Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 519.615

© **М. Ю. Петров**
pmike@udm.net

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОЛЮСНЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Ключевые слова: нелинейные скалярные уравнения, системы уравнений, полюсный метод Ньютона, полюсы, квадратичная сходимость.

Abstract. The problem of solving systems of nonlinear equations is considered. The new modification of a classical Newton method, which called polar Newton method, is described. For some rule of choice of poluses on each iteration conditions of quadratic convergence of this method are found.

Рассматривается задача нахождения корней нелинейных скалярных уравнений и систем таких уравнений вида

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Изучается итерационный метод решения этой задачи, названный полюсным методом Ньютона, что связано с геометрической идеей его построения [1, 2]. Совокупность расчетных формул полюсного метода имеет вид

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{p}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$\mathbf{p}^{(k)} = -\left[F'(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{A}_k\right]^{-1} \cdot F(\mathbf{x}^{(k)}),$$

$$\mathbf{A}_k = \frac{(-1)^n}{\det(\mathbf{C} - \mathbf{X}_k)} \cdot \begin{pmatrix} a_1^{(k)} & \dots & a_n^{(k)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{(k)} & \dots & a_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

$a_j^{(k)} = (-1)^{j+1} \cdot M_{1j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, M_{1j} — соответствующие миноры матрицы $\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} \ldots p_n^{(k)} & x_{n+1}^{(k)} \\ \mathbf{C} - \mathbf{X}_k & \mathbf{d} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^n$,

$$\mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{(k)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $P_i\,(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}, d_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — априори произвольные точки (полюсы), не принадлежащие одной гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Л е м м а 1. *Матрица* $\mathbf{A}_k$ *может быть представлена в виде*

$$\mathbf{A}_k = \frac{(-1)^n}{\det \mathbf{C} - \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{x}^{(k)}} \cdot \ \mathbf{S}_k^T \, \mathbf{D} \, ,$$

где $\mathbf{D}$ *есть* $n \times n$ *-матрица со столбцами* $\mathbf{d}$; $\mathbf{s}$ — n *-мерный вектор-столбец с элементами*

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

A_{ij} — *алгебраическое дополнение элемента* c_{ij} *матрицы* $\mathbf{C}$;

$$\mathbf{S}_k = \left(s_{ij}^{(k)} \right)_{i,j=1}^n, \quad s_{ij}^{(k)} = (-1)^{j+1} \cdot A_{in}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

A_{in} — *алгебраическое дополнение соответствующего элемента минора* M_{1j} *матрицы* $\mathbf{Q}_k$.

Как показали исследования, полюсный метод Ньютона с фиксированными полюсами сходится лишь линейно, но за счет их удачного фиксирования можно генерировать сходящийся итерационный процесс из тех начальных точек $\mathbf{x}^{(0)} \in D(F)$, из которых неосуществим или расходится классический метод Ньютона.

В целях увеличения скорости сходимости предлагается сделать полюсы подвижными, задавая их, например, следующим образом:

$$\mathbf{d} := \mathbf{d}_k = \pm F(\mathbf{x}^{(k)}) \text{ при фиксированной матрице } \mathbf{C}. \qquad (2)$$

Для такого варианта изменения полюсов на каждой итерации справедливо следующее утверждение о квадратичной сходимости полюсного метода Ньютона, опирающееся на общие теоремы сходимости итерационных последовательностей [1].

Т е о р е м а 1. *Пусть функция F определена и дифференцируема по Фреше в некоторой открытой области $M \subseteq \mathbb{R}^n$, причем:*

1) $\exists L > 0: \ \|F'(\mathbf{x}) - F'(\tilde{\mathbf{x}})\| \leqslant L\,\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \ \ \forall \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in M$;

2) $\exists [F'(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{A}}]^{-1}$ *и* $\exists \tilde{c} > 0: \ \left\|[F'(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{A}}]^{-1}\right\| \leqslant \tilde{c} \ \ \forall \mathbf{x} \in M$.

Здесь матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ есть матрица $\mathbf{A}_k$, в которой во всех выражениях вектор $\mathbf{x}^{(k)}$ заменяется на $\mathbf{x}$, а $\mathbf{d} = \pm F(\mathbf{x})$ (знак берется согласованным с (2)).
Пусть, далее, существует $W > 0$ такое, что

$$\frac{\alpha\,\tilde{c}\,\left\|\mathbf{S}^T\right\|}{|\det\ \mathbf{C} - \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{x}|} + \frac{L\tilde{c}^2}{2} \leqslant W \quad \forall \mathbf{x} \in M,$$

где матрица $\mathbf{S}^T$ есть матрица $\mathbf{S}_k^T$, в которой во всех выражениях $\mathbf{x}^{(k)}$ заменяется на $\mathbf{x}$;
$\alpha = \|\mathbf{D}\| \,/\, \|\mathbf{d}\|$ — числовой параметр, зависящий от выбранной нормы.

Тогда, если $\mu := Wp_0 < 1$, где $p_0 \geqslant \left\|F(\mathbf{x}^{(0)})\right\|$, и замкнутый шар $S\big(\mathbf{x}^{(0)}, r := \tilde{c}\,p_0 \sum\limits_{i=0}^{\infty} \nu^{2^i-1}\big)$ содержится в M, то все члены последовательности $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$, определяемые полюсным методом Ньютона с выбором полюсов (2), начинающимся с заданного $\mathbf{x}^{(0)}$, лежат в $S \subseteq M$; последовательность $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ имеет *предел* $\mathbf{x}^* \in S$, *служащий решением уравнения* (1); *справедлива оценка погрешности*

$$\left\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)} \right\| \leqslant \frac{\tilde{c}\, p_0}{1 - \nu^{2^k}} \cdot \nu^{2^k - 1}.$$

Теорема не дает в явном виде правил фиксирования матричного параметра $\mathbf{C}$ для обеспечения указанной в ней сходимости и имеет лишь принципиальный характер. Практика вычислений показывает, что при удачном выборе матрицы $\mathbf{C}$ в (2) можно как превысить скорость сходимости основного метода Ньютона, то есть сделать ее сверхквадратичной, так и расширить границы его применимости, обеспечивая сходимость из ґнеудачныхЄ для метода Ньютона начальных приближений.

Для одномерного полюсного метода Ньютона имеются более тонкие результаты, касающиеся характера сходимости, выбора полюса и начального приближения [1, 2], по сравнению с теми, что вытекают из приведенной теоремы при $n = 1$.

* * *

1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 848 с.
2. Вержбицкий В. М., Петров М. Ю. Полюсный метод Ньютона // Пробл. соврем. теории период. движений: Межвуз. сб. Ижевск, 2002 (в печати).