УДК 517.929

© **М. И. Додкин**
mdod2001@mail.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, фундаментальное решение, асимптотическая устойчивость.

Abstract. The forced delay differential equation

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-\omega),\ t \in \mathbb{R}_+$$

with complex coefficient $a(t)$ satisfying the condition $a(t+\omega) = Ma(t)$, $M \in \mathbb{C}$, is being considered. Effective sufficient conditions for asymptotic behaviour of solutions were obtained, in particular, the conditions for solutions' boundedness, convergence to some constant value and unboundedness.

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-\omega),\ t \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

с комплекснозначным коэффициентом $a(t)$ таким, что

$$a(t+\omega) = Ma(t),\ \text{где } M \in \mathbb{C}.$$

Пусть $X(t)$ — фундаментальное решение уравнения (1), т. е. такая функция, что $x(t) = x(0)X(t)$; $A \doteq \int\limits_0^\omega a(\xi)\,d\xi$.

Т е о р е м а 1. *Если $|M| < 1$, то существует*

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^k M^{k(k+1)/2}.$$

Т е о р е м а 2. *Если* $|M| = 1$, $M \neq 1$, *то* $X(t)$ *ограничено на* $\mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $M \neq 1$ *и существует* $n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $M^{n+1} = 1$. *Тогда*:
1) *если существует* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)$, *то он равен* 0;
2) *для того чтобы* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$1 + \sum_{q=1}^{n} M^{-q(q+1)/2} z_m^q \exp\bigl(A z_m \frac{1 - M^q}{M^q(1 - M)}\bigr) = 0$$

при всех $m \in \{1, \dots, n{+}1\}$; *здесь* $\{z_m\}_{m=1}^{n+1}$ — *множество корней уравнения* $z^{n+1} M^{n(n+1)/2} = 1$.

Т е о р е м а 4. *Если* $A \neq 0$ *и выполнено неравенство* $(|M| + |M|^{-1})/|1 - M| < 1$, *то* $X(t)$ *не ограничено на* $\mathbb{R}_+$.

Заметим, что существует целый ряд работ по уравнениям вида (1) с периодическими коэффициентами, что соответствует $M = 1$. Этот случай в настоящей работе не рассматривался, так как он хорошо изучен в работах З. И. Рехлицкого [1, 2]. В этой связи стоит отметить один интересный факт: при $M = 1$ возможны как ограниченность, так и неограниченность решения, а при доказательстве теоремы 2 была получена оценка сверху на модуль фундаментального решения уравнения (1), величина которой тем больше, чем ближе M к единице.

* * *

1. Рехлицкий З. И. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // ДАН СССР. 1956. Т. 111, Ґ 1. С. 29–32.
2. Рехлицкий З. И. Об устойчивости решений периодических дифференциально-разностных уравнений // Изв. АН СССР. 1966. Т. 30, вып. 5. С. 971–974.