Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.917

© **А. Г. Иванов**
imi@uni.udm.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Ключевые слова: почти периодические по Бору решения систем управления, мерозначные почти периодические по Степанову отображения.

Abstract. We present some properties of solutions of almost periodic control systems which are directly used in problems of optimal control of almost periodic motions.

Пусть $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ — метрическое пространство вероятностных мер Радона на $\mathbb{R}^m$ [1], носитель которых содержится в множестве $\mathfrak{U} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, и $\mathcal{M}$ — совокупность измеримых отображений $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$. На $\mathcal{M}$ возможно задание такой метрики ρ_w [2], относительно которой $(\mathcal{M}, \rho_w)$ является компактным метрическим пространством. Рассмотрим, далее, некоторое множество параметров Ω, а также множество

$$\mathfrak{M} = \{\mu(\cdot, \varepsilon, \omega),\ (\varepsilon, \omega) \in [0, \varsigma] \times \Omega\} \subset \mathcal{M},$$

в котором $\mu(t, 0, \omega) \doteq \widehat{\mu}(t),\ t \in \mathbb{R},$ и при каждом $m \in \mathbb{Z}$ полагаем

$$\mathbb{I}_m(\varepsilon, \omega) \doteq \{t \in [m, m+a]\colon\ \mu(t, \varepsilon, \omega) \neq \widehat{\mu}(t)\}\ (a > 0).$$

Говорим, что множество $\mathfrak{M}$ равномерно липшицево, если найдется такое $L > 0$, что для всех $(m, \omega) \in \mathbb{Z} \times \Omega$ справедливо неравенство $\mathbb{I}_m(\varepsilon, \omega) \leqslant L\varepsilon$.

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00–1.0–5).

Л е м м а 1. *Если множество* $\mathfrak{M}$ *равномерно липшицево, то* $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\rho_w(\mu(\cdot,\varepsilon,\omega),\widehat{\mu}(\cdot)))=0.$

Определим APM_1 как совокупность таких $\mu\in\mathcal{M}$, что для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ отображение

$$t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle\doteq\int\limits_{\mathfrak{U}}c(u)\mu(t)(du)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ почти периодических (п. п.) по Степанову функций [3], и скажем, что множество $\mathfrak{A}\subset\mathrm{APM}_1$ равностепенно п. п., если для каждой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ совокупность отображений $\{t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle,\ \mu\in\mathfrak{A}\}$ из пространства $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ является равностепенно п. п. [3]. В дальнейшем каждую функцию f из $L_1(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$, где $(\mathfrak{X},\rho)$ — компактное метрическое пространство, представляем в виде отображения $(t,x)\mapsto f(t,x)\in\mathbb{R}$, $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathfrak{X}$ и говорим, что такая функция принадлежит $S(\mathbb{R},C(\mathfrak{X},\mathbb{R}))$, если для любого $\varepsilon>0$ множество $\{\tau\in\mathbb{R}:\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\max\limits_{x\in\mathfrak{X}}|f(s+\tau,x)-f(s,x)|ds<\varepsilon\}$ относительно плотно.

При исследовании п. п. систем управления в классе п. п. функций полезна следующая теорема [2].

Т е о р е м а 1. *Пусть функция* $(t,x,u)\mapsto g(t,x,u)$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R},C(K\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, *где* $K\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, *и ограничена. Тогда для любой функции* $x(\cdot)$ *из* $S(\mathbb{R},K)$ *отображение* $(t,u)\mapsto g(t,x(t),u)$ *принадлежит* $S(\mathbb{R},C(K\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, *и если множество* $\mathfrak{A}\subset\mathrm{APM}_1$ *равностепенно п. п., то совокупность отображений* $\{t\mapsto\langle\mu(t),g(t,x(t),u)\rangle,\ \mu\in\mathfrak{A}\}$, *где*

$$\langle\mu(t),g(t,x(t),u)\rangle\doteq\int\limits_{\mathfrak{U}}g(t,x(t),u)\mu(t)(du),\ t\in\mathbb{R},$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ *и равностепенно п. п.*

Пусть далее G — область в $\mathbb{R}^n$, дифференцируемое по x и v в каждой точке $(t,x,v,u) \in \mathbb{R}\times G\times\mathbb{R}^k\times\mathfrak{U}$ отображение $(t,x,v,u)\mapsto f(t,x,v,u)\in\mathbb{R}^n$ таково, что для любых фиксированных $K\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $V\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ имеет место включение $f\in S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$, а f'_x и f'_v принадлежат пространствам $S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$ и $S(\mathbb{R},C(K\times V\times\mathfrak{U},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k))$ соответственно. Кроме того, будем предполагать, что

$$\sup\{|f(t,x,v,u)|+|f'_x(t,x,v,u)|,\ (t,x,v,u)\in\mathbb{R}\times K\times V\times\mathfrak{U}\}<\infty.$$

Фиксируем теперь множество $\mathfrak{S}$ из пространства $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ п. п. по Бору функций, и при $v(\cdot)\in\mathfrak{S}$, $\mu(\cdot)\in\mathrm{APM}_1$ рассмотрим п. п. по Степанову систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\langle\mu(t),f(t,x,v(t),u)\rangle\doteq\int\limits_{\mathfrak{U}}f(t,x,v(t),u)\mu(t)(du),\ x\in G,\qquad(1)$$

для которой набор $(x(\cdot),v(\cdot),\mu(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ называется допустимым, если $x(\cdot)$ — решение этой системы, отвечающее паре $(v(\cdot),\mu(\cdot))$, такое, что $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot))\subset G$.

Для $\widehat{v}(\cdot)\in\mathfrak{S}$ рассмотрим касательный конус $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$. В соответствии с определением (см., например, [4]) в нашем случае $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, если найдется константа $\varrho>0$ и такое отображение $\varepsilon\mapsto\eta(\cdot,\varepsilon)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$, $\varepsilon\in[0,\varrho]$ $(\eta(\cdot,0)\equiv0)$, что $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}\|\eta(\cdot,\varepsilon)\|_{C(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)}=0$ и при всех $\varepsilon\in[0,\varrho]$

$$v_\varepsilon(\cdot)\doteq\widehat{v}(\cdot)+\varepsilon(h(\cdot)+\eta(\cdot,\varepsilon))\in\mathfrak{S}.\qquad(2)$$

Т е о р е м а 2. *Пусть множество $\mathfrak{M}\subset\mathrm{APM}_1$ является равномерно липшицевым и равностепенно п. п., и пусть допустимый набор $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in B(\mathbb{R},G)\times\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ системы* (1) *такой, что п. п. по Степанову система*

$$\dot{y}=\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle y,\ (t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

допускает экспоненциальную дихотомию. Тогда для каждого $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ *найдутся константа* $\widehat{\varepsilon} > 0$ *и компактная окрестность* $K \subset G$ *множества* $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}(\cdot))$ *такие, что при каждом* $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon}]$ *система*

$$\dot{x} = \langle \mu(t, \varepsilon, \omega), f(t, x, v_\varepsilon(t), u) \rangle \doteq \int_{\mathfrak{U}} f(t, x, v_\varepsilon(t), u) \mu(t, \varepsilon, \omega)(du), \ \ \omega \in \Omega,$$

где $v_\varepsilon(\cdot) \in \mathfrak{S}$ *определено равенством* (2), *имеет единственное п. п. по Бору решение* $x(\cdot, \varepsilon, \omega)$ *такое, что* $\overline{\mathrm{orb}}(x(\cdot, \varepsilon, \omega)) \subset K$ *и*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\sup_{\omega \in \Omega} \|x(\cdot, \varepsilon) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}) = 0.$$

Кроме того, множество

$$\{\frac{1}{\varepsilon} \|x(\cdot, \varepsilon, \omega) - \widehat{x}(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}, \ (\varepsilon, \omega) \in (0, \widehat{\varepsilon}] \times \Omega\}$$

ограничено.

З а м е ч а н и е 1. Взяв в теореме 2 в качестве множества $\mathfrak{M}$ пакет игольчатых вариаций [2], отвечающий заданному $\widehat{\mu}(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$, получим утверждение о ряде основных свойств п. п. решений, которое непосредственно используется при получении необходимых условий оптимальности допустимого процесса в задаче оптимального управления п. п. движениями.

Список литературы

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
2. Иванов А. Г. Элементы аппарата управления почти периодическими движениями. I. УдГУ. Ижевск, 2001. 49 с. Деп. в ВИНИТИ 28.06.2001, Ѓ 1536-В01.
3. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.