УДК 517.972.8

© **А. Г. Ченцов**

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ [1]

Рассматривается маршрутная задача последовательного обхода множеств с ограничениями в виде условий предшествования (см. [1, 2]). Данная задача — обобщение известной задачи курьера [3], которая, в свою очередь, является усложненным вариантом задачи коммивояжера (ЗК). Обзор предлагаемых методов дан в [4]. Смысл условий предшествования состоит в следующем. Указан конечный набор пар индексов целевых множеств, соответствующих парам «отправитель-получатель». Множество, имеющее индекс «отправителя», должно посещаться раньше множества с индексом «получателя». Данный порядок посещений должен выдерживаться для каждой из вышеупомянутых пар (ограничение на дискретную компоненту решения). Присутствует также потенциально непрерывная компонента решения, отвечающая трассе перемещений по множествам, занумерованным с соблюдением вышеупомянутых условий предшествования. Совокупное решение — пара маршрут-трасса.

Допускается случай перемещения по изменяющимся множествам, что соответствует более общей задаче последовательного обхода сечений заданных мультифункций при вышеупомянутом ограничении на дискретную компоненту решения. Построен вариант метода динамического программирования (МДП), обобщающий [1],[2] и предусматривающий эквивалентное преобразование к обобщенной ЗК с ограничениями на текущие перемещения.

Для решения обобщенной задачи курьера (имеется в виду задача о посещении множеств) предлагается итерационный метод решения с использованием «обычной» задачи курьера. В основе метода — эквивалентное преобразование экстремальной задачи маршрутизации со связанными переменными в оптимизационную задачу реконструкции с независимыми переменными (имеется в виду задача, предусматривающая размещение «городов» (терминология ЗК) на множествах для достижения лучшего качества при последующем решении задачи курьера).

Сейчас рассмотрим постановку более общей задачи [5]. Фиксируем непустое множество X, $x^0 \in X$, натуральное число N, $N \geqslant 2$, а также кортеж $(A_1, ..., A_N)$ мультифункций, действующих в X (каждая из упомянутых мультифункций — отображение из X в семейство всех непустых подмножеств X); мы используем далее символику [5]. Через $\mathbf{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1,N} = \{1, ..., N\}$. Рассматриваем перемещения вида

$$(x_0 = x^0) \longrightarrow (x_1 \in A_{\beta(1)}(x_0)) \longrightarrow (x_2 \in A_{\beta(2)}(x_1) \longrightarrow ... \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (x_{N-1} \in A_{\beta(N-1)}(x_{N-2})) \longrightarrow (x_N \in A_{\beta(N)}(x_{N-1}))$$

(здесь, конечно, имеется в виду случай, когда $N > 3$), где $\beta \in \mathbf{P}$ подлежит выбору, как и трасса $(x_i)_{i \in \overline{1,N}}$ вышеупомянутых перемещений. Выбор β может быть стеснен ограничениями. Для их определения введем конечное множество $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$ (оно может быть пустым), а также соглашение: если $\beta \in \mathbf{P}$, то $\beta^{-1} \in \mathbf{P}$ есть def перестановка, обратная к β. Кроме того, при $z \in \mathbf{K}$ через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем такие два числа из $\overline{1,N}$, что $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Аналогичные обозначения для компонент упорядоченных пар используем при необходимости и в других случаях. Пусть ($\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению) $\mathbf{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in \mathbf{P} \mid \beta^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \ \forall z \in \mathbf{K}\}$ — множество всех допустимых маршрутов (перестановки из $\mathbf{P}$ называем маршрутами).

Для $\beta \in \mathbf{P}$ вводим множество $\mathcal{X}[\beta]$ всех кортежей $(x_i)_{i \in \overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow X$, для каждого из которых $(x_1 \in A_{\beta(1)}(x^0))$ & $(x_{i+1} \in A_{\beta(i+1)}(x_i) \ \ \forall i \in \overline{1, N-1})$. Тем самым введено множество всех трасс движения по заданному маршруту, определяемому фиксированной перестановкой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (06-01-00414, 04-01-96093).

β. Любая из этих трасс может использоваться «в совокупности» с β. В результате получается совокупное решение — пара маршрут-трасса. Тогда

$$\mathbf{S} \stackrel{\triangle}{=} \{(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{A} \times X^N \mid (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{X}[\beta]\}.$$

Фиксируем функции $\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_N$, действующие из $X \times X$ в полуось $[0, \infty[$, и $\mathbf{f} : X \longrightarrow \infty$. Качество решения $(\beta, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}$ оцениваем числом

$$\mathbf{c}_{\beta(1)}(x^0, x_1) + \mathbf{c}_{\beta(2)}(x_1, x_2) + ... + \mathbf{c}_{\beta(N)}(x_{N-1}, x_N) + \mathbf{f}(x_N)$$

(в данном выражении $N > 3$, при меньших N имеем еще более простую формулу). Более того, полагаем, что последнее выражение определяет отображение π на непустом множестве $\mathbf{P} \times X^N$. Имеем основную маршрутную задачу (ОМЗ)

$$\pi(z) \longrightarrow \inf, \ \ z \in \mathbf{S}.$$

Постулируем, что $\forall K \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists z \in K :\ \mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(h)\ \forall h \in K$. Тогда, в частности, $\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z \in \mathbf{K}$.

Через $\mathfrak{N}$ обозначаем семейство всех непустых подмножеств $\overline{1,N}$. При $Q \in \mathfrak{N}$ полагаем, что $\Sigma[Q]$ есть множество всех $z \in \mathbf{K}$ таких, что $\mathrm{pr}_1(z) \in Q$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in Q$. Сопоставляя каждому множеству $M \in \mathfrak{N}$ множество $M \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) :\ z \in \Sigma[M]\}$, получаем оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N}$. Для множества $\mathbb{P}$ всех перестановок $\alpha \in \mathbf{P}$ таких, что

$$\alpha(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l) :\ l \in \overline{k,N}\}\ \ \forall k \in \overline{1,N},$$

имеем равенство $\mathbf{A} = \mathbb{P}$. В частности, $\mathbf{A} \neq \emptyset$. Как следствие, имеем свойство совместности системы ограничений ОМЗ. Стало быть, значение (экстремум) ОМЗ, обозначаемое далее через $\mathbf{V}$, конечно, т.е. $\mathbf{V} \in [0, \infty[$.

По аналогии с представлением $\mathbf{A}$ в ОМЗ, мы используем аналогичные представления на основе оператора $\mathbf{I}$ в «укороченных» задачах (см. [5, с. 132]): речь идет о задачах последовательного обхода сечений мультифункций A_i, $i \in K$, при начальном состоянии $x \in X$ и заданном множестве индексов K, $K \subset \overline{0,N}$. Каждой такой задаче сопоставляем значение $v_s(x, K)$, где s — мощность $K :\ s \stackrel{\triangle}{=} |K| \in \overline{0,N}$. При этом $v_0(x, \emptyset) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{f}(x)\ \ \forall x \in X$. Изменяя, при фиксированном $s \in \overline{0,N}$, $x \in X$ и K, $K \subset \overline{0,N}$, $|K| = s$, мы получаем слой v_s функции Беллмана. В [5] установлено (см. также частные случаи ОМЗ в [1],[2]), что при $s \in \overline{1,N}$, $x \in X$ и K, $K \subset \overline{1,N}$, $|K| = s$,

$$v_s(x, K) = \min_{k\in\mathbf{I}(K)} \inf_{y\in A_k(x)} [\mathbf{c}_k(x, y) + v_{s-1}(y, K \setminus \{k\})].$$

Получили аналог уравнения Беллмана; $\mathbf{V} = v_N(x^0, \overline{1,N})$. Последующее решение находится по традиционной для МДП схеме (см. [5]).

В основе итерационного метода решения — сведение ОМЗ (в ее частном случае) к эквивалентной задаче реконструкции (ЗР). При этом полагаем, что заданы непустые конечные попарно непересекающиеся множества $M_1, ..., M_N$, содержащиеся в X и не содержащие каждое точку x^0. Постулируем далее, что $A_j(x) = M_j\ \ \forall j \in \overline{1,N}\ \forall x \in X$. Итак, рассматриваем задачу о посещении системы конечных множеств. Пусть $\mathfrak{M} \stackrel{\triangle}{=} \prod\limits_{i=1}^{N} M_i$. Введем функцию w из $\mathfrak{M} \times \mathbf{A}$ в $[0, \infty[$ по правилу: если $z \in \mathfrak{M} \times \mathbf{A}$, $(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathbf{A}$ и $z = ((x_i)_{i\in\overline{1,N}}, \alpha)$, то

$$w(z) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}(x^0, x_{\alpha(1)}) + (\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_{\alpha(i)}, x_{\alpha(i+1)})) + \mathbf{f}(x_{\alpha(N)}).$$

Задача реконструкции (ЗР): $w(z) \longrightarrow \min$, $\ z \in \mathfrak{M} \times \mathbf{A}$; ОМЗ и ЗР эквивалентны. Именно, $\mathbf{V}$ есть значение ЗР, а экстремальные множества (для ОМЗ и ЗР) «совпадают» с точностью до взаимно однозначного преобразования. На этой основе конструируется метод итераций, обладающий аналогией с методом покоординатного спуска, но реализуемый в исходной ОМЗ со связанными переменными.

Введем оператор $\mathbf{t}: \ \mathbf{S} \longrightarrow \mathfrak{M}$. Если $z \in \mathbf{S}$, $\alpha = \mathrm{pr}_1(z)$, $(x_i)_{i\in\overline{1,N}} = \mathrm{pr}_2(z)$, то $\mathbf{t}(z) \stackrel{\triangle}{=} (x_{\alpha^{-1}(i)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathfrak{M}$. Определяем отображение $\mathbf{T}: \ \mathbf{S} \longrightarrow \mathfrak{M}\times\mathbf{A}$ по следующему правилу: если $z \in \mathbf{S}$, то $\mathbf{T}(z) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{t}(z), \mathrm{pr}_1(z))$; тогда $\mathbf{T}$ есть биекция $\mathbf{S}$ на $\mathfrak{M}\times\mathbf{A}$. Кроме того, сужение $(\pi|\mathbf{S})$ отображения π на множество $\mathbf{S}$ есть суперпозиция w и $\mathbf{T}$, т.е. $(\pi|\mathbf{S}) = w\circ\mathbf{T}$. Допустимые множества ОМЗ и ЗР связаны равенством $\mathfrak{M}\times\mathbf{A} = \{\mathbf{T}(s): \ s\in\mathbf{S}\}$. Отметим естественную аналогию с [6], где рассматривалась задача последовательного обхода множеств без ограничений, отвечающих условиям предшествования.

Метод итераций. Излагаемый далее метод подобен процедуре [7], но отвечает задаче, осложненной условиями предшествования. Рассмотрим начальную задачу курьера.

Введем $M_0 \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\}$, получая расширенный кортеж $(M_i)_{i\in\overline{0,N}}$ непустых конечных множеств. Пусть, при $i \in \overline{0,N}$, $j \in \overline{1,N}$, $\mathbb{A}_{i,j}$ есть def наименьшее из чисел $\mathbf{c}(z)$, $z \in M_i \times M_j$. Получили матрицу $\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{A}_{i,j}; \ i \in \overline{0,N}, \ j \in \overline{1,n})$. Если $j \in \overline{1,N}$, то полагаем, что $\mathbf{f}^{(j)}$ — наименьшее из чисел $\mathbf{f}(x)$, $x \in M_j$. Задаче

$$\mathbb{A}_{0,\alpha(1)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}_{\alpha(i),\alpha(i+1)} + \mathbf{f}^{(\alpha(N))} \longrightarrow \min, \ \alpha \in \mathbf{A}$$

сопоставляем значение (экстремум) $\mathbf{v}$ и (непустое) экстремальное множество $\mathbf{sol}$. При этом $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{V}$. Начальная задача встраивается в итерационный алгоритм. Именно, выбираем $\omega_0 \in \mathbf{sol}$, после чего нумеруем целевые множества, получая кортеж $(M_{\omega_0(i)})_{i\in\overline{1,N}}$. Далее, оптимизируем трассу последовательного обхода занумерованных таким образом множеств, решая задачу

$$\pi(\omega_0, (x_i)_{i\in\overline{1,N}}) \longrightarrow \min, \ (x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{X}[\omega_0]$$

(разумеется, в нашем случае $\mathcal{X}[\beta]$ есть произведение множеств $M_{\beta(i)}$, $i \in \overline{1,N}$). Пусть $\mathcal{V}[\omega_0]$ — значение, а $(y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}$ — решение последней задачи; $y_j^0 \in M_{\omega_0(j)}$, $j \in \overline{1,N}$. Имеем $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{V} \leqslant \mathcal{V}[\omega_0]$ и $\lambda_0 \stackrel{\triangle}{=} (\omega_0, (y_i^0)_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}$. Для $(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{t}(\lambda_0)$ решаем задачу минимизации $w((z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}, \cdot)$ на множестве $\mathbf{A}$ (задача курьера), получая значение $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]$ и решение $\omega_1 \in \mathbf{A}$ (точка экстремума); упомянутое значение не превосходит $\mathcal{V}[\omega_0]$ и оценивает сверху $\mathbf{V}$.

Далее решаем задачу о выборе трассы при заданном способе нумерации целевых множеств: оптимизируем посещение занумерованных множеств, образующих кортеж $(M_{\omega_1(i)})_{i\in\overline{1,N}}$; получаем наилучшую (при фиксации ω_1) трассу и вновь «улучшаем» (точнее, не ухудшаем) верхнюю оценку для $\mathbf{V}$, поскольку значение $\mathcal{V}[\omega_1]$ возникающей задачи о посещении вышеупомянутых множеств не превосходит $(\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}]$. Итак, выбираем оптимальную трассу $(y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{X}[\omega_1]$ посещения множеств $M_{\omega_1(i)}$, $i \in \overline{1,N}$, получая точку пространства решений ОМЗ $\lambda_1 \stackrel{\triangle}{=} (\omega_1, (y_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}) \in \mathbf{S}$, для которой $\pi(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]$. Теперь для новой системы «городов» $(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{t}(\lambda_1) \in \mathfrak{M}$ решаем «обычную» задачу курьера [3] (оптимизируем маршрут, т.е. перестановку индексов)

$$w((z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}, \alpha) \longrightarrow \min, \ \ \alpha \in \mathbf{A},$$

определяя ее значение $(\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}]$ и (оптимальное) решение $\omega_2 \in \mathbf{A}$. Далее снова оптимизируется трасса посещения занумерованных (по новому) множеств $M_{\omega_2(i)}$, $i \in \overline{1,N}$. Реализуется экстремум $\mathcal{V}[\omega_2]$ получающейся экстремальной задачи. Итоговая цепочка оценок имеет (после двух итераций) следующий вид

$$\mathbf{v} \leqslant \mathbf{V} \leqslant \mathcal{V}[\omega_2] \leqslant (\mathrm{val})[(z_i^{(1)})_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant \mathcal{V}[\omega_1] \leqslant (\mathrm{val})[(z_i^{(0)})_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant \mathcal{V}[\omega_0].$$

Далее процедура повторяется (см. [8]). Мы получаем на каждом шаге двусторонние оценки экстремума и способы их реализации в виде пары маршрут-трасса. Так, например, для последней цепочки оценок мы, определяя оптимальную трассу $(y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{X}[\omega_2]$ и полагая $\lambda_2 \overset{\triangle}{=} (\omega_2, (y_i^{(2)})_{i\in\overline{1,N}})$, имеем $\lambda_2 \in \mathbf{S}$ и $\pi(\lambda_2) = \mathcal{V}[\omega_2]$.

В предлагаемой конструкции реализуется в итерационном режиме идея декомпозиции исходной задачи в совокупность двух характерных «подзадач»: задача курьера (обобщенная задача развозки [9]) и задача последовательного управления с дискретным временем.

Вычислительная реализация. Для решения вариантов ОМЗ, связанных с минимизацией длины ломаной в конечномерном пространстве, А. А. Ченцовым построены программы для ПЭВМ, в основе которых — МДП и метод итераций соответственно. В последнем случае вычислительный эксперимент показал, что итерационная процедура быстро стабилизируется (вторая–третья итерации).

Список литературы

1. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Метод динамического программирования в некоторых версиях задачи коммивояжера с ограничениями // Алгоритмы и програм. средства параллел. вычислений.— Екатеринбург: УрО РАН, 2003. № 7. С.217–242.

2. Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования // Вестник УГТУ-УПИ. На передовых рубежах науки и инженерного творчества. Екатеринбург: ГУО ВПО УГТУ-УПИ, 2004. № 15(45). Ч. 1. С. 148–152.

3. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.

4. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации. / Труды конференции «Модернизация образования в условиях глобализации» (круглый стол «Образование через науку и инновации»). Тюмень : Изд-во Тюменского ун-та, 2005. С. 106–110.

5. Ченцов А. Г. О структуре одной эксремальной задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. 2006. № 1. С. 127–150.

6. Ченцов, А. А., Ченцов А. Г. Редукция задач маршрутной оптимизации // Автоматика и телемеханика, 2000. № 10. С. 136–150.

7. Ченцов А. А., Ченцов А. Г. К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием «незамкнутой» задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2002. №11. С. 151–166.

8. Ченцов А. А., Ченцов А. Г., Ченцов П. А. Обобщенная версия задачи курьера / Прикладной и математический анализ. Тюмень: Изд-во Тюменского ун-та, 2005, вып.2. С. 238–280.

9. Меламед И. И., Плотинский Ю. М. Эвристический алгоритм решения обобщенной задачи развозки // Автоматика и телемеханика. 1979. №12. С. 167–172.

Ченцов Александр Георгиевич
Институт математики и механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru