УДК 517.934

© **Л. И. Родина**

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Исследуется задача о локальной управляемости для линейной нестационарной системы со случайными параметрами. Для систем такого типа не всегда доступна информация о поведении системы "в будущем", поэтому возникает задача о существовании неупреждающего управления. Управление $u(t,x)$ называется *неупреждающим,* если для его построения в момент времени $t=\tau$ используется информация о поведении системы только при $t\leqslant\tau$.

Рассматривается система

$$\dot{x}=A(f^t\omega)x+B(f^t\omega)u, \quad (t,\omega,x,u)\in\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где функция $t\to\xi(f^t\omega)\doteq\big(A(f^t\omega),B(f^t\omega)\big)$ переменного t кусочно-постоянна при каждом $\omega\in\Omega$. Предполагается, что $u\in U$, где U — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, содержащий нуль в своей внутренности. Получены достаточные условия существования неупреждающего управления для системы (1), а также оценка снизу вероятности того, что исходная система локально управляема на фиксированном отрезке времени. Разработан алгоритм построения неупреждающего управления.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим вероятностные пространства $(\Omega_1,\mathfrak{F}_1,\mu_1)$ и $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2,\mu_2)$, где Ω_1 — пространство числовых последовательностей $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_k,\dots)$, $\theta_k\in(0,\infty)$, пространство $\Omega_2\doteq\{\varphi:\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_k,\dots),\varphi_k\in\Psi\}$, $\Psi=\{\psi_j\}_{j=1}^s$ — конечное множество матричных пар $\psi_j\doteq(A_j,B_j)$, $\mathfrak{F}_i$ — σ-алгебра, порожденная соответствующими цилиндрическими множествами, μ_i — продолжение меры $\widetilde{\mu}_i$, определенной на алгебре цилиндрических множеств, на σ-алгебру $\mathfrak{F}_i$, $i=1,2$. Рассмотрим также вероятностное пространство $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$, где пространство $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, построение σ-алгебры $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры μ описано в [1].

На $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2,\mu_2)$ для каждого $\theta\in\Omega_1$ введем последовательность случайных величин $\zeta=(\zeta_0,\zeta_1,\dots)$, где $\zeta_k(\omega)=\zeta_k(\varphi,\theta)=\varphi_k$, $\varphi_k\in\Psi$. Предполагаем, что ζ образует *стационарную в узком смысле* цепь Маркова, которая однозначно определяется матрицей переходных вероятностей $P=(p_{ij})_{i,j=1}^s$ и начальным распределением $\pi=(\pi_i)_{i=1}^s$ (см. [2, с. 122]).

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^\infty:$ $\tau_0=0$, $\tau_k(\theta)=\sum\limits_{i=1}^k\theta_i$, где $\theta_1,\theta_2,\dots$ — независимые случайные величины, причем $\theta_2,\theta_3,\dots$ одинаково распределены. Определим процесс восстановления $\nu(t)=\max\{k:\tau_k\leqslant t\}$, $t\geqslant 0$. Предполагаем, что $\nu(t)$ — стационарный процесс восстановления. Пусть $f_1^t\theta=(\tau_{\nu+1}-t,\theta_{\nu+2},\theta_{\nu+3},\dots)$, $t>0$, $f_2^t(\theta)\varphi=(\varphi_\nu,\varphi_{\nu+1},\dots)$. На $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ определим преобразование сдвига $f^t\omega=f^t(\theta,\varphi)=\big(f_1^t\theta,f_2^t(\theta)\varphi\big)$, которое сохраняет меру μ (см. [3, с. 190]).

Пусть $\xi(\omega)=\zeta_0(\omega)$ — случайная величина на $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$. Определим случайный процесс $\xi(f^t\omega)=\big(A(f^t\omega),B(f^t\omega)\big)$, порождаемый потоком $f^t\omega$. Тогда $\xi(f^t\omega)$ принимает постоянные значения φ_k при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$ и является стационарным в узком смысле случайным процессом (см. [2, с. 433], [3, с. 167]). Систему (1) отождествим с функцией $\xi:\Omega\to\Psi$. При каждом фиксированом ω функция $\xi(f^t\omega)$ задает линейную детерминированную систему. В качестве *допустимых управлений* системы ξ берутся всевозможные ограниченные, измеримые по Лебегу функции $u_\omega:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to U\in\mathbb{R}^m$. Решения системы ξ, соответствующие управлению $u_\omega(t,x,x_0)$, будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

Пусть $D_{[t_0,t_1]}(\omega)$ — множество управляемости системы $\xi(f^t\omega)$ на отрезке $[t_0,t_1]$, то есть множество всех точек, которые можно перевести в нуль на $[t_0,t_1]$ при фиксированом $\omega\in\Omega$, $\mathcal{D}_{[t_0,t_1]}(\omega)$ — множество неупреждающе управляемых состояний системы $\xi=\xi(f^t\omega)$ на $[t_0,t_1]$. Система ξ называется *локально управляемой с вероятностью* μ_0 на отрезке $[t_0,t_1]$, если $\mu\{\omega: 0\in\operatorname{int} D_{[t_0,t_1]}(\omega)\}=\mu_0$ и *неупреждающе локально управляемой* с вероятностью μ_0 на $[t_0,t_1]$, если вероятность $\mu\{\omega: 0\in\operatorname{int}\mathcal{D}_{[t_0,t_1]}(\omega)\}=\mu_0$.

§ 2. Существование неупреждающего управления для системы с произвольным числом состояний

Обозначим через ξ_i, $i=1,\dots,s$ систему $\dot x=A_ix+B_iu$, $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$. Пусть $L(\xi_i)$ — пространство управляемости, $X_i(t,\vartheta)\doteq X_i(t-\vartheta)$ — матрица Коши данной системы. Предполагаем, что $\dim L(\xi_i)\leqslant n$.

Назовем конечную последовательность $W=(\psi_{i_1},\dots,\psi_{i_k})$, $\psi_{i_j}\in\Psi$, словом W. Поставим в соответствие слову W линейные системы $\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k}$ и пространства управляемости этих систем $L(\xi_{i_1}),\dots,L(\xi_{i_k})$. Предположим, что для слова W найдутся подпространства $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_{k-1}$ такие, что любую начальную точку системы можно перевести на $\mathcal{M}_1$, затем любую точку $\mathcal{M}_i$ перевести на $\mathcal{M}_{i+1}$, а любую точку $\mathcal{M}_{k-1}$ перевести в нуль. Предполагаем также, что существуют управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из точек $\mathcal{M}_i$, $i=1,\dots,k-1$, в этом подпространстве до следующего момента переключения. Кроме того, для всех систем $\xi_1,\dots,\xi_s$ должна существовать положительно определенная функция $V(x)$ такая, что траектории решений этих систем, начинающиеся в точке x_0, все время остаются внутри поверхности уровня $V(x)=V(x_0)$. Если выполнены указанные выше условия, то вероятность того, что система неупреждающе управляема на отрезке $[0,T]$, равна вероятности появления слова W на данном отрезке.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что слово* $W=(\psi_{i_1},\dots,\psi_{i_k})$, *положительно определенная функция* $V\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *и подпространства* $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_{k-1}$ *удовлетворяют условиям:*

(1) $\mathcal{M}_\ell\subset L(\xi_{i_\ell})+X_{i_\ell}^{-1}(\alpha)\mathcal{M}_{\ell+1}$, $\ell=1,\dots,k-2$, $\mathcal{M}_{k-1}\subset L(\xi_{i_k})$, $\mathcal{M}_1+L(\xi_{i_1})=\mathbb{R}^n$;

(2) $\min\limits_{u\in U}\big\langle\frac{\partial V(x)}{\partial x},A_ix+B_iu\big\rangle\leqslant 0$ *для всех* $i=1,\dots,s$ *и всех* $x\in O_\varepsilon^n$;

(3) *существуют управления* $u_\ell(x)$, *что* $A_{i_\ell}x+B_{i_\ell}u_\ell(x)\subset\mathcal{M}_\ell$ *и* $\big\langle\frac{\partial V(x)}{\partial x},A_{i_\ell}x+B_{i_\ell}u_\ell(x)\big\rangle\leqslant 0$ *для всех* $x\in\mathcal{M}_\ell\cap O_\varepsilon^n$, $\ell=1,\dots,k-1$.

(4) $V(x+u\ell_j)\geqslant V(x)$ *для всех* $u\in U$, $x\in\mathcal{M}_j$, $\ell_j\in L(\xi_{i_j})$, $j=1,\dots,k-1$.

Тогда система ξ *неупреждающе управляема на* $[0,T]$ *с вероятностью* $\mu(T)$, *для которой при* $T\geqslant[r(N+3)-2]\beta$, $r,N\geqslant 1$, *справедлива оценка* $\mu(T)\geqslant p\,Q\frac{1-(q_{i_1}-pq_{i_k})^r}{1-q_{i_1}+pq_{i_k}}$.

Если все состояния цепи Маркова сообщающиеся, то $\mu(T)\to 1$ *при* $T\to\infty$.

Здесь $p=p_{i_1,i_2}\dots p_{i_k-1,i_k}$ — условная вероятность перехода из состояния ψ_{i_1} в ψ_{i_2}, и так далее, в ψ_{i_k}; q_j — вероятность первого попадания из ψ_j в ψ_{i_1} не более чем за N шагов, $Q=\sum\limits_{j=1}^{s}\pi_jq_j$ — вероятность первого попадания не более чем за N шагов.

Список литературы

1. Баранова О. В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1843–1850.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
3. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

Родина Людмила Ивановна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: rdl@uni.udm.ru