Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.934

© **Д. А. Вагин**
davagin@udm.ru

ОДНА ЗАДАЧА ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ЖЕСТКОСОЕДИНЕННЫХ УБЕГАЮЩИХ[1]

Ключевые слова: групповое преследование, уклонение от встречи.

Abstract. The decision condition of one pursuit problem of the hardunited evader group are derived.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ рассматривается дифференциальна игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и m убегающих E_1, $E_2,\ldots,E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l x_i = u_i, \quad \|u_i\| \leqslant 1. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид:

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \ldots + a_l y_j = v, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $a_1,\ldots,a_l \in \mathbb{R}^1$.

При $t=0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i,\alpha}^0, \quad y_j^{(\alpha)}(0) = y_{j,\alpha}^0, \quad \alpha = 0,\ldots,l-1,$$

причем $x_{i,0}^0 - y_{j,0}^0 \neq 0$ для всех i и j.

Здесь и всюду далее $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, если не оговорено иное.

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00–1.0–5).

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$z_{i,j}^{(l)} + a_1 z_{i,j}^{(l-1)} + \ldots + a_l z_{i,j} = u_i - v,$$

$$z_{i,j}(0) = z_{i,j,0}^0 = x_{i,0}^0 - y_{j,0}^0, \ldots , z_{i,j}^{(l-1)}(0) = z_{i,j,l-1}^0 = x_{i,l-1}^0 - y_{j,l-1}^0.$$

Обозначим через $\varphi_q(t)$, $q = 0, 1, \ldots , l-1$ решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1 \omega^{(l-1)} + \ldots + a_l \omega = 0$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0, \quad s \neq q, \quad \omega^{(q)}(0) = 1.$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. Все корни уравнения

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{3}$$

имеют неположительные вещественные части.

П р е д п о л о ж е н и е 2. При всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $\varphi_{l-1}(t) \geqslant 0$.

Обозначим $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$ — вещественные корни, $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots , \mu_p \pm i\nu_p$ $(\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_p)$ — комплексные корни уравнения (3), k_s — кратность λ_s, m_α — кратность корня $\mu_\alpha \pm i\nu_\alpha$. Отметим, что в силу предположения 2 выполнено неравенство $\mu_p \leqslant \lambda_s$. Пусть далее

$$\zeta_i(T,t) = \varphi_0(T) x_i(t) + \ldots + \varphi_{l-1}(T) x_i^{(l-1)}(t),$$

$$\eta_j(T,t) = \varphi_0(T) y_j(t) + \ldots + \varphi_{l-1}(T) y_j^{(l-1)}(t),$$

$$\xi_{i,j}(T,t) = \varphi_0(T) z_{i,j}(t) + \ldots + \varphi_{l-1}(T) z_{i,j}^{(l-1)}(t).$$

Так как

$$\varphi_q(t) = \sum_{\beta=1}^{s} e^{\lambda_\beta t} P_{q,\beta}(t) + \sum_{\alpha=1}^{p} e^{\mu_\alpha t} (Q_{q,\alpha}(t) \cos(\nu_\alpha t) + R_{q,\alpha}(t) \sin(\nu_\alpha t)),$$

то $\xi_{i,j}(T,0)$ $\zeta_i(T,0)$, $\eta_j(T,0)$ представимы в виде

$$\xi_{i,j}(T,0)=\sum_{\beta=1}^{s}e^{\lambda_\beta T}P^3_{i,j,\beta}(T)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{\mu_\alpha T}(Q^3_{i,j,\alpha}(T)\cos(\nu_\alpha T)+R^3_{i,j,\alpha}(T)\sin(\nu_\alpha T)).$$

$$\zeta_i(T,0)=\sum_{\beta=1}^{s}e^{\lambda_\beta T}P^1_{i,\beta}(T)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{\mu_\alpha T}(Q^1_{i,\alpha}(T)\cos(\nu_\alpha T)+R^1_{i,\alpha}(T)\sin(\nu_\alpha T)),$$

$$\eta_j(T,0)=\sum_{\beta=1}^{s}e^{\lambda_\beta T}P^2_{j,\beta}(T)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{\mu_\alpha T}(Q^2_{j,\alpha}(T)\cos(\nu_\alpha T)+R^2_{j,\alpha}(T)\sin(\nu_\alpha T)).$$

Считаем, что $\xi_{i,j}(T,0)\neq 0$ для всех i, j и $T>0$, ибо если $\xi_{p,q}(T,0)=0$ при некоторых p, q и T, то преследователь P_p ловит убегающего E_q к моменту T, полагая $u_p(t)=v(t)$. Считаем также, что $P^3_{i,j,s}(t)$ тождественно не равен 0 для всех i и j, ибо в противном случае преследователи первоначально добиваются выполнения указанного условия.

Обозначим $\gamma_{i,j}$ — степень многочлена $P^3_{i,j,s}(t)$, γ — степень многочлена $P_{l-1,j,s}$. Можно считать, что $\gamma_{i,j}=\gamma$ для всех i и j, ибо в противном случае преследователи P_i первоначально добиваются выполнения данного условия.

Пусть $X_i^0=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{P^1_{i,s}}{t^\gamma}$, $Y_j^0=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{P^2_{j,s}}{t^\gamma}$, $Z^0_{i,j}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{P^3_{i,j,s}}{t^\gamma}$. Обозначим данную игру Γ.

О п р е д е л е н и е 1. В игре Γ происходит поимка, если найдутся $T > 0$ и измеримые функции $u_i = u_i(t, z_{ij}^0, v(t))$ такие, что для любой измеримой функции $v(t)$ существуют момент $\tau \in [0, T]$ и номера i, j, для которых $x_i(\tau) = y_j(\tau)$.

Будем предполагать в дальнейшем, что начальные позиции X_i^0, Y_j^0 таковы, что

а) если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \geqslant k+1$ справедливо $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_i^0,\ i \in I\} \neq \varnothing$;

б) любые k векторов из набора $\{X_i^0 - Y_j^0, Y_s^0 - Y_r^0, s \neq r\}$ линейно независимы.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $n \geqslant k+1$ *и*

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{Z_{i,j}^0\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $n \geqslant k+1$, $l = 1$, $a_1 = 0$ *и*

$$\operatorname{Int}\operatorname{co}\{x_i^0\} \cap \operatorname{co}\{y_j^0\} \neq \varnothing.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

З а м е ч а н и е 1. Случай простого преследования с одним убегающим рассматривался в [1], со многими — в [2, 3].

Список литературы

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. Г 3. С. 145–146.
2. Петров Н. Н. Теория игр. Ижевск: Изд-во Удмуртск. ун-та, 1997. 192 с.
3. Вагин Д. А., Петров Н. Н. Простое преследование жесткоскоординированных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. Г 5. С. 75–79.