\}$, $(i = 1, 2)$.

Указанные системы неравенств несовместны тогда и только тогда, когда несовместны следующие системы неравенств:

а) $\alpha_1^{(j)} f_1^{(j)}(x_1, x_2^S, y_S) + \beta_1^{(j)} > \alpha_1^{(j)} f_1^{(j)}(x^S, y_S) + \beta_1^{(j)}$,

$$j \in \{1, ..., N_1\};$$

б) $\alpha_2^{(j)} f_2^{(j)}(x_1^S, x_2, y_S) + \beta_2^{(j)} > \alpha_2^{(j)} f_2^{(j)}(x^S, y_S) + \beta_2^{(j)}$,

$$j \in \{1, ..., N_2\}$$

в) $\alpha_i^{(j)} f_i^{(j)}(x^S, y) + \beta_i^{(j)} < \alpha_i^{(j)} f_i^{(j)}(x^S, y_S) + \beta_i^{(j)}$,

$\alpha_i^{(j)} \Phi_i^{(j)}(x^S, y) > \alpha_i^{(j)} \Phi_i^{(j)}(x^S, y_S)$,

$$j \in \{1, ..., N_i\}, \ (i = 1, 2);$$

или несовместны неравенства:

а) $\hat{f}_1^{(j)}(x_1, x_2^S, y_S) > \hat{f}_1^{(j)}(x^S, y_S)$, $j \in \{1, ..., N_1\}$;

б) $\hat{f}_2^{(j)}(x_1^S, x_2, y_S) > \hat{f}_2^{(j)}(x^S, y_S)$, $j \in \{1, ..., N_2\}$;

в) $\hat{f}_i^{(j)}(x^S, y) < \hat{f}_i^{(j)}(x^S, y_S)$,

$\hat{\Phi}_i^{(j)}(x^S, y) > \hat{\Phi}_i^{(j)}(x^S, y_S)$, $j \in \{1, ..., N_i\}$, $(i = 1, 2)$,

что равносильно тому, что (x_1^S, x_2^S, y_S) — гарантированное равновесие Нэша — Слейтера игры (4.1).

4.2. Компактность множества гарантированных по исходу и риску решений

Рассмотрим игру Γ. Введем

$$\mathcal{Z}^S = \{(x_1^S, x_2^S, y_S)\} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+m} -$$

множество гарантированных равновесий Нэша — Слейтера в бескоалиционной игре Γ.

Утверждение 4.2. *Если* X_1, X_2, Y — *компакты, все* $f_i(x,y)$ — *непрерывны по совокупности аргументов, то* $\mathcal{Z}^S$ — *компакт (может и пустой).*

Доказательство. Множество

$$\mathcal{Z}^S \subseteq X_1 \times X_2 \times Y -$$

ограничено, так как $X_1 \times X_2 \times Y$ — ограничено.

Докажем замкнутость $\mathcal{Z}^S$. Возьмем последовательность $z^k = (x_1^k, x_2^k, y^k) \in \mathcal{Z}^S$, сходящуюся к (x_1^*, x_2^*, y^*). Предположим $z^* \notin \mathcal{Z}^S$, тогда по определению 1.1 не выполняется хотя бы одно из трех условий:

1) x_1^* — максимальна по Слейтеру в задаче

$$\langle X_1, f_1(x_1, x_2^*, y^*)\rangle,$$

2) x_2^* — максимальна по Слейтеру в задаче

$$\langle X_2, f_1(x_1^*, x_2, y^*)\rangle,$$

3) y^* — минимальная по Слейтеру в задаче

$$\langle Y, \{f_i(x^*, y), -\Phi_i(x^*, y)\}_{i=1,2}\rangle.$$

Предположим, что не выполнено первое условие. Это означает, что существует $\bar{x_1} \in X_1$ такое, что совместна система неравенств:

$$f_1^{(j)}(\bar{x_1}, x_2^*, y^*) > f_1^{(j)}(x_1^*, x_2^*, y^*),\ j \in \{1, ..., N_1\}.$$

Так как $f_1^{(j)}(x,y)$ — непрерывны по всем переменным, то найдется номер K такой, что при всех $k \geqslant K$ будет

$$f_1^{(j)}(\bar{x_1}, x_2^k, y^k) > f_1^{(j)}(x_1^k, x_2^k, y^k),\ j \in \{1, ..., N_1\},$$

а это противоречит максимальности по Слейтеру стратегии x_1^k в задаче $\langle X_1, f_1(x_1, x_2^k, y^k)\rangle$. Аналогично для x_2^*. При доказательстве для y^* еще используется тот факт, что функции риска

$\Phi_i(x,y)$ $(i=1,2)$ также непрерывны по всем переменным (так как непрерывны $f_i(x,y), (i=1,2)$, то соответственно непрерывны и максимумы в (1.1)). Следовательно, предположение неверно и $z^* \in \mathcal{Z}^S$. Таким образом, $\mathcal{Z}^S$ — замкнутое множество, а так как оно ограничено, то $\mathcal{Z}^S$ — компакт.

Введем множество

$$\mathcal{M}^S = \{(x_1^S, x_2^S, y_S, f_1^S, \Phi_1^S, f_2^S, \Phi_2^S)\} \in \mathbb{R}^{2(N_1+N_2)+n_1+n_2+m} -$$

множество гарантированных по исходу и риску решений игры Γ.

У т в е р ж д е н и е 4.3. *Если X_1, X_2, Y — компакты, компоненты векторов $f_i(x,y), (i=1,2)$ — непрерывны на $X_1 \times X_2 \times Y$, то $\mathcal{M}^S$ — компакт (может и пустой).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как все $f_i(x,y)$ и $\Phi_i(x,y)$ $(i=1,2)$ — непрерывны по всем переменным и $\mathcal{Z}^S$ — компакт, то эти вектор-функции переводят компакт в компакт, следовательно, $f_i(\mathcal{Z}^S), \Phi_i(\mathcal{Z}^S), (i=1,2)$ являются компактами. Отсюда получаем, что множество $\mathcal{M}^S$ как прямое произведение компактов является компактом.

4.3. Задача с ґразделеннымиЄ функциями выигрыша

Рассмотрим игру Γ с сепарабельными функциями выигрыша

$$f_i^{(j)}(x,y) = h_{i1}^{(j)}(x_1) + h_{i2}^{(j)}(x_2) + g_i^{(j)}(y). \qquad (4.2)$$

Здесь $(j=1,...N_i;\ i=1,2)$.

Для данной игры получаем следующую функцию риска $\Phi_i^{(j)}(x,y)$ по критерию $f_i^{(j)}(x,y)$:

$$\begin{aligned}\Phi_i^{(j)}(x,y) &= \max_{x_i \in X_i} f_i^{(j)}(x,y) - f_i^{(j)}(x,y) = \\ &= \max_{x_i \in X_i} [h_{i1}^{(j)}(x_1) + h_{i2}^{(j)}(x_2) + g_i^{(j)}(y)] - f_i^{(j)}(x,y) = \\ &= \max_{x_i \in X_i} h_{ii}^{(j)}(x_i) - h_{ii}^{(j)}(x_i)\end{aligned}$$

$(j=1,...,N_i; i=1,2)$. Специальный вид (4.2) функций выигрыша в игре Γ и (4.2) позволяет выяснить структуру гарантированного по исходам и рискам решения

$$\langle x^S, f_1^S, \Phi_1^S, f_2^S, \Phi_2^S \rangle \in X \times \mathbb{R}^{2(N_1+N_2)}.$$

Для этого введем две многокритериальные задачи

$$\langle X_i, \{h_{ii}^j(x_i)\}_{j=1,...,N_i} \rangle \qquad (i=1,2) \tag{4.3}$$

и обозначим, *во-первых*, через X_i^S — множество максимальных по Слейтеру альтернатив $x_i^S \in X_i$ задачи (4.3) при $i=1,2$; *во-вторых*, вектора

$$f_i(x,y) = h_{i1}(x_1) + h_{i2}(x_2) + g_i(y), \quad \Phi_i(x,y) = H_{ii} - h_{ii}(x_i), \tag{4.4}$$

где N_i-вектора $h_{ii} = (h_{ii}^{(1)},...,h_{ii}^{(N_i)})$, $H_{ii} = (H_{ii}^{(1)},...,H_{ii}^{(N_i)})$ и числа $H_{ii}^{(j)} = \max\limits_{x_i \in X_i} h_{ii}^{(j)}(x_i), (j=1,...,N_i;\ i=1,2)$.

Будем предполагать, что множества X_i, Y суть компакты, а функции $h_{ir}^{(j)}(x_r)$ и $g_i^{(j)}(y)$ непрерывны.

У т в е р ж д е н и е 4.4. *Для того чтобы тройка* (x_1^S, x_2^S, y_S) *была гарантированным равновесием Нэша — Слейтера игры* Γ *с функциями выигрыша* (4.2) *необходимо и достаточно, чтобы* $x_i^S \in X_i^S \quad (i=1,2),\ y \in Y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом замечания 1.1 (4.2) и утверждения 4.1, система неравенств

$$h_{11}^{(j)}(x_1) + h_{12}^{(j)}(x_2^S) + g_1^{(j)}(y_S) > h_{11}^{(j)}(x_1^S) + h_{12}^{(j)}(x_2^S) + +g_1^{(j)}(y_S)$$

$\forall x_1 \in X \ (j=1,...,N_1)$ несовместна тогда и только тогда, когда несовместна система $h_{11}^{(j)}(x_1) > h_{11}^{(j)}(x_1^S)\ \forall x_1 \in X \ (j=1,...,N_1)$, что означает $x_1^S \in X_1^S$. Аналогично устанавливается включение $x_2^S \in X_2^S$. Наконец, требование 2в определения 1.1 с учетом (4.4) сводится к несовместности $(j=1,\dots N_i,\ i=1,2)$

$$\begin{cases} g_i^{(j)}(y) < g_i^{(j)}(y_S) \\ H_{ii}^{(j)} - h_{ii}^{(j)}(x_i^S) > H_{ii}^{(j)} - h_{ii}^{(j)}(x_i^S) \quad \forall y \in Y. \end{cases}$$

Эта система неравенств несовместна при всех $y \in Y$, так как вторая подсистема обращается в равенства.

Утверждение 4.5. *Множество всех гарантированных исходов для i-го игрока совпадает с*

$$h_{i1}(X_1^S) + h_{i2}(X_2^S) + g_i(Y),$$

а множество его гарантированных векторных рисков с $H_{ii} - h_{ii}(X_i^S)$ $(i=1,2)$, *где*

$$h_{ir}\big(X_r^S\big) = \bigcup_{x_r \in X_r^S} h_{ir}(x_r), g_i\big(Y\big) = \bigcup_{y \in Y} g_i(y) \ \ (i,r=1,2).$$

Справедливость утверждения сразу следует из утверждения 4.4.

Автор благодарит В.И. Жуковского за постановку задачи и замечания.

Список литературы

1. Жуковский В.И., Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: МНИИПУ, 1997.
2. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesys // Annuals Math. Statist. 1939. V.10. P.299-326.
3. Savage L.Y. The theory of statistical decision // J. Amer. Statistic Assotiation. 1951. N 46. P. 55-67.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
5. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.