УДК 514.17

© **П. Д. Лебедев, А. А. Успенский**

К ВОПРОСУ О ГЕОМЕТРИИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ[1]

Рассматривается задача построения волновых фронтов. Предлагаются аналитические и численные алгоритмы, базирующиеся на конструкциях гладкого анализа, дифференциальной геометрии, теории выпуклых множеств (см. [1,2]), теории α–множеств (см. [3]). Полученные результаты используются при построении решений в задаче быстродействия с простой динамикой (см. [4]).

Изучаются свойства замкнутых односвязных плоских множеств с кусочно-гладкой границей. Вводится в рассмотрение понятие α–выпуклости. Ставится задача вычисления величины α, имеющей смысл угла и характеризующей меру невыпуклости плоского множества (см. [3]). Вычисление меры невыпуклости предполагает построение полунепрерывной сверху функции, определенной на дополнении множества до всей плоскости. Значение меры невыпуклости определяется геометрией границы множества.

Рассматриваются особые точки кривой, ограничивающей множество. Указанные точки, названные псевдовершинами, порождают биссектрисы — кривые, определяющие степень изогнутости границы множества. Показывается, что мера невыпуклости множества достигается на биссектрисе. Таким образом, задача вычисления величины α сводится к задаче построения биссектрис.

Для одного класса множеств с достаточно гладкой границей приводятся необходимые условия существования псевдовершин в терминах кривизны.

Предлагаются аналитические и численные методы построения биссектрис множеств. Приводятся примеры множеств, для которых величина α находится точными методами. Разработанные вычислительные программы применяются для вычисления меры невыпуклости плоских множеств с гладкой границей, заданной явным или неявным образом.

Полученные результаты использованы для моделирования динамики волнового фронта, порождаемого источником, распределенным равномерно вдоль границы множества. Приводятся результаты численного конструирования волновых фронтов для конкретных примеров.

На рисунке 1 изображено распространение волновых фронтов Ф для случая, когда индикатрисой допустимых скоростей является круг единичного радиуса с центром в начале координат, а источником волны — эллиптическая кривая Г, определяемая уравнением $y^2 = x^3 - 4x + 4$. Буквой L на рисунке 1 обозначена биссектриса кривой. Следует заметить, что в силу осевой симметрии кривой Г существует две биссектрисы, симметричные относительно оси абсцисс. Распространение волны имеет особенности (см., например, [5]). В данном примере, волна, будучи гладкой в окрестности кривой Г, затем теряет гладкость. При этом «разлом» волнового процесса совпадает с биссектрисой L, а начало биссектрисы совпадает с центром кривизны псевдовершины кривой Г.

Значение меры невыпуклости плоского множества достигается на биссектрисе границы этого множества. В зависимости от границы множества эта величина может реализоваться как в бесконечно удаленной точке, так и в некоторой вполне определенной точке биссектрисы. Рассматривается множество, расположенное условно правее эллиптической кривой. На рисунке 2 изображен график изменения сужения функции, верхняя грань которой принимается за меру невыпуклости множества, на биссектрису. В данном случае мера невыпуклости множества достигается в некоторой точке биссектрисы и приближенно равна 111 градусам.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проектами № 05-01-00601 и № 04-01-96099-р2004урал_а, гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-8512.2006.1 и программы научного сотрудничества с СО РАН.

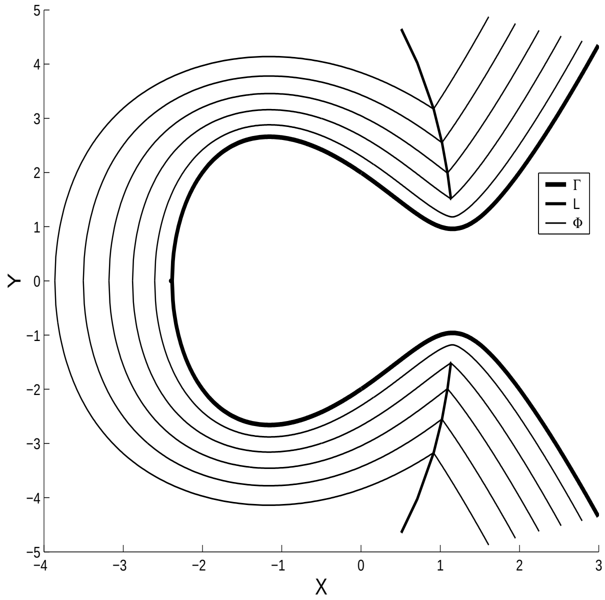

Рис. 1: Распространение фронтов для эллиптической кривой

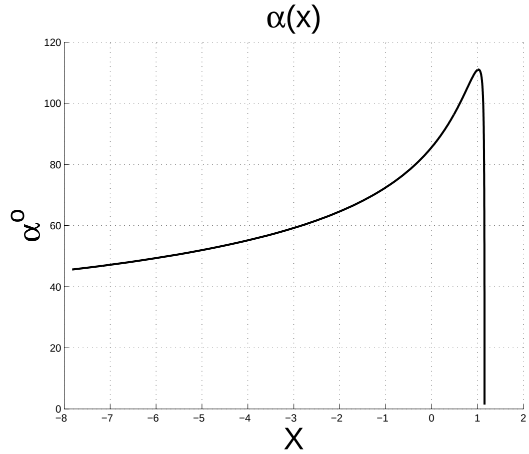

Рис. 2: График функции угловой характеристики в точках биссектрисы

Список литературы

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
3. α–множества и их свойства / Успенский А. А., Ушаков В. Н., Фомин А. Н.; Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.

Лебедев Павел Дмитриевич
Институт математики и механики УрО РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: pleb@mail.ru

Успенский Александр Александрович
Институт математики и механики УрО РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: uspen@imm.uran.ru