УДК 517.911

© **И. А. Финогенко**

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ И НЕПРЕРЫВНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

Введение

В работе исследуются некоторые свойства разрывных систем, которые влекут условия типа монотонности или односторонние условия Липшица. Наиболее употребительным подходом к определению решения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

с разрывной функцией f является переход от уравнения (1) к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{2}$$

где $F(t,x)$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции f в каждой точке (t,x). Метод был предложен А. Ф. Филипповым [1] в 1961 году, который в своих дальнейших работах создал достаточно содержательную теорию дифференциальных уравнений (1) с разрывной правой частью и существенно продвинул теорию дифференциальных включений.

Общей и качественной теории разрывных систем посвящено большое количество работ (см. обзоры в [2], [3], [4]), предмет исследований которых в основном тот же, что и в теории дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью. Но имеются и специфические задачи, обусловленные наличием у функции f поверхностей разрыва (или множества точек разрыва лебеговой меры нуль).

Прежде всего отметим, что на поверхностях S_i разрыва функция f может быть не определена или ее значения на этих поверхностях не принимаются во внимание, так поведение системы на пересечении $S = \bigcap S_i$ определяются ее полем направлений в малой окрестности S. Может оказаться, что при попадании интегральной кривой на пересечение S дальнейшее движение системы возможно только по множеству S, Такие движения называются скользящими режимами и возникает задача изучения уравнений скользящих режимов разрывных систем, которые, как правило, задаются неявно. Некоторые результаты по однозначной определенности уравнений скользящих режимов можно найти в [3, стр. 46-47]. В данной работе предлагается общая неявная форма записи разрывных систем вида (1), позволяющая получить условие однозначной определенности вектора правой производной решения системы в каждой точке (t,x) вне зависимости от того, реализуется в дальнейшем скользящий режим или нет.

Весьма привлекательной выглядит идея об аппроксимациях правых частей разрывных систем непрерывными функциями. Это позволило бы применять для численных расчетов хорошо разработанные схемы. Но здесь сразу же воникают вопросы о коструктивности таких аппроксимаций и об оценках для приближенных (аппроксимирующих) решений. В данной работе такие оценки получены в общем виде для аппроксимаций, построенных по типу аппроксимаций Иосиды [5, стр. 373].

Наиболее общими решениями уравнения (1) в классе абсолютно непрерывных функций являются решения Каратеодори с измеримой производной, удовлетворяющей соответсвующему дифференциальному включению почти всюду. В то же время могут существовать и более точные решения, такие как правосторонние решения, имеющие физический смысл во многих

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00247) и Программы президиума РАН № 22 (проект 2.5)

задачах механики. Под правосторонним решением задачи (1) с начальными данными (t_0, x_0) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, определенная на некотором промежутке $[t_0, t_1)$, такая, что $x(t_0) = x_0$, ее правая производная $D^+x(t)$ существует, непрерывна справа и удовлетворяет включению $D^+x(t) \in F(t, x(t))$ в каждой точке $t \in [t_0, t_1)$. Для систем с одной поверхностью разрыва этот класс решений изучен в книге [4], где имеется также детальная классификация и сравнительный анализ разных типов решений. Существование правосторонних решений связано с условием однозначной определенности вектора производных в системе (1). Здесь устанавливается теорема существовования медленных правосторонних решений уравнения (1), правая часть которого в неявной форме записи реализуется, в частности, как ближайшая к началу координат точка множества $F(t, x)$ из правой части включения (2).

§ 1. Неявное однозначное доопределение разрывных систем

Уравнение (1) рассматривается в рамках следующих предположений: функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t, x) всюду в некоторой области Ω из пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ за исключением множеств $M_i = \{(t, x) \in \Omega : \phi_i(x) = 0\}$, $i = 1, \ldots, m$, где $\phi_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Дополнение к множеству $M = \{\bigcup M_i : i = 1, \ldots, m\}$ представим в виде объединения конечного числа открытых множеств $\Omega_j \subset \Omega$, для каждого из которых функции $\phi_i(x) \neq 0$ и сохраняют знаки одни и те же на любом сечении множества Ω_j плоскостью $t = \mathrm{const}$. Предположим далее, что для каждого множества Ω_j и любой его граничной точки $(t, x) \in M$ существует конечный предел $f^j(t, x)$ функции $f(t', x')$ при условии, что $(t', x') \to (t, x)$ и $(t', x') \in \Omega_j$. Этот предел будем называть предельным значением функции f в точке (t, x) по множеству Ω_j. В соответсвии с определениями из [3, с. 39–40], функцию f с указанными выше свойствами будем называть кусочно непрерывной.

Отметим, что для кусочно непрерывных функций f многозначное отображение $F(t, x)$ из правой части (2) локально ограничено, полунепрерывно сверху по совокупности аргументов и принимает выпуклые и компактные значения. Поэтому дифференциальное включение (2) имеет локальное решение Каратеодори.

Для произвольного вектора $z \in \mathbb{R}^n$ обозначим $p_i(x, z) = \langle \nabla\phi_i(x), z \rangle$, где $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов. Если $p_i(x, z) \neq 0$ для всех индексов i, таких что $(t, x) \in S_i$, то через $\tilde{f}(t, x; z)$ обозначим предел функции $f(t, x + hz)$ при $h \to +0$. Определение $\tilde{f}(t, x; z)$ корректно, так как легко видеть, что из условий $p_i(x, z) \neq 0$ и $\phi_i(x) = 0$ вытекает $\phi_i(x + hz) \neq 0$ для всех достаточно малых $h > 0$. Для оставшихся индексов i таких, что $\phi_i(x) \neq 0$ также выполняется неравнство $\phi(x + hz) \neq 0$ при малых h. Следовательно, точки $(t, x + hz)$ принадлежат лишь одной из областей непрерывности функции f и предел $\tilde{f}(t, x; z)$ существует.

В каждой фиксированной точке $(t, x) \in \Omega$ для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$ определим множество $\tilde{\Gamma}(t, x; z)$, как выпуклую оболочку предельных значений отображения $z' \to \tilde{f}(t, x; z')$ при $z' \to z$. Легко видеть, что $\tilde{\Gamma}(t, x; z) \subset \Gamma(t, x)$ и $\tilde{\Gamma}(t, x; 0) = \Gamma(t, x)$.

Многозначное отображение $z \to \tilde{\Gamma}(t, x; z)$ имеет замкнутый график, принимает выпуклые значения и ограничено. Поэтому из теоремы Какутани о неподвижных точках многозначных отображений вытекает, что при любых $(t, x) \in \Omega$ существует решение $z(t, x)$ многозначного включения

$$z \in \tilde{\Gamma}(t, x; z) \tag{3}$$

Множество всех решений включения (3) обозначим $H(t, x)$.

Т е о р е м а 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *и дифференциальное уравнение в контингенциях*

$$\dot{x} = z(t, x), \quad z(t, x) \in H(t, x) \tag{4}$$

равносильны в том смысле, что множества их решений Каратеодори совпадают.

Из теоремы 1 вытекает, что уравнение (4), записанное в виде $\dot{x} \in \tilde{\Gamma}(t, x; \dot{x})$, можно рассматривать, как неявную форму записи уравнения (1). Оно имеет решение Каратеордори. По отношению к существованию правосторонних решений предложенный выше неявный метод доопределения правой части уравнения (1) носит необходимый характер в следующем смысле: если $x(t)$ — правостороннее решение задачи (1), то правая производная $D^+x(t)$ в каждой точке t совпадает со значением $z(t,x(t))$ одной из функций $z(t,x) \in H(t,x)$.

Рассмотрим вопрос о единственности функции $z(t,x)$ и правой единственности решений.

Т е о р е м а 2. *Пусть неравенство*

$$\big(\tilde{f}(t,x;z^1) - \tilde{f}(t,x;z^2)\big)A(t,x)(z^1 - z^2)^T \leqslant 0 \tag{5}$$

выполнено для любых векторов z^1, $z^2 \in \mathbb{R}^n$ *таких, что* $\langle \nabla\phi_i(x) \cdot z^1\rangle \neq 0$, $\langle \nabla\phi_i(x) \cdot z^2)\rangle \neq 0$, *где* $A(t,x)$ *— симметричная, положительно определенная матрица, «T» — знак транспонирования. Тогда решение* $z(t,x)$ *многозначного уравнения* (3) *единственно и положительно определенная квадратичная форма* $v(z) = zA(t,x)z^T$ *при* $z = z(t,x)$ *достигает своего минимального значения на выпуклом, компактном множестве* $\Gamma(t,x)$ *из правой части* (2). *В частности, если* $A(t,x)$ *— единичная матрица, то* $z(t,x)$ *— ближайшая к началу координат точка множества* $\Gamma(t,x)$.

Отметим, что теорема 2 утверждает однозначную определенность уравнений (1) в неявной форме $\dot{x} = z(t,x)$, но не обеспечивает правую единственность решений. Это видно хотя бы из того, что неравенство (5) тривиально выполняется для любой непрерывной функции $f(t,x)$. Как известно, непрерывности функции $f(t,x)$ не достаточно для единственности решений обыкновенного дифференциального уравнения.

Введем в рассмотрение условие: *для каждой точки* $(t_0,x_0) \in \Omega$ *существуют числа* $\delta > 0$ *и* $l > 0$ *такие, что для любых точек* (t,x), (t,y) *из областей непрерывности функции* f (*возможно разных областей для различных точек* (t,x), (t,y)), *удовлетворяющих включению* $x,y \in U_\delta(x_0)$, *и любого* $t \in [t_0, t_0+\delta)$ *выполнено неравенство*

$$\big(f(t,x) - f(t,y)\big)A(t,x)(x-y)^T \leqslant l\|x-y\|^2, \tag{6}$$

где $A(t,x)$ — *симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица,* $U_\delta(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$ *—* δ*-окрестность точки* x_0, $\|\cdot\|$ *— евклидова норма.*

Неравенство (6) является обобщением условия правой липшицевости [3, стр. 82], которое обеспечивает правую единственность решений разрывных систем и используется в методах приближенных вычислений решиний.

Т е о р е м а 3. *Пусть* f *— кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству* (6). *Тогда для любой точки* (t_0,x_0) *найдется промежуток* $[t_0, t_0+\delta)$, *на котором любые два решения уравнения* (1) *с начальными данными* (t_0,x_0) *совпадают.*

Использование в неравенстве (6) матрицы $A(t,x)$ (в отличие от правого условия липшицевости) может быть полезно при изучении уравнений вида $A(t,x)\dot{x} = f_0(t,x) + g(t,x)$ с симметричной положительно определенной матрицей A при производных, что характерно, например, для уравнений Лагранжа второго рода при описании движения механических систем с разрывными диссипативными характеристиками (релейными управлениями или кулоновыми силами трения).

Отметим также, что из неравенства (6) вытекает (5). Чтобы убедится в этом следует в неравенстве (6) x заменить на $x + hz^1$, y — на $x + hz^2$, поделить обе части неравенства на $h > 0$ и затем перейти к пределу при $h \to 0$.

§ 2. Непрерывные аппроксимации разрывных систем

Для автономного уравнения вида (1) частным случаем условия правой липшицевости и неравенства (6) является нераверство $\langle (x-y), (f(x) - f(y))\rangle \leqslant 0$. Из него вытекает, что $\langle (x-y), (u-v)\rangle \leqslant 0$ для любых $u \in F(x)$, $v \in F(y)$. Это означает, что $x \to -F(x)$ является монотонным многозначным отображением [5, стр. 369]. Тогда для дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$, $x(0) = x_0$ (с максимально монотонным оператором $-F$) справедлива теорема [5, стр. 385] о существовании и единственности правостороннего решения $x(t)$, определенного на $[0,+\infty)$, такого, что правая производная $D^+x(t)$ непрерывна справа и является ближайшей к началу координат точкой множества $F(x(t))$ (то есть $x(t)$ — медленное решение). Доказательство этой теоремы весьма нетривиально и опирается на аппроксимации Иосиды [5, стр. 373] максимально монотонных многозначных операторов.

Здесь будет рассмотрен общий неавтономный случай. Для каждых фиксированных (t,x) и $\lambda > 0$ через $z = J_\lambda(t,x)$ обозначим решение включения $z \in x + \lambda F(t,z)$ и пусть $F_\lambda(t,x) = (J_\lambda(t,x) - x)/\lambda$. Отметим, что формально $J_\lambda(t,x)$ и $-F_\lambda(t,x)$ представляют собой резольвенту и, соответственно, аппроксимацию Иосиды для отображения $x \to -F(t,x)$ при каждом фиксированном t.

Для произвольного множества $\Omega' \subset \Omega$ и числа $\delta > 0$ через Ω'^δ будем обозначать δ-окрестность множества Ω'.

Т е о р е м а 4. *Пусть для кусочно непрерывной функции $f(t,x)$, определенной в области Ω, выполнено неравенство* (6). *Тогда для любого отрезка $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$, любого компактного множества $\Omega' \subset \Omega$ и числа $\delta > 0$ такого, что $\Omega'^\delta \subset \Omega$ существует число $\lambda' > 0$ такое, что при всех $\lambda \in [0,\lambda']$ и $(t,x) \in [a,b] \times \Omega'$ на множестве $(0,\lambda'] \times [a,b] \times \Omega'$ определено непрерывное отображение $(\lambda,t,x) \to F_\lambda(t,x)$ липшицевое по x с константой $L = 1/\lambda$. При этом для любой фиксированной точки $(t,x) \in [a,b] \times \Omega'$ при $\lambda \to +0$ выполнено: $F_\lambda(t,x) \to z(t,x)$, где $z(t,x) \in F(t,x)$ — единственное решение включения* (3), *на котором квадратичная форма $v(z) = zA(t,x)z^T$ достигает своего минимума.*

Рассмотрим однопараметрическое семейство уравнений

$$\dot{x} = F_\lambda(t,x) \tag{7}$$

при всех достаточно малых $\lambda > 0$.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 5. Тогда для любых начальных данных $(t_0,x_0) \in (\alpha,\beta)\times\Omega$ на некотором промежутке $[t_0,t_1]$ определены решение $x(t)$ включения* (2) *и решения $x_\lambda(t)$ уравнений* (7) *для всех $\lambda \in (0,\lambda']$ и существует константа $K > 0$ такая, что $\|x_\lambda(t) - x(t)\|^2 \leqslant \lambda K$ для любых $\lambda \in (0,\lambda']$ и $t \in [t_0,t_1]$.*

Как следствие теоремы 5 получаем, что $x_\lambda(t) \to x(t)$ при $\lambda \to +0$ равномерно на любом отрезке $[t_0,t_1]$, на котором все эти решения определены.

Список литературы

1. Дискуссия по докладу А. Ф. Филиппова // Тр.I Междунар. конгресса ИФАК. Т.1. Изд-во АН СССР, 1961.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения // В кн.: Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2003, с. 265-288.
3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.
4. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит. 2001.
5. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.:Мир. 1988.

Финогенко Иван Анатольевич
ИДСТУ СО РАН,
Россия, Иркутск
e-mail: fin@icc.ru