УДК 519.9

© **А. Н. Сесекин, Ю. В. Фетисова**

ОПТИМАЛЬНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ[1]

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J[v(\cdot)] = \frac{1}{2}x^T(t_f)S(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T(t)Q(t)x(t) + v^T_{\text{опт}}(t)B^T(t)Q(t)B(t)v_{\text{опт}}(t)\right)dt, \qquad (1)$$

где $Q(\cdot)$, $S(t_f)$ — симметричные, неотрицательно определенные матрицы размерности $n \times n$, вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\dot{v}(t) \qquad (2)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0.$$

Здесь $A(t)$ — непрерывная матрица-функция размерности $n\times n$, $B(t)$ — непрерывно дифференцируемая матрица-функция размерности $n \times m$, $x(t)$ — вектор-функция размерности n, $v(t)$ — вектор-функция ограниченной вариации размерности m, удовлетворяющая условию $v(t_0) = 0$. Производные в (2) будем понимать в обобщенном смысле [1].

Функционал (1) является полуопределенным функционалом обобщенной работы. Функционалы такого вида были введены в [2]. Подробную информацию об оптимизационных задачах с функционалами такого вида можно найти в [3]. Полуопределенность функционала заключается в том, что он содержит неизвестную первообразную оптимального управления $\dot{v}_{\text{опт}}(t)$. Другой отличительной особенностью функционала (1) является то, что он допускает импульсные составляющие у управления $\dot{v}(t)$.

Будем полагать, что на интервале (t_0, t_f) траектория $x(t)$ и управление $v(t)$ — непрерывные слева вектор-функции ограниченной вариации. Под решением системы дифференциальных уравнений (2) в этом случае будем понимать решение соответствующей системы интегральных уравнений

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} B(s)dv(s).$$

Сначала с помощью замены переменных из [4] для исходной задачи строится вспомогательная, решение которой существует в обычных функциях. Решение вспомогательной задачи ищется с помощью метода динамического программирования [5]. Затем с помощью операции обобщенного дифференцирования строится оптимальное управление для исходной задачи. В связи с тем, что оптимальное управление во вспомогательной задаче равно нулю при $t \leqslant t_0$ и является постоянным при $t \geqslant t_f$, оптимальное управление в исходной задаче будет иметь импульсные составляющие в начальный и конечный моменты управления. Между этими моментами оптимальное управление имеет только регулярную составляющую, то есть оптимальное управление представимо в виде

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06-01-00445).

$$\dot{v}_{\text{опт}}(t) = -W(t_0)x_0\,\delta(t-t_0) + u_{\text{рег}}(t) + (v_f - v(t_f))\,\delta(t-t_f),$$

где $u_{\text{рег}}(t)$ — регулярная состовляющая (обыкновенная производная) обобщенного управления $\dot{v}_{\text{опт}}(t)$. В отличие от [6] функции $W(t)$ и $u_{\text{рег}}(t)$ в оптимальном управлении рассматриваемой задачи определяются не с помощью матричного уравнения Риккати, а с помощью решения уравнения Ляпунова.

Список литературы

1. Владимиров B.C. Обобщенные функции в математической физике. М. Наука, 1977. 256 с.
2. Красовский А. А. Обобщенные задачи аналитического конструирования регуляторов при заданной работе управлений и управляющих сигналов // Автоматика и Телемеханика. 1969. № 7. С. 7–17.
3. Красовский А. А. (ред.) Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука. 1987. 711 с.
4. Goh B. S. The second variation for singular Bolza problem // SIAM J. Contr. 1966. V. 4, №2. P. 309–325.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960. 400 с.
6. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н., Дрозденко С. Е. Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.

Сесекин Александр Николаевич
Институт математики и
механики УрО РАН,
Россия, Екатеринбург
e-mail: sesekin@imm.uran.ru

Фетисова Юлия Валерьевна
Уральский государственный
технический университет – УПИ,
Россия, Екатеринбург
e-mail: Jfetisova@imm.uran.ru