УДК 517.9

© **А. И. Полянский**

# ОБОБЩЕННО ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КВАЗИРЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

## Введение

Здесь рассматривается возмущенное включение (см. [1]) с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений. Для таких включений, как показывают примеры, не выполнено свойство эквивалентности понятий квазирешения и решения овыпукленного возмущенного включения (см. [1]). Отметим, что определение квазирешения (квазитраектории) для обыкновенных дифференциальных включений дано Т. Важевским (см. [2]) и им установлена связь между квазирешениями и решениями «овыпукленного» дифференциального включения. Ниже введено понятия решения обобщенно овыпукленного возмущенного включения и обобщенно экстремального квазирешения и сформулированы условия эквивалентности этих определений.

## § 1. Основные определения и обозначения

Пусть $X$ — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Обозначим $\mathrm{comp}(X)$ — множество всех непустых компактов пространства $X$. Пусть $U \subset X$. Тогда $\overline{U}$ — замыкание множества $U$ в пространстве $X$, $\mathrm{co}\,U$ — выпуклая оболочка множества $U$; $\overline{\mathrm{co}}U \equiv \overline{\mathrm{co}\,U}$, $\mathrm{ext}\,U$ — множество крайних точек множества $U$; $\overline{\mathrm{ext}}U \equiv \overline{\mathrm{ext}\,U}$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное пространство вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$. Через $C^n[a,b]$ обозначим пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C^n[a,b]} = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Пусть $\mathcal{U}\subset[a,b]$ — измеримое множество, $\mu(\mathcal{U})>0$ ( $\mu$ – мера Лебега). Через $L^n(\mathcal{U})$ обозначим пространство суммируемых функций $x:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}}|x(s)|ds$. Далее пусть $\mathcal{S}(L^n[a,b])$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $L^n[a,b]$ и $\mathcal{C}\ell(L^n[a,b])$ — множество непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $L^n[a,b]$. Измеримость многозначных отображений будем понимать в смысле [3].

Если $F:[a,b]\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — измеримое многозначное отображение, то множество измеримых сечений $F$ обозначим $\Pi(F)=\{y\in L^n[a,b]: y(t)\in F(t)$ при почти всех $t\in[a,b]\}$.

Для произвольного $\Phi\subset L^n[a,b]$ обозначим через $\mathrm{sw}\,\Phi$ совокупность всевозможных линейных комбинаций

$$y=\chi(\mathcal{U}_1)x_1+\chi(\mathcal{U}_2)x_2+\ldots+\chi(\mathcal{U}_m)x_m$$

элементов $x_i\in\Phi$, где $\mathcal{U}_i$ — непересекающиеся измеримые множества отрезка $[a,b]$ такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\mathcal{U}_i=[a,b]$. Пусть далее, $\overline{\mathrm{sw}}\,\Phi$ — замыкание множества $\mathrm{sw}\,\Phi$ в пространстве $L^n[a,b]$.

## § 2. Основной результат

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включение

$$x\in\Psi(x)+V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi: C^n[a,b]\to\mathrm{comp}(C^n[a,b])$, $\Phi: C^n[a,b]\to\mathcal{C}\ell(L^n[a,b])$ и линейный непрерывный интегральный оператор $V: L^n[a,b]\to C^n[a,b]$ определен равенством

$$(Vz)(t)=\int_a^b V(t,s)z(s)ds,\quad t\in[a,b]. \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–01–00324)

Определим овыпукленное по переключению отображение $\widetilde{\Phi} : C^n[a,b] \to \mathcal{S}(L^n[a,b])$ равенством $\widetilde{\Phi}(x) = \overline{\mathrm{sw}}\,\Phi(x)$.

Пусть отображение $F : [a,b] \times C^n[a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ таково, что для любого $x \in C^n[a,b]$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо и $\widetilde{\Phi}(x) = \Pi\big(F(\cdot, x)\big)$. Далее, пусть отображение $\mathrm{ext}\,\widetilde{\Phi}$ определено равенством

$$(\mathrm{ext}\,\widetilde{\Phi})(x) = \big\{y \in L^n[a,b] : y(t) \in \overline{\mathrm{ext}}\Big(\mathrm{co}\big(F(t,x)\big)\Big) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\big\}.$$

Рассмотрим в пространстве $C^n[a,b]$ включения

$$x \in \Psi(x) + V\,\overline{\mathrm{co}}\,\widetilde{\Phi}(x), \tag{3}$$

$$x \in \Psi(x) + V(\mathrm{ext}\,\widetilde{\Phi})(x). \tag{4}$$

Включение (3) назовем *обобщенно овыпукленным* возмущенным включением (1), а включение (4) — *обобщенно экстремальным* возмущенным включением (1).

О п р е д е л е н и е 1. Под *обобщенно овыпукленным решением* включения (1) будем понимать функцию $x \in C^n[a,b]$ такую, что существуют элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \overline{\mathrm{co}}\,\widetilde{\Phi}(x)$, для которых справедливо равенство $x = v + Vz$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $x \in C^n[a,b]$ называется *обобщенно экстремальным квазирешением* включения (1), если существует такой элемент $v \in \Psi$ и такая последовательность $z_i \in (\mathrm{ext}\,\widetilde{\Phi})(x)$, $i = 1, 2, \ldots$, что последовательность $x_i = v + Vz_i \to x$ в пространстве $C^n[a,b]$ при $i \to \infty$.

Обозначим $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ — множество обобщенно экстремальных квазирешений включения (1); $H_{\mathrm{co}}$ — множество обобщенно овыпукленных решений включения (1). Используя результат работы [4], получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть линейный непрерывный интегральный оператор $V$, определенный равенством* (2), *переводит каждое слабо компактное в $L^n[a,b]$ множество в предкомпактное множество пространства $C^n[a,b]$. Тогда справедливо равенство*

$$H_{\mathrm{co}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}.$$

## Список литературы


1. Булгаков А. И., Беляева О. П., Григоренко А. А. К теории возмущенных включений и о ее приложениях // Матем. сб. 2005. Т. 196. № 10. С. 21–78.
2. Wazewski T. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent // Bull. Acad. Pol. Sci. ser. Sei. Math. Astron. Phys. 1962. V. 10. № 1. P. 11–15.
3. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М: Наука. 1974. 480 с.
4. Булгаков А. И., Полянский А. И. Некоторые свойства решений обобщенно овыпукленного возмущенного включения // Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2006. № 2(36). С. 18–21.



Полянский Алексей Игоревич
Тамбовский гос. техн. ун-т,
Россия, Тамбов
e-mail: a_poljanskij@mail.ru