УДК 519.833

© **Л.В. Жуковская**
molostv@isa.as.ru

РИСК В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ [1]

Ключевые слова: бескоалиционная игра, неопределенность, функция выигрыша, гарантированный риск.

Abstract. There were revealed limitations on elements of mathematical model the non-cooperative play where risk of each players equaled to zero.

Введение

Рассматривается бескоалиционная игра N –лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, Y\{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle, \tag{0.1}$$

где $\mathbf{N} = \{1, ..., N\}$ — множество порядковых номеров игроков; каждый i -й игрок $(i \in \mathbf{N})$ независимо от остальных выбирает и использует свою *стратегию* $x_i \in X_i \subset \mathbf{R}_i^n$, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1, ..., x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbf{N}} X_i$; независимо от их выбора в игре реализуется какая либо (любая!) *неопределенность* $y \in Y \subset \mathbf{R}^m$; на множестве $X \times Y$ определена *функция выигрыша* i -го игрока $f_i(x,y)$ $(i \in \mathbf{N})$, значение которой на конкретной паре является *выигрышем* этого игрока. Цель участия в игре каждого игрока — выбор такой своей стратегии, чтобы выигрыш его стал возможно большим, при этом все игроки ориентируются на возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$. В [1] было предложено понятие оптимального

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (02-01-00612)

решения игры Γ, основанное на подходящей модификации принципа Вальда (принципа максиминной полезности). Однако такой подход ориентирован на реализацию ґкатастрофыЄ, вероятность появления которой, как правило, мала. В настоящей работе предлагается новое понятие гарантированного решения игры Γ, базирующееся уже на подходящей модификации принципа минимаксного сожаления [2].

1. Формализация гарантированного риска

Используем следующие обозначения: X_i^Y — семейство функций $x_i(y)$, определенных на Y со значениями в X_i; ситуации $x = (x_{\mathbf{N}\setminus i}, x_i)$; N — вектора столбцы $\Phi_r = (\Phi_1^{(r)}, ..., \Phi_N^{(r)})$ $(r = 1, 2)$; бинарные отношения

$$(\Phi^{(1)} < \Phi^{(2)}) \Leftrightarrow (\Phi_i^{(1)} < \Phi_i^{(2)},\ i \in \mathbf{N});$$
$$(\Phi^{(1)} \not< \Phi^{(2)}) \Leftrightarrow \rceil(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)});$$
$$X_{\mathbf{N}\setminus i} = \textstyle\prod_{x \in \mathbf{N}\setminus i} X_i$$

Далее каждой функции выигрыша $f_i(x, y)$ поставим в соответствие функцию *риска* i *-го игрока*

$$\Phi_i(x, y) = \max_{z_i \in X_i} f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, z_i, y) - f_i(x, y) \quad (i \in \mathbf{N}), \tag{1.1}$$

выражающей сожаление i -го игрока в том, что при складывающейся в игре паре $(x, y) \in X \times Y$ игрок i использовал свою стратегию x_i, а не $\arg\max\limits_{z_i \in X_i} f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, z_i, y)$. Естественным представляется стремление каждого i-го игрока возможно уменьшить свою функцию риска, причем все игроки ориентируются на возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$, даже той, которая может максимально увеличить (в ґвекторном смыслеЄ) функции риска всех игроков.

Далее игре Γ поставим в соответствие бескоалиционную игру N лиц при неопределенности

$$\langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, Y, \{\Phi_i(x, y)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{N}, X_i$ и Y те же, что и в (1), а функции выигрыша i-го игрока $\Phi_i(x,y)$ (совпадающие с его функцией риска) имеет вид (1.1). Здесь также следует учитывать, что каждый i-й игрок стремится за счет выбора $x_i \in X_i$ *минимизировать* свой риск $\Phi_i(x,y)$. Следующее определение лежит на стыке понятия равновесия по Нэшу (из теории бескоалиционных игр [3]) и минимума по Слейтеру (из теории многокритериальных задач [4]).

О п р е д е л е н и е 1.1. Пару $(x^e, \Phi^*) \in X \times \mathbf{R}^N$ назовем гарантированным R-решением игры Γ, если существует такая неопределенность $y^* \in Y$, для которой $\Phi^* = \Phi(x^e, y^*)$ и

$$\begin{gathered}\Phi_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}, x_i, y^*) \geqslant \Phi_i(x^e, y^*), \quad \forall x_i \in X_i \quad (i \in \mathbf{N}) \\ \Phi(x^e, y^*) \not< \Phi(x^e, y), \quad \forall y \in Y.\end{gathered} \tag{1.3}$$

При этом x^e назовем R-гарантирующим равновесием по Нэшу, а вектор $\Phi(x^e, y^*)$ – R-гарантированным риском игры Γ.

З а м е ч а н и е 1.1. Ситуация x^e, удовлетворяющая неравенствам (1.3), является равновесной по Нэшу для бескоалиционной игры

$$\langle \mathbf{N},\ \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{\Phi_i(x, y^*)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle$$

и, следовательно, ґсогласноЄ (1.1) и тому факту, что $\max_{z_i} f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, z_i, y)$ от x_i не зависит, удовлетворяет привычным в теории игр условиям

$$f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}, x_i, y^*) \leqslant f_i(x^e, y^*), \quad \forall x_i \in X_i, \quad (i \in \mathbf{N}), \tag{1.4}$$

то есть является равновесной по Нэшу ситуацией в игре

$$\langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(x, y^*)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle, \tag{1.5}$$

которою получаем из Γ при фиксированном $y = y^*$.

З а м е ч а н и е 1.2. Неопределенность y^*, построенная согласно (1.4), будет максимальной по Слейтеру в многокритериальной задаче

$$\langle Y, \{\Phi_i(x^e, y)\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle,$$

которую получаем из (1.2) при фиксированном $x = x^e$.

З а м е ч а н и е 1.3. ґИгровой смыслЄ гарантированного R-решения (x^*, Φ^*) : игроки, используя свои стратегии $x_i^*(i \in \mathbf{N})$ из R-гарантирующего равновесия по Нэшу, x^e ґобеспечат себеЄ R-гарантированный риск

$$\Phi^* = (\Phi_1(x^e, y^*), ..., \Phi_N(x^e, y^*)),$$

больше которого риски $\Phi_i(x^e, y)$ одновременно стать не могут (то есть $\Phi^* \not< \Phi(x^e, y))$ при реализации любой неопределенности $y \in Y$.

2. Теорема существования

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что в игре* Γ
$1^0)$ *множества* $X_i (i \in \mathbf{N})$ *— выпуклые непустые компакты, а* Y *— непустой компакт;*
$2^0)$ *функции выигрыша* $f_i(x_{\mathbf{N} \setminus i}, x_i, y)$ *непрерывны на* $X \times Y$ *, строго вогнуты по* x_i *при фиксированных* $(x_{\mathbf{N} \setminus i}, y) \in X_{\mathbf{N} \setminus i} \times Y$ *.*
Тогда гарантированное R *-решение игры* Γ *есть пара* $(x^e, 0_N)$ *, где* x^e *-равновесная по Нэшу ситуация игры* (1.6) *(удовлетворяет неравенствам* (1.3) *), а* 0_N *есть нуль* N *-вектор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейство бескоалиционных игр

$$\Gamma(y) = \langle \mathbf{N}, \{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle, \tag{2.1}$$

порождаемых различными неопределенностями $y \in Y$. Согласно [3. С.90], для каждого $y \in Y$ существует ґсвояЄ ситуация равновесия по Нэшу $x^e(y)$ (удовлетворяющая равенствам

$$\max_{z_i \in X_i} f_i(x^e_{\mathbf{N} \setminus i}(y), z_i, y) = f_i(x^e_{\mathbf{N} \setminus i}(y), x^e_i(y), y), \ i \in \mathbf{N}). \tag{2.2}$$

Отметим, что из строгой вогнутости $f_i(x, y)$ по x_i следует, что для каждого $y \in Y$ стратегия $x_i^e(y) \in X_i^Y$, определяемая (2.2), будет единственной.

Так как функция $f_i(x,y)$ непрерывна на произведении компактов $X \times Y$ и строго вогнута по x_i, то существует лишь одна реализация $x_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, y)$ максимума

$$\max_{z_i \in X_i} f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, z_i, y) = f_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, x_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}(y), y), y), \tag{2.3}$$

при каждом $(x_{\mathbf{N}\setminus i}, y) \in X_{\mathbf{N}\setminus i} \times Y$. Эта функция $x_i(x_{\mathbf{N}\setminus i}, y)$ будет непрерывной [5. С.54]. Из (2.3) для $x_j = x_j^e(y) \in X_j^Y$ и $x_j^e(y)$, удовлетворяющих (2.2), получаем

$$\max_{z_i \in X_i} f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), z_i, y) = f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), x_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), y), y), \tag{2.4}$$

при каждом $y \in Y$. Из равенства левых частей равенств (2.2) и (2.4) следует равенство правых:

$$f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), x_i^e(y), y) = f_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), x_i(x^e_{\mathbf{N}\setminus i}(y), y), y), \forall y \in Y. \tag{2.5}$$

Наконец, с учетом вида функции риска (1.1), из (2.3) – (2.5) находим, что

$$\Phi_i(x^e(y), y) = 0, \quad \forall y \in Y \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{2.6}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Теорема установила следующий важный ѓигровойЄ факт: если игроки нашли для каждой неопределенности $y \in Y$ ситуацию равновесия по Нэшу $x^e(y) \in X$ игры (2.1), то использование ими этой ситуации обеспечит всем игрокам нулевые риски, независимо от неопределенности $y \in Y$, которая только может реализоваться в игре Γ.

З а м е ч а н и е 2.2. Практическое применение теоремы позволяет при построении гарантированного решения (x^e, Φ^*) игры Γ использовать следующий алгоритм:
составить математическую модель задачи в виде упорядоченного набора Γ;
построить $x^e(y)$-ситуацию равновесия по Нэшу этой игры для

каждого $y \in Y$ (применяя равенства (2.2));
тогда пара $(x^e(y), 0_N) \in X \times \mathbf{R}^N$ для каждого $y \in Y$ и является гарантированным R-решением игры Γ.

Именно при реализации любой неопределенности $y^* \in Y$ игроки, применяя свои стратегии $x_i^e(y^*)$ $(i \in \mathbf{N})$ из ситуации равновесия по Нэшу $x^e(y^*)$ (удовлетворяющую (2.2)), обеспечивают каждому нулевой риск (ґсамый хорошийЄ риск, который только может появиться в игре Γ).

Список литературы

1. Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: Международный НИИ проблем управления, 1997.
2. Savage L.Y. The Foundations of Statistics //New York: Wiley, 1954.
3. Воробьев В.В. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука,1984.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
5. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях М.: Высш. шк., 1986.